

01;05;12

Отражение солитона продольной деформации от торца нелинейно-упругого стержня

© Г.В. Дрейден, А.В. Порубов, А.М. Самсонов, И.В. Семенова

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,
194021 Санкт-Петербург, Россия

(Поступило в Редакцию 4 июля 2000 г.)

Теоретически и экспериментально исследовано отражение уединенной волны (солитона) продольной деформации от торца нелинейно-упругого стержня. Показано, что при отражении от свободного конца происходит изменение знака амплитуды волны, в результате чего отраженная волна диспергирует и рассеивается. При заделанном конце отраженная волна имеет ту же полярность и, сохраняя свойства падающей уединенной волны, распространяется к началу стержня.

Введение

Солитон является нелинейной длинной квазистационарной локализованной волной, бегущей по поверхности раздела сред (солитон возвышения или внутренняя волна) либо внутри волновода (солитон плотности). Эта волна может распространяться на большие расстояния и переносить энергию без искажений. В однородном изотропном стержне солитон распространяется без искажений, при наличии неоднородностей его форма искажается. В частности, может иметь место фокусировка, т.е. увеличение амплитуды уединенной волны деформации при одновременном уменьшении ее ширины. Это может привести к появлению областей пластичности или трещин в волноводе. Отсюда следует практическая важность исследования свойств уединенных волн деформации для решения проблем прочности материалов, неразрушающего контроля, определения упругих свойств материалов.

В предыдущих теоретико-экспериментальных работах нами была показана возможность распространения уединенной волны деформации в стержне постоянного сечения [1,2], а также фокусировки волны в сужающемся стержне [3]. Во всех этих работах волновые процессы исследовались вдали от торцов волновода, т.е. в приближении бесконечного стержня. Однако в реальных конструкциях конечные размеры волноведущих элементов существенны, равно как и способы их соединений с другими частями конструкций. Поэтому представляется важным исследовать отражение уединенной волны деформации от торца стержня при различных условиях заделки.

Теория отражения длинной нелинейной волны деформации от торца упругого стержня

1) Постановка задачи и вывод модельного уравнения. Пусть в однородном полубесконечном изотропном стержне из нелинейно-упругого сжимаемого

материала введена система лагранжевых цилиндрических координат (x, r, φ) , причем ось x совпадает с осью стержня $\varphi \in [0, 2\pi]$, $0 \leq r \leq R$, $-\infty \leq x \leq L$. В отсутствие кручения вектор смещения точек есть $\mathbf{V} = (u, w, 0)$. Основные уравнения, описывающие эволюцию нелинейных волн в недеформированной конфигурации, получим из вариационного принципа Гамильтона

$$\delta S = \delta \int_{t_0}^{t_1} dt \left[2\pi \int_{-\infty}^L dx \int_0^R r \mathcal{L} dr + A \right] = 0, \quad (1)$$

где A есть работа внешних сил на торце стержня $x = l$.

Внутреннее интегрирование в (1) ведется в момент времени $t = t_0$, а начальное состояние стержня предполагается натуральным. Плотность лагранжиана \mathcal{L} находится по разности между плотностью K кинетической энергии и объемной плотностью Π внутренней энергии при адиабатическом деформировании

$$\mathcal{L} = K - \Pi = \frac{\rho_0}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] - \Pi(I_k). \quad (2)$$

Здесь ρ_0 — плотность материала стержня при $t = t_0$, а I_k ($k = 1, 2, 3$) суть инварианты тензора конечных деформаций Коши–Грина C . Выберем для аппроксимации удельной энергии деформации модель Мурнагана, пригодную для широкого класса нелинейно-упругих материалов [4],

$$\Pi = \frac{\lambda + 2\mu}{2} I_1^2 - 2\mu I_2 + \frac{l + 2m}{3} I_1^3 - 2m I_1 I_2 + n I_3. \quad (3)$$

Коэффициенты в (3) зависят от модулей упругости второго порядка — коэффициентов Лямэ (λ, μ) и упругих модулей третьего порядка — модулей Мурнагана (l, m, n).

Нашей целью будет исследование нелинейных продольных волн с характерными амплитудой B и длиной L , таких чтобы волна деформации была упругой $B \ll 1$, и достаточно длинной волной: $R/L \ll 1$. Эти ограничения позволяют ввести некоторые упрощения, представляющие собой связи между продольными и поперечными смещениями u и w . Получим эти соотношения исходя

из того, что на свободной боковой поверхности стержня $r = R$ в любой момент времени должны отсутствовать нормальные и касательные напряжения или компоненты P_{rr}, P_{rx} тензора Пиолы–Кирхгофа P [4]. Условие малости амплитуд волн $B \ll 1$ позволяет рассматривать "линейные" и "нелинейные" слагаемые в выражениях для функций u, w отдельно, а разложение в виде рядов по степеням r является естественным в пределе длинных волн. Тогда мы имеем

$$\begin{aligned} u &= u_L + u_{NL}, \quad u_L = u_0(x, t) + ru_1(x, t) + r^2 u_2(x, t) + \dots, \\ u_{NL} &= u_{NL_0}(x, t) + ru_{NL_1}(x, t) + \dots, \quad (4) \\ w &= w_L + w_{NL}, \quad w_L = w_0(x, t) + rw_1(x, t) + r^2 w_2(x, t) + \dots, \\ w_{NL} &= w_{NL_0}(x, t) + rw_{NL_1}(x, t) + \dots \quad (5) \end{aligned}$$

