01;03;04

Фундаментальное решение уравнений линейной магнитной гидродинамики в движущейся среде

© А.А. Александрова,[1] Ю.Н. Александров[2]

[1]Харьковский военный университет,
61043 Харьков, Украина
[2]Харьковский технический университет радиоэлектроники,
61726 Харьков, Украина
e-mail: et@kture.kharkov.ua

(Поступило в Редакцию 17 июля 2000 г.)

Получено общее фундаментальное решение системы линейных дифференциальных уравнений магнитной гидродинамики в движущейся среде. Тензорная функция Грина, представленная в виде преобразования Фурье–Лапласа, записана в виде суммы диад. Последнее представление дает возможность достаточно просто перейти к системе интегральных уравнений магнитной гидродинамики. Проанализированы различные важные для практики частные случаи фундаментального решения.

В последнее время многие вопросы, вызванные к жизни развитием современной физики, привлекают внимание к различным проблемам магнитной гидродинамики движущихся сред. Этими вопросами являются и умножение частот, и усиление МГД волн при отражении их от движущейся границы, и диагностика движущихся плазменных сред по их взаимодействию с МГД волнами, и явления генерации, отражения и преломления МГД волн при наличии движущихся слоев магнитосферы, солнечного ветра и т. д. Хотя для магнитной гидродинамики учет движения МГД среды и является ее сутью, лежащей в основе ее уравнений, связывающих непосредственно скорость среды $\mathbf{U}$, магнитную индукцию $\mathbf{B}$, плотность ρ и энтропию, но именно полный учет движения среды вызывает значительные математические сложности. Данная работа является логическим продолжением серии, в частности работы [1], в которой рассматривалась скорость $\mathbf{u}$, обусловленная только возмущенным волновым движением, а также [2], где дополнительно учитывалось невозмущенное движение неоднородности. В основе этих работ лежала функция Грина, найденная для МГД среды, в которой отсутствовало первоначальное движение. Здесь делается попытка учесть невозмущенное движение внешней среды прежде всего при построении именно этой функции Грина. Последняя позволяет стандартным методом суммирования возмущений, порождаемых каждой точкой источника, получить полное решение краевой задачи в виде свертки фундаментального решения и правой части линейных дифференциальных уравнений магнитной гидродинамики. Для построения фундаментальных решений линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами, которые описывают краевую задачу магнитной гидродинамики, применяется метод преобразования Лапласа–Фурье. При этом задача рассматривается в обобщенной постановке, что позволяет включить граничные и начальные условия в мгновенно действующие источники.

Постановка задачи следующая. Рассмотрим малые возмущения в плазменной среде, интерпретируемой как магнитогидродинамическая с ненулевой первоначальной скоростью $\mathbf{U}_1$, постоянной плотностью ρ_1 и магнитным полем $\mathbf{B}_1$, т. е. предполагаем рассмотрение системы классических линеаризованных уравнений магнитной гидродинамики [1]. Тогда функция Грина или фундаментальное решение краевой задачи определяется следующей системой дифференциальных уравнений с δ-образной правой частью:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{U}_1\nabla)\mathbf{u} + \frac{V_{s1}}{\rho_1}\nabla\tilde{\rho} + \frac{1}{4\pi\rho_1}[\mathbf{B}_1 \mathrm{rot}\,\mathbf{b}] = \mathbf{S}'_u\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\delta(t-t'),$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} - \mathrm{rot}\,[\mathbf{U}_1\mathbf{b}] + \mathrm{rot}\,[\mathbf{B}_1\mathbf{u}] = \mathbf{S}'_b\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\delta(t-t'),$$

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \rho_1 \mathrm{div}\,\mathbf{u} + \mathrm{div}\,(\tilde{\rho}\mathbf{U}_1) = S'_\rho\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\delta(t-t'), \qquad (1)$$

где $\mathbf{u}, \mathbf{b}, \tilde{\rho}$ — отклонения скорости, магнитного поля и плотности от их равновесных значений $\mathbf{U}_1, \mathbf{B}_1, \rho_1$; V_{s1} — обычная скорость звука; $\mathbf{S}'_u, \mathbf{S}'_b$ — произвольные постоянные векторы; S'_ρ — произвольная постоянная.

