01;03

Линейное взаимодействие волн на заряженной границе раздела сред при наличии тангенциального разрыва поля скоростей

© С.О. Ширяева

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
E-mail: shir@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 25 февраля 2000 г.)

В рамках линейной математической модели капиллярного волнового движения в двухслойной жидкости показано, что в результате взаимодействия волн, порождаемых свободной поверхностью верхнего слоя жидкости, движущегося поступательно с постоянной скоростью параллельно границе раздела сред, и волн, порождаемых заряженной границей раздела, кроме классической неустойчивости типа Кельвина–Гельмгольца в области малых значений скорости верхней среды имеет место колебательная неустойчивость границы раздела с инкрементом, зависящим от отношения плотностей сред, скорости поступательного движения и величины заряда на границе.

Введение

Неустойчивость Кельвина–Гельмгольца заряженной границы раздела двух идеальных несмешивающихся жидкостей различных плотностей, каждая из которых заполняет полубесконечное пространство, а верхняя жидкость движется с постоянной скоростью U параллельно границе раздела, представляет интерес в связи с многочисленными приложениями в геофизике, технической физике и химической технологии [1–8] и в этой связи достаточно подробно исследована как экспериментально, так и теоретически. Тем не менее некоторые вопросы, связанные с особенностями реализации такой неустойчивости, остаются пока невыясненными. Сказанное, в частности, относится к более реалистичной ситуации, когда в отличие от классической идеализированной схемы верхняя жидкость имеет конечную толщину. Эта ситуация представляет интерес и в связи с проблемой раскачки ветром волн на поверхности воды. Неустойчивость Кельвина–Гельмгольца как теоретическая модель этого феномена дает существенно завышенные значения критической скорости ветра, при которой начинается рост волн. Расчеты с учетом вязкостей воды и воздуха, проведенные Майлзом [1] в рамках представлений о пограничном слое, дают существенно лучшую оценку критической для начала роста волн скорости ветра. Согласно теории Майлза, причиной раскачки волн является сдвиговое течение воздуха в пограничном слое со скоростью, являющейся функцией вертикальной координаты, движение же воздуха за пределами пограничного слоя на раскачку волн влияния не оказывает. Как известно [9], толщина пограничного слоя является малой величиной, пропорциональной корню квадратному из кинематической вязкости воздуха. В этой связи естественно задаться вопросом о направлении изменения критических условий неустойчивости Кельвина–Гельмгольца, т. е. неустойчивости границы раздела двух идеальных (невязких) сред, когда верхняя из них имеет конечную толщину.

1. Исследование проведем на простейшей модели идеальных несжимаемых жидкостей, когда верхняя диэлектрическая жидкость имеет толщину h и плотность ρ_1, а нижняя идеально проводящая жидкость с плотностью ρ_2 заполняет в поле сил тяжести $\mathbf{g}$ полубесконечное пространство $z < 0$ ($\mathbf{g} \parallel -\mathbf{n}_z$, а $\mathbf{n}_z$ есть орт декартовой оси OZ, перпендикулярной границе раздела; плоскость XOY совпадает с невозмущенной границей раздела верхней и нижней сред). Примем, что на невозмущенной капиллярным движением границе раздела имеется электрический заряд, распределенный с постоянной плотностью σ.

Проанализируем устойчивость капиллярных волн в такой системе, решая задачу для гармонических потенциалов поля скоростей движения в верхней ψ_1 и нижней ψ_2 жидкостях в декартовой системе координат

$$\Delta\psi_j = 0; \quad j = 1, 2 \tag{1}$$

с граничными условиями

$$z = h: \quad \frac{\partial\psi_1}{\partial z} \approx U\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{\partial\zeta}{\partial t}, \tag{2}$$

$$\rho_1\frac{\partial\psi_1}{\partial t} + \rho_1 g\zeta + \frac{1}{2}\rho_1\left[(\nabla\psi_1)^2 - U^2\right] - \alpha_1\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} = 0, \tag{3}$$

$$z = 0: \quad \frac{\partial\psi_1}{\partial z} \approx U\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial t}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial\psi_2}{\partial z} \approx \frac{\partial\xi}{\partial t}, \tag{5}$$

$$\rho_1\left\{\frac{\partial\psi_1}{\partial t} + g\xi + \frac{1}{2}\left[(\nabla\psi_1)^2 - U^2\right]\right\}$$
$$= \rho_2\left[\frac{\partial\psi_2}{\partial t} + g\xi\right] - P_\sigma - \alpha_2\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}, \tag{6}$$