Подставляя (4), (5) в условия $P_{rr} = 0, P_{rx} = 0$ при $r = R$ и приравнявая слагаемые при одинаковых степенях r , получаем

$$\begin{aligned} u &= U(x, t) + \nu r^2 U_{xx} + \dots, \quad (6) \\ w &= -\nu r U_x - \frac{\nu^2}{2(3-2\nu)} r^3 U_{xxx} \\ &\quad - \left(\frac{\nu(1+\nu)}{2} + \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E} \left[l(1-2\nu)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2m(1+\nu) - n\nu \right] \right) r U_x^2 + \dots, \quad (7) \end{aligned}$$

где E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона.

Слагаемые более высоких порядков могут быть найдены аналогично. Однако они не изменяют вид результирующего уравнения для нелинейных продольных волн деформации, которое будет получено ниже, и поэтому здесь не приводятся. Уравнение для продольных волн деформации в размерном виде выводится при помощи принципа Гамильтона (1). Подставив в выражение для K и Π разложения (6), (7), получаем соответственно

$$K = \frac{\rho_0}{2} \left(U_t^2 + \nu r^2 [U_t U_{xtt} + \nu U_{xt}^2] \right) + \dots, \quad (8)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \left(E U_x^2 + \frac{\beta}{3} U_x^3 + \nu E r^2 U_x U_{xxx} \right) + \dots, \quad (9)$$

где $\beta = 3E + 2l(1-2\nu)^3 + 4m(1+\nu)^2(1-2\nu) + 6n\nu^2$ — параметр нелинейности.

Подставляя эти выражения в (1) и положив $\delta S = 0$, получаем нелинейное уравнение с двумя дисперсиями (УДЦ) для волны деформации $v = U_x$

$$v_{tt} - \frac{E}{\rho_0} v_{xx} - \left(\frac{\beta}{2\rho_0} (v^2) + aR^4 v_{tt} - bR^2 v_{xx} \right)_{xx} = 0, \quad (10)$$

где $a = -(\nu(1-\nu))/2, b = -\nu E/2\rho_0$.

Из принципа Гамильтона также вытекают граничные условия по x , а именно при $x \rightarrow -\infty$ стремятся к нулю v и ее производные по x и t . На другом конце $x = X$

условия зависят от способа закрепления. Если конец стержня свободен, то работа внешних сил равна нулю и мы получаем из (1)

$$v = 0, \quad v_{xx} = 0. \quad (11)$$

Для защемленного конца стержня работа внешних сил не определена, и из кинематических соображений ставятся условия равенства нулю смещения и его скорости

$$U = 0, \quad U_x = 0, \quad (12)$$

что в терминах деформаций может быть записано в виде

$$v_x = 0, \quad v_{xt} = 0. \quad (13)$$

2) Асимптотическое исследование взаимодействия уединенных волн. Для исследования отражения нелинейной волны проведем обезрамирование УДЦ (10), выбрав в качестве масштабов L для $x, L/c_0$ для $t, B/L$ для v , где $c_0 = \sqrt{E/\rho_0}$ — так называемая стержневая скорость. Введем малый параметр задачи ε , так чтобы нелинейные и дисперсионные слагаемые в УДЦ оказались одинаковыми по порядку величины,

$$\varepsilon = B = \frac{R^2}{L^2} \ll 1. \quad (14)$$

Предположим, что функция v зависит кроме x, t еще и от медленного времени $\tau = \varepsilon t$. Будем искать решение обезраженного уравнения (10) в виде ряда по целым степеням ε

$$v = v_0 + \varepsilon v_1 + \dots \quad (15)$$

Подстановка (15) в уравнение (10) и приравнение слагаемых при одинаковых степенях ε приводит для v_0 к даламберову решению

$$v_0 = v_{01}(\Theta, \tau) + v_{02}(\psi, \tau), \quad (16)$$

где $\Theta = x + t, \psi = x - t$.