Несмотря на то что речь идет собственно о функции Грина, фактически мы ищем выражения для скорости, магнитного поля и плотности, удовлетворяющие системе (1), которые условно обозначим соответственно как $\hat{\Gamma}_u$, $\hat{\Gamma}_b$, $\hat{\Gamma}_\rho$ и представим в виде [3]:

$$\hat{\Gamma}_u(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t') = \mathbf{G}_{u\rho}(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t')S'_\rho + \hat{\mathbf{G}}_{uu}(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t')\mathbf{S}'_u + \hat{\mathbf{G}}_{ub}(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t')\mathbf{S}'_b,$$

$$\hat{\Gamma}_b(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t') = \mathbf{G}_{b\rho}(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t')S'_\rho + \hat{\mathbf{G}}_{ub}(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t')\mathbf{S}'_u + \hat{\mathbf{G}}_{bb}(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t')\mathbf{S}'_b,$$

$$\hat{\Gamma}_\rho(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t') = G_{\rho\rho}(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t')S'_\rho + \mathbf{G}_{\rho u}(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t')\mathbf{S}'_u + \mathbf{G}_{\rho b}(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t')\mathbf{S}'_b, \qquad (2)$$

где $\hat{\mathbf{G}}_{uu}, \hat{\mathbf{G}}_{ub}, \hat{\mathbf{G}}_{bu}, \hat{\mathbf{G}}_{bb}$ — тензоры второго ранга; $\mathbf{G}_{\rho u}$, $\mathbf{G}_{u\rho}$, $\mathbf{G}_{\rho b}$, $\mathbf{G}_{b\rho}$ — тензоры первого ранга; $G_{\rho\rho}$ — тензор нулевого ранга.

Представление решения в виде (2) следует из утверждения, что всякий тензор может быть представлен в виде суммы трех диад [4], это особого рода тензор, формально обозначающийся в виде скалярного произведения $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$, записанного в (2) справа.

Решение $\hat{\Gamma}_u$, $\hat{\Gamma}_b$, $\hat{\Gamma}_\rho$ будем искать в виде преобразования Фурье–Лапласа с неизвестными весовыми функциями $\hat{\mathbf{g}}_u(q,\mathbf{p})$, $\hat{\mathbf{g}}_b(q,\mathbf{p})$, $\hat{g}_\rho(q,\mathbf{p})$

$$\begin{Bmatrix} \hat{\Gamma}_u(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t') \\ \hat{\Gamma}_b(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t') \\ \hat{\Gamma}_\rho(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t') \end{Bmatrix} = \frac{1}{(2\pi)^4}\int_c dq \int_\infty \exp[-iq(t-t') + i\mathbf{p}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')] \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{g}}_u(q,\mathbf{p}) \\ \hat{\mathbf{g}}_b(q,\mathbf{p}) \\ \hat{g}_\rho(q,\mathbf{p}) \end{Bmatrix} d\mathbf{p}. \quad (3)$$

Здесь q пробегает в бесконечных пределах параллельно действительной оси $(\mathrm{Re}\,q)$ комплексной плоскости q. Подставив (3) в (1), получим следующую систему уравнений относительно весовых функций $\hat{\mathbf{g}}_u$, $\hat{\mathbf{g}}_b$, $\hat{g}_\rho$:

$$\begin{gathered} \{(\mathbf{U}_1\mathbf{p})-q\}\hat{\mathbf{g}}_u + V_{s1}^2\mathbf{p}\hat{g}_\rho + \frac{1}{4\pi\rho_1}[\mathbf{B}_1[\mathbf{p}\hat{\mathbf{g}}_b]] = -i\mathbf{S}_u, \\ \{(\mathbf{U}_1\mathbf{p})-q\}\hat{\mathbf{g}}_b - \mathbf{U}_1(\mathbf{p}\hat{\mathbf{g}}_b) + [\mathbf{p}[\mathbf{B}_1\hat{\mathbf{g}}_u]] = -i\mathbf{S}_b, \\ \{(\mathbf{U}_1\mathbf{p})-q\}\hat{g}_\rho + \rho_1(\mathbf{p}\hat{\mathbf{g}}_u) = -iS_\rho. \end{gathered} \quad (4)$$

После тривиальных преобразований найдем следующее уравнение для $\hat{\mathbf{g}}_u$:

$$\begin{aligned} &\hat{\mathbf{g}}_u((\mathbf{U}_1\mathbf{p}-q)^2 - V_{A1}^2(\mathbf{s}_1\mathbf{p})^2) - (V_{s1}^2+V_{A1}^2)\mathbf{p}(\mathbf{p}\hat{\mathbf{g}}_u) \\ &+ V_{A1}^2\mathbf{p}(\mathbf{s}_1\hat{\mathbf{g}}_u)(\mathbf{s}_1\mathbf{p}) + V_{A1}^2\mathbf{s}_1(\mathbf{s}_1\mathbf{p})(\mathbf{p}\hat{\mathbf{g}}_u) \\ &= \hat{\varepsilon}_u(\mathbf{U}_1\mathbf{p}-q) - \frac{V_{s1}^2\mathbf{p}\varepsilon_\rho}{\rho_1} + \Big\{(\mathbf{p}\hat{\varepsilon}_b)[\mathbf{B}_1[\mathbf{p}\mathbf{U}_1]] - [\mathbf{B}_1[\mathbf{p}\hat{\varepsilon}_b]]\Big\}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $V_{A1}^2 = B_1^2/4\pi\rho_1$ — альфвеновская скорость, $\mathbf{s}_1 = \mathbf{B}_1/B_1$.

Для дальнейшего важно введение базиса $\langle\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\rangle$, непосредственно связанного с выделенным направлением невозмущенного магнитного поля $\mathbf{s}_1$, а именно $\mathbf{e}_2 = \mathbf{s}_1$. Это естественным образом напоминает о наличии анизотропии магнитогидродинамической среды по отношению к невозмущенному магнитному полю. Во введенном базисе соотношение (5) записывается в матричном виде следующим образом

$$\hat{A}\hat{\mathbf{g}}_u = \hat{\Omega}, \quad (6)$$

где

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} q'^2 - V_{A1}^2(\mathbf{s}_1\mathbf{p})^2 - (V_{s1}^2+V_{A1}^2)p_1 & -V_{s1}^2 p_1 p_2 & -(V_{s1}^2+V_{A1}^2)p_1p_3 \\ -V_{s1}^2 p_1p_2 & q'^2 - V_{s1}^2p_2^2 & -V_{s1}^2p_2p_3 \\ -(V_{s1}^2+V_{A1}^2)p_3p_1 & -V_{s1}^2p_2p_3 & q'^2 - V_{A1}^2(\mathbf{s}_1\mathbf{p})^2 - (V_{s1}^2+V_{A1}^2)p_3^2 \end{pmatrix},$$

$$\hat{\Omega} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{u1}q' - \frac{V_{s1}^2\varepsilon_\rho p_1}{\rho_1} + \frac{1}{4\pi\rho_1}\Big[\varepsilon_{b1}p_2 - \varepsilon_{b2}p_1 + (\mathbf{p}\hat{\varepsilon}_b)(p_1\mathbf{U}_1\mathbf{B}_1 - U_{11}p_2B_1)\Big] \\ \varepsilon_{u2}q' - \frac{V_{s1}^2\varepsilon_\rho p_2}{\rho_1} + \frac{1}{4\pi\rho_1}\Big[\varepsilon_{b2}p_2 - \varepsilon_{b2}p_2 + (\mathbf{p}\hat{\varepsilon}_b)(p_2\mathbf{U}_1\mathbf{B}_1 - U_{12}p_2B_1)\Big] \\ \varepsilon_{u3}q' - \frac{V_{s1}^2\varepsilon_\rho p_3}{\rho_1} + \frac{1}{4\pi\rho_1}\Big[\varepsilon_{b3}p_2 - \varepsilon_{b2}p_3 + (\mathbf{p}\hat{\varepsilon}_b)(p_3\mathbf{U}_1\mathbf{B}_1 - U_{13}p_2B_1)\Big] \end{pmatrix},$$

$q' = \mathbf{U}_1\mathbf{p} - q$; $\hat{\mathbf{g}}_u = \{g_{u1}, g_{u2}, g_{u3}\}$; $\hat{\mathbf{g}}_b = \{g_{b1}, g_{b2}, g_{b3}\}$; $\mathbf{p} = \{p_1, p_2, p_3\}$; $\mathbf{U}_1 = \{U_{11}, U_{12}, U_{13}\}$.

Решение системы (6) представимо в виде

$$\hat{\mathbf{g}}_u = \frac{1}{\det\hat{A}}\hat{A}^c\hat{\Omega},$$

где матрица $\hat{A}^c$ имеет следующие элементы $\hat{A}^c = \|A_{ij}\|_{i,j=1,2,3}$