где $\zeta(x,t)$ — возмущение свободной поверхности верхнего слоя; $\xi(x,t)$ — возмущение границы раздела сред, связанное с капиллярным волновым движением; $\mathbf{U}$ — постоянная скорость движения верхней жидкости относительно нижней, направление которой определяет ориентацию оси OX; α_1 и α_2 — коэффициенты поверхностного натяжения свободной поверхности и границы раздела; $P_\sigma = 4\pi\xi^{-1}\sigma^2 k\xi$ — электростатическое давление на границу раздела сред, происходящее из-за нарушения капиллярным движением жидкости однородного распределения электрического заряда на границе раздела [10]; ξ — диэлектрическая проницаемость верхней жидкости.

Потенциал поля скоростей, связанного с направленным движением верхней жидкости, имеет вид $x \cdot U$, а полный потенциал поля скоростей движения верхней жидкости запишем в виде суперпозиции

$$\psi_1(\mathbf{r}, t) = x \cdot U + \psi_1^0(\mathbf{r}, t),$$

где компонента $\psi_1^0(\mathbf{r}, t)$ описывает капиллярное волновое движение в верхней жидкости.

Капиллярное движение порождается тепловым движением молекул жидкости и характеризуется весьма малыми амплитудами $\zeta_0 \sim (kT/\alpha_1)^{1/2}$ и $\xi_0 \sim (kT/\alpha_2)^{1/2}$; k — постоянная Больцмана; T — абсолютная температура.

2. Зададимся целью вывести дифференциальные уравнения, описывающие временну́ю эволюцию амплитуд фиксированных мод капиллярных волн на свободной поверхности верхней жидкости и на границе раздела сред в результате действия давления электрического поля и тангенциального разрыва поля скоростей на границе раздела сред. Учтем, что потенциал поля скоростей в нижней среде при бесконечном удалении от границы раздела должен убывать до нуля. Это означает, согласно [7,9], что $\psi_2(\mathbf{r}, t) \sim \exp(kz)$. Примем далее, что зависимость от координаты z потенциала поля скоростей в слое верхней жидкости конечной толщины должна иметь вид

$$\psi_1^0(\mathbf{r}, t) \sim \big(A_1(t)\exp(kz) + A_2(t)\exp(-kz)\big). \qquad (7)$$

Используя (7) и граничные условия, получим соотношения

$$z=0: \quad \frac{\partial\psi_1}{\partial z} = \frac{\partial\psi_1^0}{\partial z} = kG(A_1, A_2)\psi_1^0; \quad \frac{\partial\psi_2}{\partial z} = k\psi_2; \qquad (8)$$

$$z = h: \quad \frac{\partial\psi_1}{\partial z} = \frac{\partial\psi_1^0}{\partial z} = kH(A_1, A_2, kh)\psi_1^0;$$

$$G(A_1, A_2) = \frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2};$$

$$H(A_1, A_2, kh) = \frac{A_1\exp(kh) - A_2\exp(-kh)}{A_1\exp(kh) + A_2\exp(-kh)};$$

$$G = \frac{H - \operatorname{th}(kh)}{1 - H\operatorname{th}(kh)}. \qquad (9)$$

Несложно видеть, что при $\operatorname{th}(kh) > H$ и $1 > H\operatorname{th}(kh)$ знаки коэффициентов G и H будут различны. Коэффициенты G и H можно считать не зависящими от времени t, если принять, что зависимости A_1 и A_2 от t идентичны друг другу.

Примем теперь, что возмущения свободной поверхности верхней жидкости $\zeta(x, t)$ и границы раздела сред $\xi(x, t)$, связанные с капиллярным волновым движением, имеют периодический вид

$$\zeta \sim \exp(-ikx), \quad \xi \sim \exp(-ikx), \qquad (10)$$

и, подставляя (8)–(10) в граничные условия (2) и (4), (5), найдем

$$z = h: \quad \psi_1^0(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{kH}\left(U\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{\partial\zeta}{\partial t}\right)$$

$$= \frac{1}{kH}\left(-ikU\zeta + \frac{\partial\zeta}{\partial t}\right);$$

$$\psi_1(\mathbf{r}, t) = x \cdot U + \frac{1}{kH}\left(-ikU\zeta + \frac{\partial\zeta}{\partial t}\right); \qquad (11)$$

$$z = 0: \quad \psi_1^0(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{kG}\left(U\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial t}\right)$$

$$= \frac{1}{kG}\left(-ikU\xi + \frac{\partial\xi}{\partial t}\right);$$

$$\psi_1(\mathbf{r}, t) = x \cdot U + \frac{1}{kG}\left(-ikU\xi + \frac{\partial\xi}{\partial t}\right); \qquad (12)$$

$$\psi_2(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{k}\frac{\partial\xi}{\partial t}, \qquad (13)$$

где i — мнимая единица.