В приближении ε получаем уравнение

$$\begin{aligned} 2v_{1,\Theta\psi} &= 2v_{01,\Theta\tau} - 2v_{02,\psi\tau} \\ &\quad + \frac{\beta}{2E} \left((v_{01}^2)_{\Theta\Theta} + 2v_{01,\Theta} v_{02,\psi} + (v_{02}^2)_{\psi\psi} \right) \\ &\quad + \frac{\nu^2}{2} (v_{01,\Theta\Theta\Theta\Theta} + v_{02,\psi\psi\psi\psi}). \quad (17) \end{aligned}$$

Условие отсутствия секулярных членов приводит к двум уравнениям Кортевега-де-Вриза (КдВ) для функций v_{01} и v_{02}

$$2v_{01,\tau} - \frac{\beta}{2E} (v_{01}^2)_{\Theta} - \frac{\nu^2}{2} v_{01,\Theta\Theta\Theta} = 0, \quad (18)$$

$$2v_{02,\tau} + \frac{\beta}{2E} (v_{02}^2)_{\psi} + \frac{\nu^2}{2} v_{02,\psi\psi\psi} = 0, \quad (19)$$

в то время как решение задачи первого приближения (17) есть

$$v_1 = \frac{\beta}{E} v_{01} v_{02} + v_{11}(\Theta, \tau) + v_{12}(\psi, \tau). \quad (20)$$

Подставляя известные солитонные решения уравнений КдВ [5] в выражение для нулевого приближения, получаем

$$v_0 = \frac{6E\nu^2}{\beta} k^2 \left[\operatorname{ch}^{-2}(k[x + (1 + \varepsilon\nu^2 k^2)t - x_{01}]) + \operatorname{ch}^{-2}(k[x - (1 + \varepsilon\nu^2 k^2)t - x_{02}]) \right]. \quad (21)$$

Из (21) следует, что независимо от направления распространения тип волны деформации (сжатие или растяжение) определяется только знаком коэффициента нелинейности β , зависящим от упругих свойств материала стержня. Оба условия (13) для закрепленного конца могут быть удовлетворены при $x_{02} = 2X - x_{01}$. При этом мы будем наблюдать отражение уединенной волны деформации без изменения формы. Напротив, солитонное решение (21) не удовлетворяет условиям на свободном конце стержня (11). Поэтому отраженная от конца стержня волна не будет сохранять свою форму, а рассеется вследствие дисперсии или опрокинется из-за нелинейности. Эти процессы, по-видимому, можно описать в рамках асимптотического решения, пользуясь методом обратной задачи рассеяния для уравнения КдВ [5] либо численного моделирования исходного неинтегрируемого УДД (10).

3) Численное исследование отражения волны от торца стержня. Численное моделирование УДД производилось при помощи стандартной неявной конечно-разностной схемы. Разностный аналог уравнения рассчитывался методом прогонки [6]. Ранее численные решения УДД в бесконечном стержне постоянного сечения по этой методике были получены в [7].

Реализация граничных условий на торце стержня длиной X осуществлена посредством симметричного продолжения области счета за торец стержня, т.е. мы рассчитываем область $0 < x < 2X$. Если конец стержня свободен, то в области $X < x < 2X$ УДД рассчитывается с коэффициентом нелинейности β , противоположным по знаку β УДД в области $0 < x < X$. Начальные условия берутся в виде солитонов, расположенных центрально-симметрично относительно истинного торца стержня $x = X$. Тип начального солитона выбирается в зависимости от знака β . Так, если в области $0 < x < 2X$ $\beta > 0$, то мы имеем начальный солитон растяжения, в то время как начальный солитон сжатия находится в области $X < x < 2X$. Начальные скорости солитонов задаются в направлении друг к другу. Граничное условие $v(x = X) = 0$ используется в явном виде, в то время как условие равенства нулю второй производной реализуется в численной схеме автоматически. Результаты по отражению от свободного торца стержня $0 < x < X$

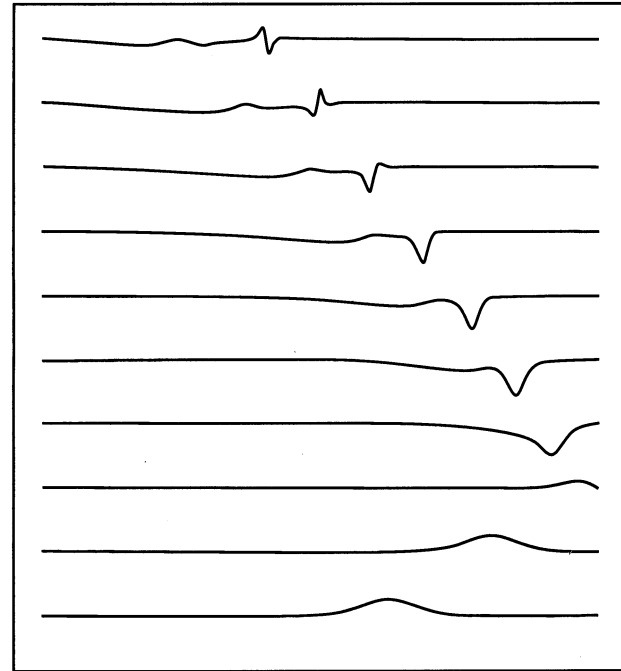


Рис. 1. Численное моделирование распада солитона продольной деформации при отражении от свободного торца стержня.