$$\begin{gathered} A_{11} = q'^4 - \big[q'^2(V_{A1}^2+V_{s1}^2) + V_{A1}^2V_{s1}^2p_2^2\big](p_2^2+p_3^2), \\ A_{12} = A_{21} = V_{s1}^2p_1p_2\big(q'^2 - V_{A1}^2(\mathbf{s}_1\mathbf{p})^2\big), \\ A_{13} = A_{31} = \big[q'^2(V_{A1}^2+V_{s1}^2) - V_{A1}^2V_{s1}^2(\mathbf{s}_1\mathbf{p})^2\big]p_1p_3, \\ A_{22} = \big[q'^2 - V_{A1}^2p^2 - V_{s1}^2(p_1^2+p_3^2)\big]\big(q'^2 - V_{A1}^2(\mathbf{s}_1\mathbf{p})^2\big), \\ A_{23} = A_{32} = V_{s1}^2p_2p_3\big(q'^2 - V_{A1}^2(\mathbf{s}_1\mathbf{p})^2\big), \\ A_{33} = q'^4 - \big[q'^2(V_{A1}^2+V_{s1}^2) + V_{A1}^2V_{s1}^2(\mathbf{s}_1\mathbf{p})^2\big](p_2^2+p_1^2), \end{gathered} \quad (7)$$

а ее определитель равен

$$\begin{aligned} \det\hat{A} = &\big[(q-\mathbf{p}\mathbf{U}_1)^2 - V_{A1}^2(\mathbf{s}_1\mathbf{p})^2\big]\big[(q-\mathbf{p}\mathbf{U}_1)^4 \\ &- (V_{A1}^2+V_{s1}^2)(q-\mathbf{p}\mathbf{U}_1)^2\mathbf{p}^2 + V_{A1}^2V_{s1}^2\mathbf{p}^2(\mathbf{s}_1\mathbf{p})^2\big]. \end{aligned} \quad (8)$$

Для того чтобы полученное решение привести к виду (2), представим $\hat{\Omega}$ в виде суммы диад

$$\begin{aligned} \hat{\Omega} = &\hat{\varepsilon}_u(q-\mathbf{p}\mathbf{U}_1) - \frac{V_{s1}^2\hat{\varepsilon}_\rho}{\rho_1}\mathbf{p} + \frac{1}{4\pi\rho_1}(\mathbf{s}_1\mathbf{p})\hat{\varepsilon}_b \\ &+ \frac{1}{4\pi\rho_1}\begin{pmatrix} 0 & -p_1 & 0 \\ 0 & -p_2 & 0 \\ 0 & -p_3 & 0 \end{pmatrix}\hat{\varepsilon}_b \\ &+ \frac{1}{4\pi\rho_1 q}[\mathbf{p}(\mathbf{U}_1\mathbf{B}_1) - \mathbf{U}_1B_1(\mathbf{s}_1\mathbf{p})]\mathbf{p}\hat{\varepsilon}_b. \end{aligned}$$

Отсюда весовая функция тензора первого ранга $\hat{G}_{u\rho}$ примет вид

$$\hat{\mathbf{g}}_{u\rho} = -\frac{V_{s1}^2}{\rho_1}\,\frac{\hat{A}^c\mathbf{p}}{\det\hat{A}},$$

а весовые функции тензоров второго ранга $\hat{G}_{uu}$ и $\hat{G}_{ub}$ будут соответственно равны

$$\hat{\mathbf{g}}_{uu} = (q-\mathbf{p}\mathbf{U}_1)\frac{\hat{A}^c}{\det\hat{A}},$$

$$\hat{\mathbf{g}}_{ub} = \frac{1}{4\pi\rho_1}\frac{\hat{A}^c}{\det\hat{A}}\left\{\mathbf{s}_1\mathbf{p} - \begin{pmatrix} 0 & p_1 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & p_3 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{q}\left[\mathbf{p}(\mathbf{U}_1\mathbf{B}_1) - \mathbf{U}_1 B_1(\mathbf{s}_1\mathbf{p})\right]\mathbf{p}\right\}.$$

Аналогично находятся весовые функции остальных тензоров в (2).

Для краткости в полном развернутом виде выпишем только тензор второго ранга $\hat{\mathbf{G}}_{uu}$

$$\hat{\mathbf{G}}_{uu}(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t') = \hat{\mathbf{F}}_{uu}\mathbf{I}(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t'),$$
$$\hat{\mathbf{F}}_{uu} = \|F_{ij}\|_{i,j=1,2,3}, \qquad (9)$$