Учтем также, что

$$\boldsymbol{\nabla}\psi_1 = \mathbf{U} + \boldsymbol{\nabla}\psi_1^0,$$

$$(\boldsymbol{\nabla}\psi_1)^2 \approx U^2 + 2\mathbf{U}\nabla\psi_1^0 \equiv U^2 + 2U\frac{\partial}{\partial x}\psi_1^0. \qquad (14)$$

Подставим теперь (10)–(14) в динамические граничные условия (3) и (6) и в линейном по ζ и ξ приближении получим искомые дифференциальные уравнения, описывающие эволюцию во времени амплитуд капиллярных волн на свободной поверхности слоя верхней жидкости и на границе раздела сред,

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} - 2ikU\frac{\partial\zeta}{\partial t} + (H\omega_0^2 - k^2U^2)\zeta = 0, \qquad (15)$$

$$\omega_0^2 \equiv gk + \alpha_1\rho_1^{-1}k^3,$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} - 2ik\rho U\frac{\partial\xi}{\partial t} + (\rho G\omega_*^2 + \rho k^2U^2)\xi = 0,$$

$$\omega_*^2 \equiv \rho_1^{-1}[gk(\rho_2 - \rho_1) + \alpha_2k^3 - 4\pi\varepsilon^{-1}\sigma^2k^2],$$

$$\rho \equiv \rho_1/(G\rho_2 - \rho_1). \qquad (16)$$

Уравнения (15) и (16) являются обыкновенными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами и их решения легко выписываются в виде

$$\zeta = \zeta_0\mathrm{Re}\left[\exp\left\{it[kU \pm (Hkg + H\alpha_1\rho_1^{-1}k^3)^{1/2}]\right\}\right], \qquad (17)$$

$$\xi = \xi_0 \mathrm{Re}\Big[\exp\Big\{it\Big[-k\rho U \pm (G\rho(\omega_*^2 + \rho\rho_2\rho_1^{-1}k^2U^2))^{1/2}\Big]\Big\}\Big], \qquad (18)$$

где ζ_0 и ξ_0 — начальные значения амплитуд капиллярных волн, выражение $\mathrm{Re}[f]$ означает выделение вещественной части от функции f.

3. Физический смысл полученных решений определяется знаками подкоренных выражений в показателях экспонент, которые в свою очередь зависят от знаков коэффициентов $G = G(A_1, A_2)$ и $H = H(A_1, A_2, kh)$, введенных в соотношения (8) и (9).

Так, при $H > 0$ из (17) получим, что движения свободной поверхности слоя верхней жидкости будут волновыми при любых значениях физических параметров, характеризующих жидкость, а частота волн определится выражением, стоящим в (17) в показателе экспоненты, в квадратных скобках. В соответствии с эффектом Доплера частота волн будет линейной функцией скорости направленного движения верхней среды как целого. Неустойчивость свободной поверхности верхней жидкости возможна лишь при $H < 0$ и, видимо, может быть вызвана лишь взаимодействием с движениями границы раздела сред. Однако в линейной постановке задачи такая неустойчивость не проявляется.

Более сложным, согласно (18), будет спектр капиллярных движений, порождаемых границей раздела сред. При больших толщинах слоя верхней жидкости коэффициент $G < 0$ (при этом параметр ρ также отрицателен) и реализуется ситуация, рассмотренная в [7], когда условия неустойчивости границы раздела сред определяются комбинацией неустойчивостей Кельвина–Гельмгольца и Тонкса–Френкеля. Решение (18) будет чисто периодическим в области значений физических параметров задачи, для которой выражение, стоящее в (18) под знаком радикала, положительно, т. е. при малых поверхностных плотностях заряда σ на границе раздела сред и при малых скоростях U движения верхней среды как целого. По мере увеличения σ и U выражение, стоящее под знаком радикала, изменит свой знак и из-под корня выйдет мнимая единица. В этом случае положительное значение радикала определит инкремент неустойчивости ветви волн с частотой $k\rho U$, бегущих по поверхности раздела сред, а отрицательное значение радикала определит декремент затухания другой ветви волновых движений, имеющих ту же частоту $k\rho U$.