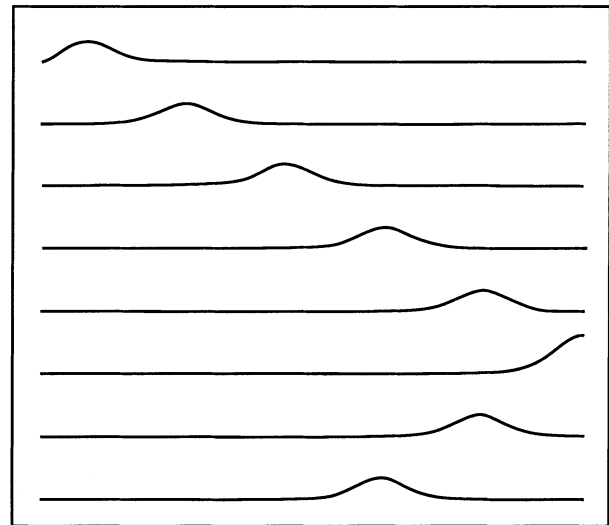


Рис. 2. Численное моделирование отражения солитона продольной деформации от зашпеченного торца стержня.

представлены на рис. 1. Правая часть рисунка соответствует свободному торцу стержня. Нижний профиль соответствует начальному моменту времени. Видно, что амплитуда набегающей слева уединенной волны уменьшается по достижению ею торца. Отраженная волна имеет противоположную полярность. Вначале ее амплитуда растет, но в дальнейшем происходит рассеяние волны за счет дисперсии. В результате локализованной волны деформации в начале стержня не наблюдается.

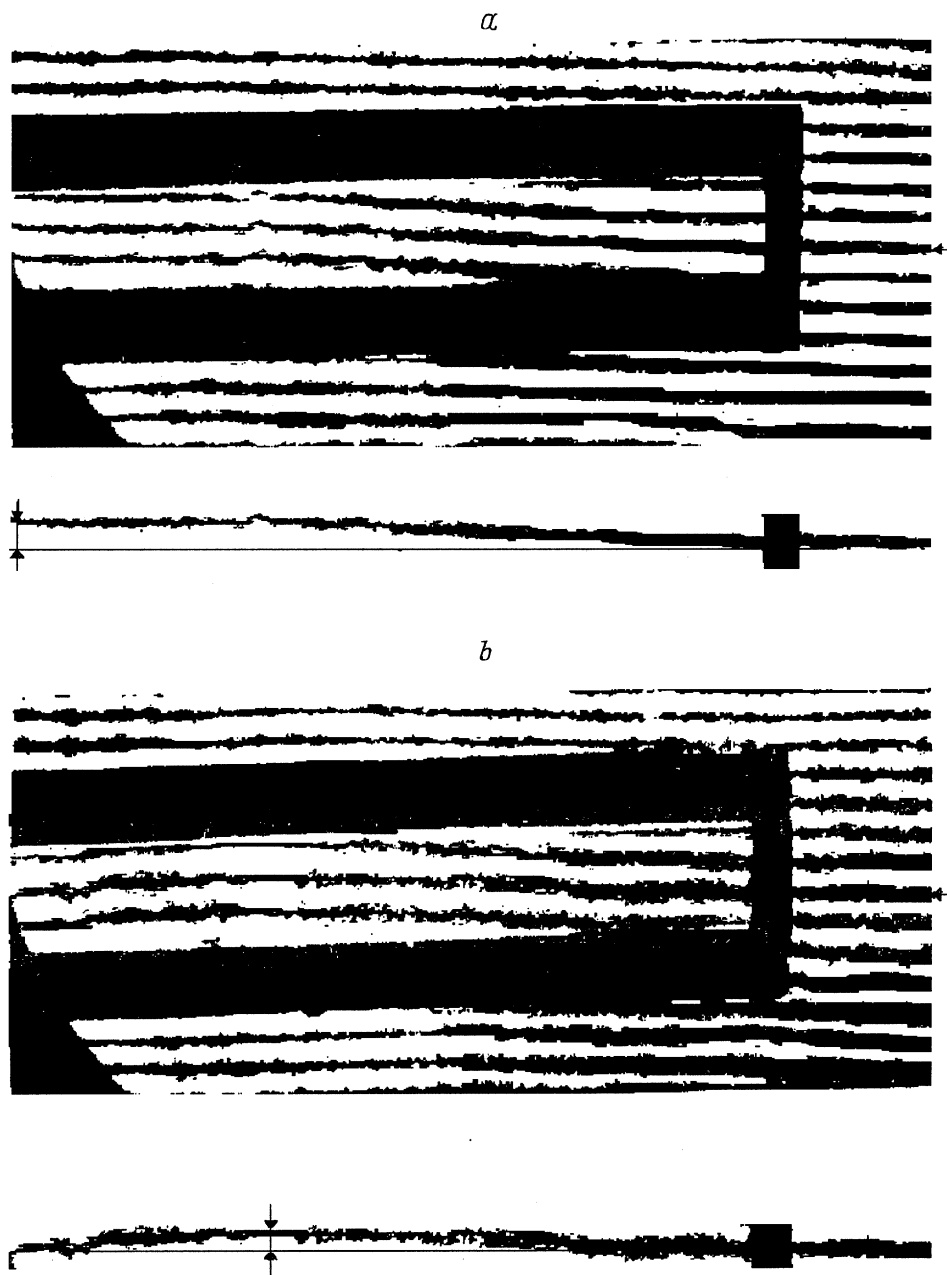


Рис. 3. Экспериментальное наблюдение распада солитона продольной деформации при отражении от свободного торца стержня.