где элементы дифференциального оператора $\hat{\mathbf{F}}_{uu}$ следующие:

$$F_{11} = \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{U}_1\nabla\right)^4 - \left[-(V_{A1}^2 + V_{s1}^2)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{U}_1\nabla\right)^2 - V_{A1}^2 V_{s1}^2\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right] \times \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\right]\left(\frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{U}_1\nabla\right),$$

$$F_{22} = \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{U}_1\nabla\right)^2 - V_{A1}^2\Delta - V_{s1}^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\right] \times \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{U}_1\nabla\right)^2 - V_{A1}^2\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right]\left(\frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{U}_1\nabla\right),$$

$$F_{33} = \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{U}_1\nabla\right)^4 - \left[(V_{A1}^2 + V_{s1}^2)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{U}_1\nabla\right)^2 - V_{A1}^2 V_{s1}^2\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right] \times \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right)\right]\left(\frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{U}_1\nabla\right),$$

$$F_{12} = F_{21} = V_{s1}^2\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{U}_1\nabla\right)^2 - V_{A1}^2\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right] \times \left(\frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{U}_1\nabla\right)\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2},$$

$$F_{23} = F_{32} = V_{s1}^2\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{U}_1\nabla\right)^2 - V_{A1}^2\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right] \times \left(\frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{U}_1\nabla\right)\frac{\partial^2}{\partial x_3\partial x_2},$$

$$F_{13} = F_{31} = \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{U}_1\nabla\right)^2(V_{A1}^2 + V_{s1}^2) - V_{s1}^2 V_{A1}^2\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right] \times \left(\frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{U}_1\nabla\right)\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_3},$$

а преобразование Фурье–Лапласа, зависящее от сдвига пространственных и временны́х переменных, получено в виде

$$I(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t') = \frac{1}{(2\pi)^4}\int\limits_{-\infty+i\sigma_0}^{\infty+i\sigma_0}\exp[-iq(t-t')]\,dq \times \iiint\limits_{\infty}\frac{\exp[i\mathbf{p}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')]}{\Delta(\mathbf{p},q)\delta(\mathbf{p},q)}\,d\mathbf{p}. \qquad (10)$$

Как видно из (10), в пространственно-временно́м выражении для функции Грина интегрирование проводится в бесконечных пределах. И для вычисления интеграла необходимо задать способ обхода полюсов, лежащих на пути интегрирования. Полюса имеют место при тех значениях $\mathbf{p}, q$, для которых выполняются дисперсионные магнитогидродинамические уравнения

$$\Delta(\mathbf{p},q) = (q - \mathbf{U}_1\mathbf{p})^4 - (V_{s1}^2 + V_{A1}^2)(q - \mathbf{U}_1\mathbf{p})^2\mathbf{p}^2 + V_{A1}^2 V_{s1}^2\mathbf{p}^2(\mathbf{s}_1\mathbf{p})^2 = 0,$$
$$\delta(\mathbf{p},q) = (q - \mathbf{U}_1\mathbf{p})^2 - V_{A1}^2(\mathbf{s}_1\mathbf{p})^2 = 0. \qquad (11)$$

Эти полюсы соответствуют реально существующим в движущейся МГД среде свободным магнитогидродинамическим волнам. В случае незатухающих волн полюсы лежат на действительной оси. Поскольку уравнения (1) для функции Грина являются дифференциальными уравнениями первого порядка в частных производных, то они имеют несколько линейно независимых решений. И из интегральной записи (10) можно получить все эти решения соответствующим выбором обхода полюсов. Рассматриваемая функция Грина описывает поле, возникающее в результате мгновенного точечного источника, расположенного в точке с радиусом-вектором $\mathbf{r}'$. Естественно потребовать, чтобы до момента включения источника $t = t'$ поле было тождественно равно нулю. Это требование определяет правила обхода полюсов при интегрировании выражения (10). Действительно, для того чтобы функция Грина обращалась в нуль при $t < t'$, необходимо при интегрировании по q все полюсы, возникающие на пути интегрирования, обходить сверху. Следует заметить, что тем самым мы автоматически выполняем принцип Мандельштама [5], согласно которому поток энергии на бесконечности направлен от источника. Это требование накладывает условие на групповую скорость, в то время как принцип Зоммерфельда, требующий наличия только расходящихся волн, накладывает условие на фазовую скорость волн, которая, вообще говоря, не совпадает с групповой. Т. е. принцип Зоммерфельда не всегда является достаточным требованием, особенно если рассматриваются движущиеся среды.

Таким образом, функция Грина уравнений магнитной гидродинамики для движущихся сред в общем случае является тензорной функцией положения двух точек: точки наблюдения $\mathbf{r}$ и точки источника $\mathbf{r}'$, для которой выписаны все ее спектральные компоненты (9).