При уменьшении толщины слоя верхней жидкости растет коэффициент $G(A_1, A_2)$ и при некотором значении h он становится положительным. Если величина G находится в диапазоне $[0; \rho_1/\rho_2]$, то параметр ρ остается отрицательным и в решении (18) из-под радикала снова выходит мнимая единица. Область неустойчивости волнового движения границы раздела сред при этом снова сменится областью устойчивости. При значениях $G > \rho_1/\rho_2$ неустойчивость границы раздела сред может быть вызвана лишь достаточно большой плотностью поверхностного заряда σ, поскольку движение верхней среды как целого параллельно границе раздела оказывает в такой ситуации стабилизирующее влияние на границу.

Следует отметить, что ситуация, в которой знаменатель в выражении для определения ρ приближается к нулю, является аналогом известного эффекта "мертвого моря" [11] и соответствует значительному росту амплитуды волн на границе раздела сред.

Итак, при конечной толщине слоя верхней жидкости h в рассматриваемой двухслойной системе несмешивающихся жидкостей возможно существование нескольких различных зон значений поверхностной плотности заряда σ на границе раздела сред, скорости U движения верхней среды как целого, в которых волновые движения, порождаемые границей раздела сред, неустойчивы.

Рассмотрим, однако, некоторые асимптотические ситуации.

4. В пределе весьма толстого слоя верхней жидкости ("толстый" слой определим условием $kh > 6$) волны, генерируемые границей раздела и свободной поверхностью, не взаимодействуют между собой. Как известно, глубина проникновения волнового движения, генерируемого свободной поверхностью, внутрь жидкости порядка длины волны $h \sim \lambda \equiv 2\pi/k$ [11]. Поэтому в рассматриваемой двухслойной системе взаимодействия волн, порождаемых свободной поверхностью верхнего слоя и границей раздела сред, следует ожидать только при $kh < 6$ (что и подтверждается, как будет показано ниже, численными расчетами по соответствующему дисперсионному уравнению). В пределе $kh > 6$ для коэффициента H несложно получить оценку $H \approx 1$, и по свободной поверхности бегут волны, определяемые решением (17) при $H \approx 1$. На границе раздела в рассматриваемой ситуации можно принять, что волны имеют такой же вид, как и в задаче, когда верхний слой ограничен сверху жесткой плоской поверхностью, на которой выполняется условие

$$z = h: \qquad \frac{\partial \psi_1}{\partial z} = 0, \qquad (19)$$

получающееся из (2) при $\zeta \equiv 0$.

Зависимость потенциала поля скоростей течения жидкости в верхней жидкости $\psi_1^0(\mathbf{r}, t)$ в этом случае зависит от координаты z по закону $\sim \mathrm{ch}\big(k(h - z)\big)$, а коэффициент G определится соотношением

$$G \equiv -\mathrm{th}\, kh.$$

Выражение для временно́й зависимости амплитуд волн на границе раздела принимает теперь вид

$$\xi = \xi_0 \mathrm{Re}\left[\exp\left\{it\left[\frac{\rho_1 kU}{\rho_2\,\mathrm{th}\,kh + \rho_1} \pm \left(\frac{\rho_1\,\mathrm{th}\,kh}{\rho_2\,\mathrm{th}\,kh + \rho_1}\left(\omega_*^2 - \frac{\rho_2 k^2 U^2}{\rho_2\,\mathrm{th}\,kh + \rho_1}\right)\right)^{1/2}\right]\right\}\right],$$

и критические условия реализации неустойчивости границы раздела легко выписываются:

$$gk(\rho_2 - \rho_1) + \alpha_2 k^3 - 4\pi\varepsilon^{-1}\sigma^2 k^2 - \frac{\rho_1\rho_2 k^2 U^2}{\rho_2 \operatorname{th} kh + \rho_1} = 0.$$

Из этого соотношения видно, что в соответствии с общефизическими представлениями о причинах возникновения неустойчивости Кельвина–Гельмгольца критическое для начала развития неустойчивости значение скорости U увеличивается с уменьшением толщины слоя верхней жидкости (толщина слоя верхней жидкости при этом должна оставаться достаточно большой, чтобы оставалось справедливым условие (19)).