В случае заземленного торца реализуется зеркально-симметричное продолжение в область $0 < x < 2X$. В обеих областях рассчитывается УДД с одинаковыми коэффициентами, а начальные солитоны одинаковой полярности расположены на одинаковом расстоянии от точки $x = X$. При этом граничные условия (13) реализуются автоматически. Результаты численного моделирования представлены на рис. 2. Мы видим практически удвоение амплитуды начального солитона по достижении им торца стержня. Отраженная волна имеет те же амплитуду и скорость, что и падающая. Сохраняя свою форму, она распространяется к началу стержня.

Эксперимент

1) Методика эксперимента и обработки экспериментальных данных. В качестве материала волновода был выбран прозрачный полистирол СД-3. Оптическая схема экспериментальной установки для возбуждения и регистрации солитонов деформации уже была описана нами в предыдущих работах [2,3]. Установка состоит из устройства для генерации исходной ударной волны, голографического интерферометра, служащего для регистрации волновой картины, схемы синхронизации и измерителя энергии лазерного излучения. Диаметр зондирующего пучка был равен приблизительно 50 mm.

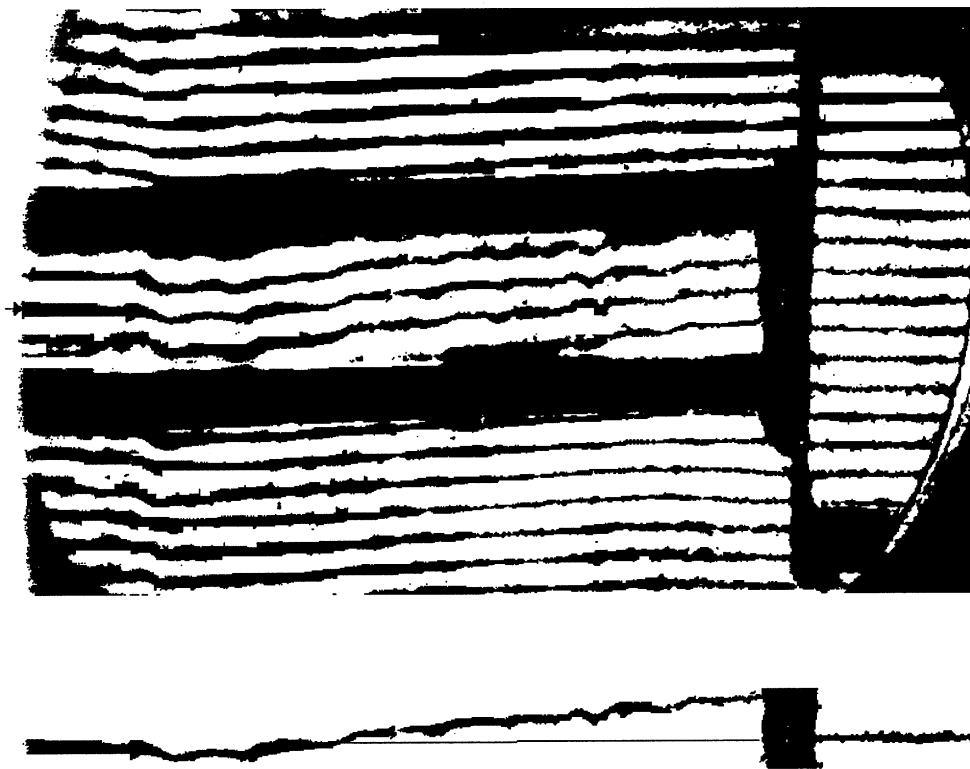


Рис. 4. Полное отражение волны деформации от торца стержня, прикрепленного к стенке из кварца.