Известно, что дисперсионные уравнения для плоских монохроматических магнитогидродинамических волн эквивалентны условиям обращения в нуль знаменателя (11) в разложении Фурье–Лапласа для функции Грина. Они имеют следующий вид для магнитозвуковых:

$$(\omega - \mathbf{U}_1\mathbf{k})^4 - (V_{s1}^2 + V_{A1}^2)(\omega - \mathbf{U}_1\mathbf{k})^2\mathbf{k}^2 + V_{A1}^2 V_{s1}^2 \mathbf{k}^2(\mathbf{s}_1\mathbf{k})^2 = 0 \tag{12}$$

и для альфвеновских волн:

$$(\omega - \mathbf{U}_1\mathbf{k})^2 - V_{A1}^2(\mathbf{s}_1\mathbf{k})^2 = 0. \tag{13}$$

Видно, что в дисперсионные уравнения (12), (13) входит скалярное произведение $(\mathbf{U}_1\mathbf{k})$ волнового вектора $\mathbf{k}$ на невозмущенную скорость перемещения среды $\mathbf{U}_1$. Это означает, что закон распространения волн в движущейся среде зависит от угла между направлениями волнового вектора и скорости среды. Это лишний раз подчеркивает известную истину, что движущаяся среда обладает анизотропией по отношению к выделенному направлению скорости движения среды. Но наличие скалярного произведения $(\mathbf{s}_1\mathbf{k})$ волнового вектора $\mathbf{k}$ на направление невозмущенного магнитного поля $\mathbf{s}_1$ говорит о том, что скорость распространения зависит от направления ее распространения по отношению к магнитному полю, т. е. налицо магнитная анизотропия. В итоге имеются две явно выделенные оси анизотропии: магнитная и скоростная, что значительно усложняет исследование МГД волн в движущихся средах.

Дисперсионные уравнения (12), (13) описывают три моды волнового движения, вызванные различными восстанавливающими силами. Магнитное натяжение приводит к появлению альфвеновских волн (13). В результате совместного действия магнитного давления и давления проводящей жидкости образуются две магнитозвуковые волны (ускоренная и замедленная) (12). Иная природа этих волн в сравнении со звуковыми и электромагнитными представляет несомненный интерес как к непосредственному изучению, так и к рассмотрению их рассеивания на различных препятствиях. При решении краевой МГД задачи в дифференциальной постановке локальные граничные и начальные условия могут удовлетворяться либо волнами одной и той же моды колебаний, либо для их удовлетворения требуется привлечение нескольких мод. При интегральной постановке этот непростой вопрос решается автоматически. Это обусловлено самой физикой рассматриваемого явления. Механизм появления в среде рассеянных волн сводится к возникновению в ней под действием основной волны индуцированных источников, приводящих к излучению новых (вторичных) рассеянных волн, интерференция которых и дает требуемые моды колебаний, что лежит в основе принципа погашения [1] магнитной гидродинамики. Наличие найденной функции Грина (9), всегда предполагающее представление исходных дифференциальных уравнений в интегральной форме, и использование дополнительного утверждения — принципа погашения приводят к новому формализму решению краевых задач методом интегральных уравнений линейной магнитной гидродинамики.

Как уже отмечалось, функция Грина допускает наглядное толкование, описывая распределение полей или возмущений от порождающих их сосредоточенных источников. Для получения же поля, порожденного некоторым распределением источников, эффект от каждой его элементарной части суммируется. Таким образом приходим к интегральному уравнению, построение которого в пространстве обобщенных функций можно провести по следующей схеме.

Пусть в МГД пространстве, заданном параметрами $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{U}_1$, V_{A1}, V_{s1}, ρ_1, имеется некоторая неоднородность объема $V(t)$, характеризуемая параметрами $\mathbf{B}_2$, $\mathbf{U}_2$, V_{A2}, V_{s2}, ρ_2. С помощью характеристической функции

$$\chi = \chi(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} 1, & \mathbf{r} \in V(t) \\ 0, & \mathbf{r} \notin V(t) \end{cases},$$

уравнения (1) распространяем на все рассматриваемое МГД пространство следующим образом:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{U}_1\nabla)\mathbf{u} + \frac{V_{s1}}{\rho_1}\nabla\tilde{\rho} + \frac{1}{4\pi\rho_1}[\mathbf{B}_1 \mathrm{rot}\,\mathbf{b}] = \mathbf{W}_u,$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} - \mathrm{rot}\,[\mathbf{U}_1\mathbf{b}] + \mathrm{rot}\,[\mathbf{B}_1\mathbf{u}] = \mathbf{W}_b,$$

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \rho_1 \mathrm{div}\,\mathbf{u} + \mathrm{div}\,(\tilde{\rho}\mathbf{U}_1) = W_\rho. \tag{14}$$