5. В другом предельном случае $kh \ll 6$, когда взаимодействие волн велико и является определяющим, картина будет существенно иной. Рассмотрим ситуацию, когда слой верхней жидкости настолько тонок, что поле скоростей капиллярных движений в нем слабо зависит от толщины слоя h. При этом можно принять, что коэффициенты G и H близки друг к другу по абсолютной величине. В рассматриваемой линейной по малым возмущениям ζ и ξ модели взаимодействие волн может реализоваться только резонансным способом, т. е. в случае равенства частот и волновых чисел у взаимодействующих волн. Предположим, что граница раздела сред неустойчива и в соответствии с (18) совершает колебания с частотой $k\rho U$, амплитуда которых экспоненциально изменяется во времени со скоростью, определяемой величиной радикала в показателе экспоненты.

Примем, что в слое верхней жидкости капиллярные движения незатухающие, волновые, т. е. $H > 0$, а граница раздела сред пусть будет неустойчива в смысле комбинации неустойчивостей Кельвина–Гельмгольца и Тонкса–Френкеля [7] (т. е. $G < 0$). Очевидно, что когда H и G имеют противоположные знаки, взаимодействие волн на свободной поверхности весьма тонкого слоя и границе раздела сред проявляется наиболее отчетливо, так как волны находятся в противофазе. Потребуем выполнения равенства частот волновых движений (17) и (18)

$$kU \pm (Hkg + H\alpha_1\rho_1^{-1}k^3)^{1/2} = -kU\frac{\rho_1}{G\rho_2 - \rho_1}. \qquad (20)$$

Учтем, что, согласно предположению, $G \approx H$, и получим из (20) квадратное алгебраическое уравнение относительно неизвестной константы H

$$H^2 - HL + R = 0,$$

$$L \equiv kU^2(g + \alpha_1\rho_1^{-1}k^2)^{-1} - 2\rho_1\rho_2^{-1}, \quad R \equiv (\rho_1\rho_2^{-1})^2. \quad (21)$$

Рассмотрим для простоты ситуацию, когда $L > R$. При этом оба корня уравнения положительны и их можно представить в виде

$$H_1 \approx L - RL^{-1}, \quad H_2 \approx RL^{-1}. \qquad (22)$$

Поскольку, согласно (18) (при $G \approx -H$), величины инкрементов неустойчивостей, соответствующих различным корням H_j, приблизительно пропорциональны $H_j^{1/2}$, а корни H_1 и H_2 имеют разные порядки величин, то рассматриваемые движения легко различимы.

При произвольных соотношениях между R и L уравнение (21) может иметь корни разных знаков, а также и комплексно сопряженные. Комплексные значения H_j будут соответствовать сильному взаимодействию волновых движений обеих поверхностей, при котором в неустойчивые движения границы раздела сред вовлекаются и волны, генерируемые свободной поверхностью верхнего слоя жидкости.

Проведенный анализ является существенно качественным и базируется на ряде допущений и упрощений. Поэтому представляется целесообразным сопроводить его исследованием эволюции реализующихся капиллярных движений (при варьировании физических параметров системы) на основе численного анализа соответствующего дисперсионного уравнения.

6. Будем искать решение задачи (1)–(6) в виде

$$\psi_1 = \big(A_1 \exp(kz) + A_2 \exp(-kz)\big)\cos(kx - \omega t) + Ux,$$

$$\psi_2 = B\exp(kz)\cos(kx - \omega t),$$

$$\zeta = C\sin(kx - \omega t), \quad \xi = D\sin(kx - \omega t).$$

Подставляя эти выражения в граничные условия (2)–(6) и приравнивая нулю определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных амплитудах A_1, A_2, B, C, D, несложно получить дисперсионное уравнение задачи [12]. В безразмерных переменных, в которых $\rho_2 = \alpha_2 = g = 1$ (а значит, и капиллярная постоянная для нижней жидкости, выбранная в качестве характерного линейного пространственного масштаба, также равна единице), искомое дисперсионное уравнение имеет вид