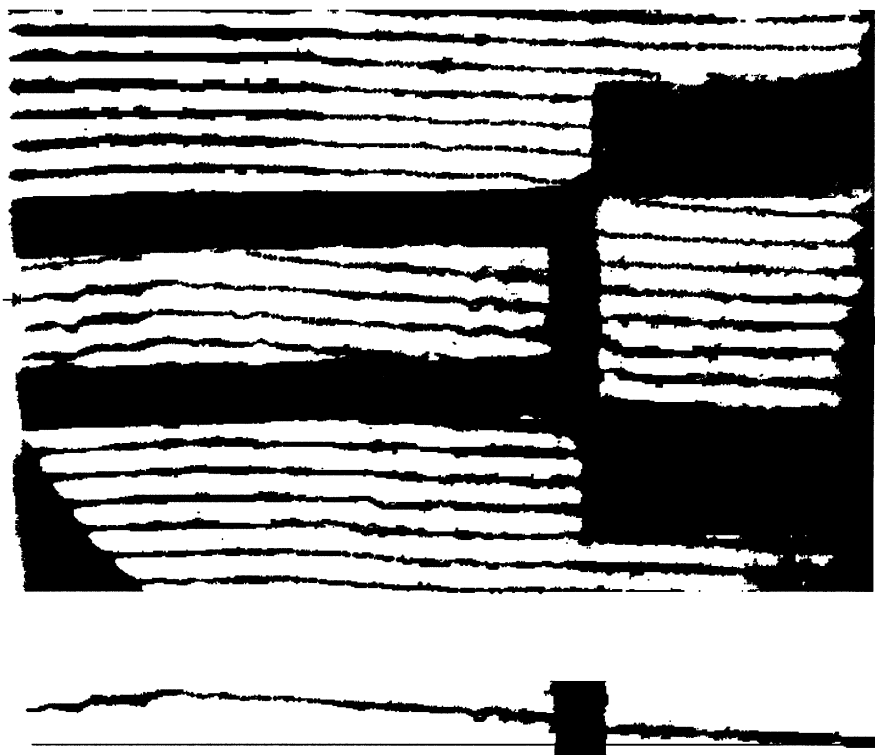


Рис. 5. Прохождение волны деформации из полистирола через границу в плексиглас.