Здесь

$$\mathbf{W}_u = \chi\Big\{(\mathbf{U}_1 - \mathbf{U}_2, \nabla)\mathbf{u} + (V_{s1}^2 - V_{s2}^2)\nabla\tilde{\rho} + \left[\frac{\mathbf{B}_1}{4\pi\rho_1} - \frac{\mathbf{B}_2}{4\pi\rho_2}, \mathrm{rot}\,\mathbf{b}\right]\Big\},$$

$$\mathbf{W}_b = \chi\,\{\mathrm{rot}\,[\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2, \mathbf{u}] - \mathrm{rot}\,[\mathbf{U}_1 - \mathbf{U}_2, \mathbf{b}]\},$$

$$W_\rho = \chi\,\{(\rho_1 - \rho_2)\mathrm{div}\,\mathbf{u} + \mathrm{div}\,\tilde{\rho}(\mathbf{U}_1 - \mathbf{U}_2)\},$$

тогда решение неоднородной системы (14) будет иметь вид

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \int dt' d\mathbf{r}' \{\hat{\mathbf{G}}_{u\rho}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')W_\rho(\mathbf{r}', t') + \hat{\mathbf{G}}_{uu}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \cdot \mathbf{W}_u(\mathbf{r}', t') + \hat{\mathbf{G}}_{ub}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \cdot \mathbf{W}_b(\mathbf{r}', t')\},$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{r}, t) = \int dt' d\mathbf{r}' \{\hat{\mathbf{G}}_{b\rho}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')W_\rho(\mathbf{r}', t') + \hat{\mathbf{G}}_{bu}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \cdot \mathbf{W}_u(\mathbf{r}', t') + \hat{\mathbf{G}}_{bb}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \cdot \mathbf{W}_b(\mathbf{r}', t')\},$$

$$\tilde{\rho}(\mathbf{r},t) = \int dt'd\mathbf{r}'\{\hat{G}_{\rho\rho}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t')W_\rho(\mathbf{r}',t') + \hat{\mathbf{G}}_{\rho u}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t')\cdot\mathbf{W}_u(\mathbf{r}',t') + \hat{\mathbf{G}}_{\rho b}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t')\cdot\mathbf{W}_b(\mathbf{r}',t')\}. \quad (15)$$

Интегрирование в (15) ведется по всему пространству, занятому полем, и по бесконечному промежутку времени. Соотношения (15) представляют собой интегрально-диференциальные уравнения магнитной гидродинамики, по структуре представляющие собой свертку. Благодаря свойству последней дифференциальные операции можно вынести за знак интеграла с учетом его зависимости от параметра и получить интегральные уравнения линейной магнитной гидродинамики в движущейся среде. Данная работа не преследует эту цель, а соответствующие частные случаи интегральных уравнений были рассмотрены в [6].

Вернемся к найденной функции Грина. Как видно из соотношения (10), в знаменателе этой функции стоит произведение выражений $\Delta(\mathbf{p},q)$; $\delta(\mathbf{p},q)$ (11), каждое из которых представляет собой дисперсионное уравнение для магнитозвуковых и альфвеновских волн. Т. е. в общем случае компоненты весовых функций ($\hat{\mathbf{g}}_{uu}$) для альфвеновских и магнитозвуковых волн взаимно переплетаются. Оказывается, однако, что для некоторого класса задач, рассматривающих дифракцию МГД волн на плоскопараллельных рассеивающих структурах или в случае цилиндрических областей при определенной ориентации невозмущенного магнитного поля, компоненты весовой функции могут распадаться на две: альфвеновскую и магнитозвуковую. Это подтверждается работой [3], в которой построена функция Грина для частного одномерного случая задания магнитного поля, и связано с инвариантностью функции Грина относительно выбора координатного базиса $\langle\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\rangle$, который мы привязали к невозмущенному магнитному полю. Допустив, что один из базисных векторов постоянен и фиксирован ($\mathbf{e}_2 = \mathbf{s}_1$), получаем, что функция Грина инвариантна поверхности, поперечной вектору $\mathbf{e}_2$. Это связано с хорошо известным фактом, что если в уравнения для тензорной функции Грина свободного пространства (1) входят лишь операторы Гамильтона, то, как следствие, такие функции инвариантны относительно выбора координатного базиса [7]. Тогда функцию Грина (9) можно представить в виде

$$\hat{\mathbf{G}}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t') = \begin{pmatrix} G_A & 0 \\ 0 & G_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{11} & 0 & 0 \\ 0 & G_{22} & G_{23} \\ 0 & G_{32} & G_{33} \end{pmatrix},$$

т. е. произошло разделение на альфвеновскую G_A и магнитозвуковую G_M компоненты. При этом в [1] было получено явное выражение для G_A в отсутствие невозмущенного движения среды

$$G_A = \frac{1}{2V_{A1}}\delta(x_1-x_1')\delta(x_2-x_2')\Theta\left(t-t'-\frac{|x_3-x_3'|}{V_{A1}}\right),$$

где $\Theta(t)$ — функция Хевисайда.

В случае же нулевого газового давления, когда $V_s \equiv 0$ функция Грина (13) еще более упрощается, она становится равной

$$\hat{\mathbf{G}}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \begin{pmatrix} G_A & 0 & 0 \\ 0 & (V_{A1}^2\Delta+\omega^2)F & 0 \\ 0 & 0 & \omega F \end{pmatrix},$$

где

$$G_A = \frac{1}{2V_{A1}}\delta(x_1-x_1')\delta(x_2-x_2')\exp\left(\frac{-i\omega|x_3-x_3'|}{V_{A1}}\right),$$

$$F = \frac{\exp\left[-i\omega|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/V_{A1}\right]}{4\pi V_{A1}^2\omega^2|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}.$$

Отсюда видно, что на альфвеновскую компоненту параметр V_s не влияет, а магнитозвуковые компоненты G_{22}, G_{33} напоминают функцию Грина макроскопической электродинамики [8].

Из найденного фундаментального решения (9) легко получить известную из литературы акустическую функцию Грина, которая является частным случаем рассматриваемой задачи.

При отсутствии магнитного поля ($\mathbf{B} \equiv 0$) и невозмущенного движения среды ($\mathbf{U}_1 \equiv 0$) функция $I(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ приобретает вид

$$I(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \frac{1}{2\pi}\int\limits_\infty \frac{\exp\left(i\mathbf{p}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\right)}{\omega^2 - V_{s1}^2p^2}d\mathbf{p}$$

и легко вычисляется согласно теореме о вычетах

$$I(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi V_{s1}^2}\frac{\exp\left(-i\omega|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/V_{s1}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|},$$

а компоненты дифференциального оператора $\tilde{\mathbf{F}}_{uu}$ упрощаются следующим образом:

$$1+\frac{V_{s1}^2}{\omega^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right), \quad -\frac{V_{s1}^2}{\omega^2}\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}, \quad -\frac{V_{s1}^2}{\omega^2}\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_3},$$

$$-\frac{V_{s1}^2}{\omega^2}\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}, \quad 1+\frac{V_{s1}^2}{\omega^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right), \quad -\frac{V_{s1}^2}{\omega^2}\frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_3},$$

$$-\frac{V_{s1}^2}{\omega^2}\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_3}, \quad -\frac{V_{s1}^2}{\omega^2}\frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_3}, \quad 1+\frac{V_{s1}^2}{\omega^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right),$$

что окончательно можно записать в виде

$$\hat{\mathbf{G}}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \left(\hat{\varepsilon} - \frac{V_{s1}^2}{\omega^2}\nabla\times\nabla\times\hat{\varepsilon}\right)I(\mathbf{r}-\mathbf{r}').$$

Здесь $\hat{\varepsilon}$ — единичный аффинор. Эта функция была получена в [9] при выводе интегральных уравнений акустики неоднородной жидкости. Временна́я зависимость рассматривается как $\exp(i\omega t)$.

Список литературы

[1] *Александрова А.А., Хижняк Н.А.* Краевые задачи магнитной гидродинамики. Харьков: Тест-радио ЛТД, 1993. 230 с.

[2] *Александрова А.А., Александров Ю.Н.* // ЖТФ. 1997. Т. 67. Вып. 5, С. 6–11.

[3] *Harold Wetzner.* // The physics of Fluids. 1961. Vol. 4. N 10. P. 1238–1245.

[4] *Кочин Н.Е.* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М.: АН СССР, 1951. 426 с.

[5] *Мандельштам Л.И.* Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. М.: Наука, 1971.

[6] *Александрова А.А.* // Зарубежная радиоэлектроника: Успехи современной радиоэлектроники. 1999. № 3. С. 25–41.

[7] *Фелсен Л., Маркувиц Н.* Излучение и рассеяние волн. М.: Мир, 1978. Т. 1. 547 с.

[8] *Хижняк Н.А.* Интегральные уравнения макроскопической электродинамики. Киев: Наукова думка, 1986. 278 с.

[9] *Виноградов А.Г., Муратов Р.З.* // ДАН СССР. 1976. Т. 226. № 2. С. 310–314.