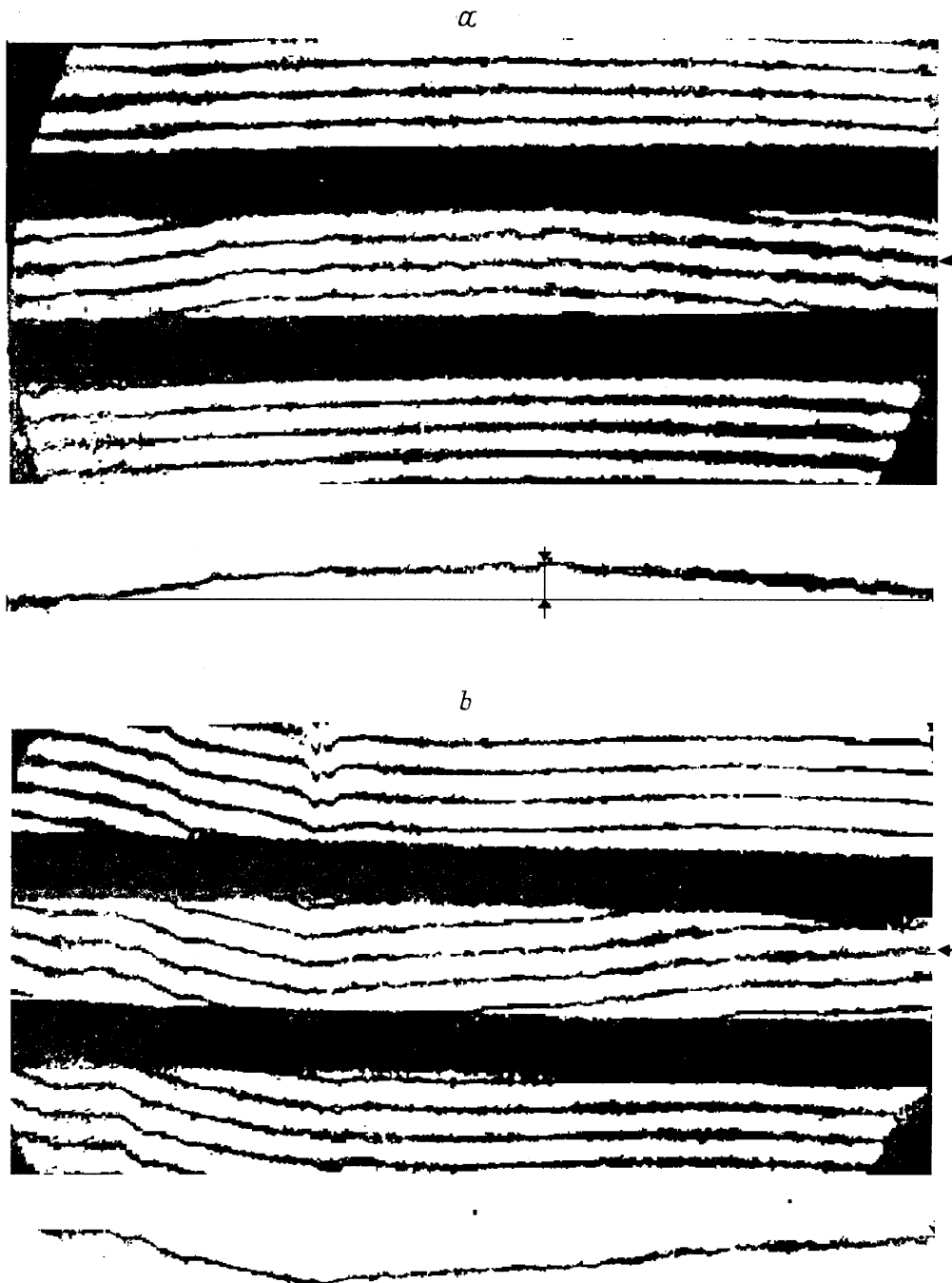


Рис. 6. Экспериментальное наблюдение отражения солитона продольной деформации от заземленного торца стержня.

Параметры солитона рассчитывались по данным обработки полученных голографических интерферограмм. Отметим, что интерференционная картина не является обычным изображением солитона деформации, поскольку последний представляет собой продольную волну плотности. Однако амплитуда солитона деформации может быть рассчитана по смещению Δk полос в интерференционной картине [3]

$$v = -\frac{\Lambda \Delta k}{2h[(n_1 - 1)(1 - 2\nu) + \nu(n_1 - n_0)]}. \quad (22)$$

Здесь $2h$ есть расстояние, проходимое светом поперек стержня; n_0, n_1 — коэффициенты преломления в воде и внутри недеформированного стержня соответственно. Амплитуда определяется по максимальному сдвигу полос. Вывод соотношения (22) показывает, что характерная ширина X уединенного импульса (солитона) может быть определена непосредственно по интерферограмме как длина возмущения интерференционной полосы. В наших экспериментах форма продольной волны деформации восстанавливается по следующим значениям

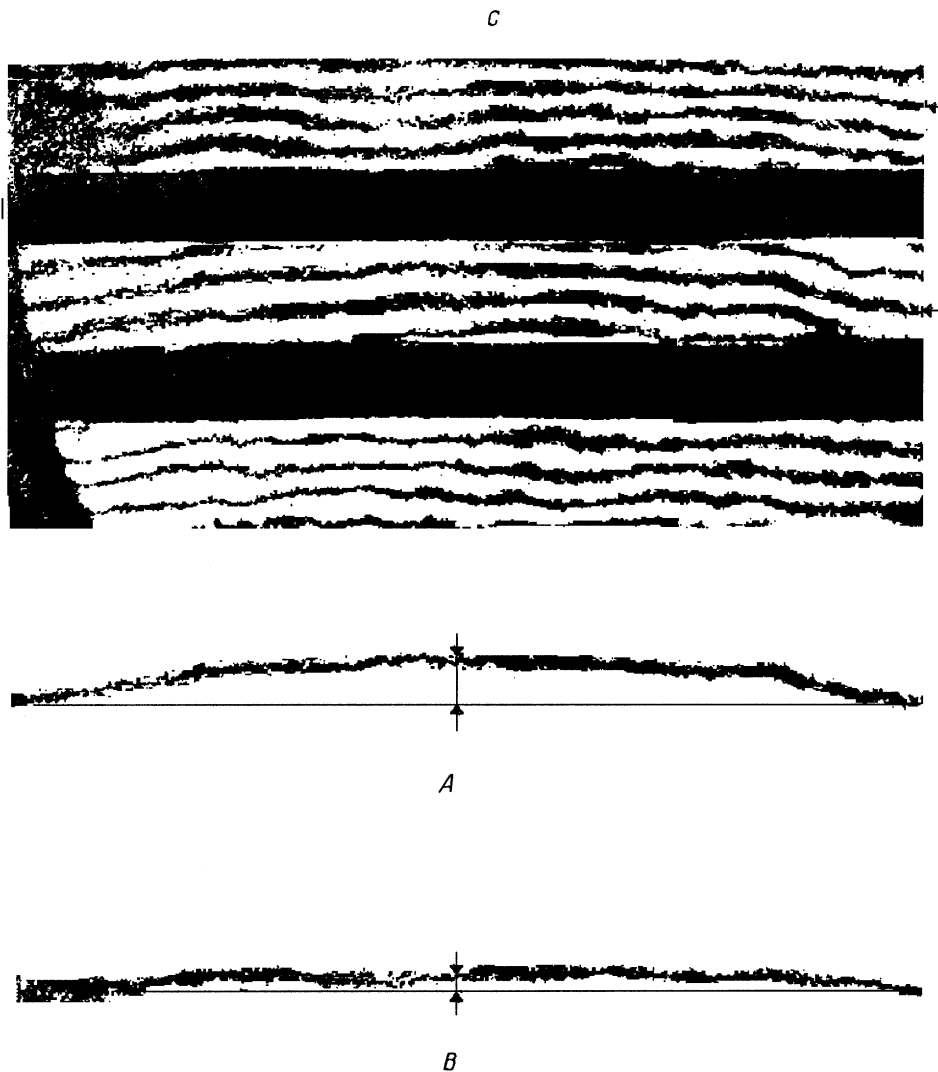


Рис. 6 (продолжение).

параметров: $n_0 = 1.33$, $n_1 = 1.6$, $\Lambda = 7 \cdot 10^{-7}$ м, $\nu = 0.35$ [8]. Поскольку для полистирола коэффициент β отрицательный, то отклонение полос вверх от горизонтального уровня, согласно формуле (22), соответствует сжатию.

2) Наблюдение отражения солитона от торца стержня. На рис. 3 представлены голографические интерферограммы отражения солитона продольной деформации от свободного торца стержня. В жидкости позади торца стержня интерференционные полосы остаются невозмущенными (горизонтальными), что служит подтверждением полного отражения падающей волны. В полном соответствии с теорией на сноске на рис. 3, *b* наблюдается уменьшение амплитуды исходной падающей волны сжатия по сравнению с зафиксированной на сноске на рис. 3, *a*. Эксперимент показывает отсутствие каких-либо локализованных волн в начале стержня. Это служит подтверждением теоретических ре-

зультатов о невозможности распространения локализованной волны растяжения в полистироле. Положение интерференционных полос, взятых на этом и последующих рисунках для анализа, указаны на интерферограммах горизонтальными стрелками сбоку.

Заделанный конец стержня был реализован в экспериментах посредством приклеивания конца стержня к латунной пластине. Для проверки возможного прохождения волны через заделанный конец в другом эксперименте мы выбрали в качестве материала стенки прозрачный кварц, чье акустическое сопротивление в 6 раз больше, чем у полистирола. На сноске голографической интерферограммы на рис. 4 хорошо видно, что волна сжатия не проникает внутрь кварца из полистирола, так как горизонтальные интерференционные полосы в кварце соответствуют невозмущенному состоянию. В то же время, заменив кварц на плексиглас с близким к полистиролу акустическим сопротивлением, мы наблю-

дали свободное прохождение волны через торец, как видно на сноске на рис. 5. Акустическое сопротивление латуни в 15 раз превышает акустическое сопротивление полистирола. Поэтому можно предположить, что вся волновая энергия отразится от торца.

На рис. 6 показан процесс отражения от стержня, прикрепленного к латунной пластине, правая часть рисунков соответствует заделке. Видно, что амплитуда исходного солитона сжатия, бегущего от начала стержня к заделке и показанного на сноске рис. 6, *a*, почти удваивается при подходе к торцу (рис. 6, *b*). На рис. 6, *c* наблюдается распространение отраженной волны сжатия вдали от заделки на расстоянии 140 mm в сторону от начала стержня. При этом окружающая стержень вода возмущена, поэтому истинное изображение волны деформации внутри стержня может быть получено путем вычитания из сдвига полос внутри стержня (*A* на рис. 6, *c*), сдвига полос вне стержня (*B*). Отсюда получаем, что амплитуда отраженной уединенной волны деформации практически равна амплитуде падающей волны на рис. 6, *a*.

Заключение

Впервые представлены результаты по наблюдению отражения уединенной волны деформации от торца нелинейно-упругого стержня при различных условиях закрепления торца. Показано, что при отражении от свободного конца происходит изменение знака амплитуды волны, в результате чего отраженная волна диспергирует и рассеивается. У заземленного конца отраженная волна имеет ту же полярность и, сохраняя все свойства падающей уединенной волны, распространяется к началу стержня.

Аналитически и численно показано, что отражение локализованной волны от заделанного конца в экспериментах происходит в полном соответствии с теорией столкновения уединенных волн. Следовательно, наблюдаемая волна обладает свойством солитона сохранять свою форму при столкновениях, что служит еще одним подтверждением того, что наблюдавшиеся нами ранее волны в стержне действительно являются солитонами деформации. Также подтверждена справедливость модели УДД для описания эволюции уединенных волн деформации в нелинейно-упругом сжимаемом стержне конечных размеров.

Работа была выполнена при финансовой поддержке ИНТАС по гранту № 99-0167.

Список литературы

- [1] Самсонов А.М. // ДАН СССР. 1988. Т. 299. С. 1083–1086.
- [2] Дрейден Г.В., Порубов А.В., Самсонов А.М. и др. // Письма в ЖТФ. 1995. Т. 21. Вып. 11. С. 42–46.
- [3] Samsonov A.M., Dreiden G.V., Porubov A.V., Semenova I.V. // Phys. Rev. B. 1998. Vol. 57. P. 5778–5787.

- [4] Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
- [5] Абловиц М., Сегюр Х. Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987. 479 с.
- [6] Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы. М.: Наука, 1973. 400 с.
- [7] Сокуринская Е.В. Канд. дис. Санкт-Петербург, 1991.
- [8] Францевич И.Н., Воронов Ф.Ф., Бакута С.А. Упругие постоянные и модули упругости металлов и неметаллов. Киев: Наукова думка, 1982. 286 с.