$$\begin{aligned}
&[1 + \rho \operatorname{th}(kh)]\omega^4 - 2Uk[2\rho \operatorname{th}(kh) + 1]\omega^3 \\
&+ \Big[\rho \operatorname{th}(kh)\Big[6(Uk)^2 - \frac{k}{\rho}\Big(1 + \frac{\alpha k^2}{\rho}\Big)\Big] \\
&+ k[1 + k^2 + \alpha k^2 - Wk] - (Uk)^2\Big]\omega^2 \\
&- 2k^2U\left[2\rho kU^2 \operatorname{th}(kh) - (1 + k^2 + \alpha k^2 - Wk)\right]\omega \\
&- k^2\Big[\rho \operatorname{th}(kh)\Big[1 + \frac{\alpha k^2}{\rho} + U^4k^2 \\
&+ \Big(\frac{\alpha k^2}{\rho} + 1\Big)(1 - k^2 + Wk)\Big] \\
&+ U^2k[1 + k^2 - Wk - \rho]\Big] = 0,
\end{aligned}$$

$$W \equiv 4\pi\sigma^2\varepsilon^{-1}, \quad \rho \equiv \rho_1, \quad \alpha \equiv \alpha_1. \qquad (23)$$

7. На рис. 1–4 приведены результаты численного исследования по (23) влияния толщины верхнего движущегося жидкого слоя на закономерности развития неустойчивости в виде зависимостей действительной

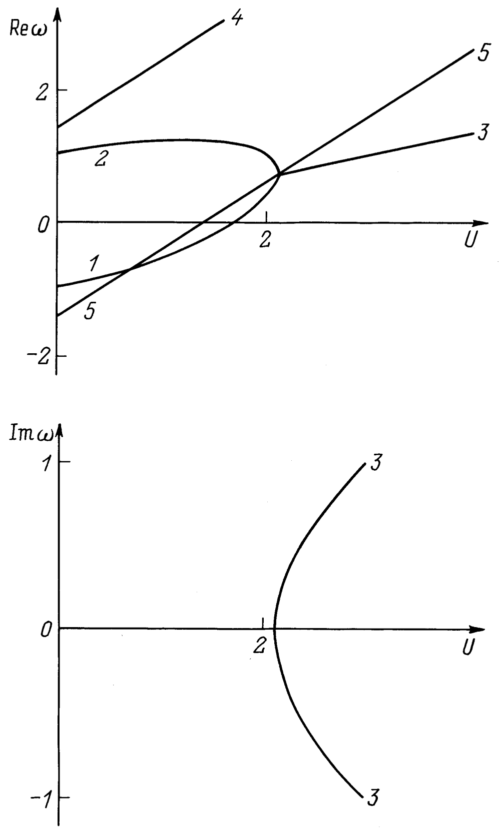

Рис. 1. Зависимости действительной и мнимой компонент безразмерной комплексной частоты от безразмерной скорости направленного движения верхней жидкости при $k = 1$, $\alpha = 0.5$, $\rho = 0.5$, $W = 0$, $h = 5$.

$\mathrm{Re}\,\omega = \mathrm{Re}\,\omega(U)$ и мнимой $\mathrm{Im}\,\omega = \mathrm{Im}\,\omega(U)$ компонент комплексной частоты от величины безразмерной скорости U. На приведенных рисунках вещественная часть комплексной частоты определяет частоты волновых движений жидкости, а мнимая — инкременты неустойчивости (в области $\mathrm{Im}\,\omega > 0$) и декременты затухания (в области $\mathrm{Im}\,\omega < 0$).

Ветви дисперсионного уравнения с номерами *1–3* на рис. 1 (рассчитанного при $h = 5$) описывают капиллярные движения, порождаемые границей раздела сред. Ветви с номерами *4* и *5* описывают капиллярные волновые движения, порождаемые свободной поверхностью верхней жидкости. На рис. 1 эти ветви являются параллельными прямыми, сориентированными (в соответствии с эффектом Допплера) под некоторым углом к оси абсцисс (оси U). Очевидно, что ветвь *4* описывает волну, распространяющуюся по направлению $\mathbf{U}$, а ветвь *5* соответствует такой же волне, бегущей в противоположном направлении.

Из рис. 1 видно, что, как и отмечалось выше, при достаточно большой безразмерной толщине слоя верхней жидкости вóлны, порождаемые свободной поверхностью верхней жидкости и границей раздела, не взаимодействуют между собой, а закономерности реализации неустойчивости Кельвина–Гельмгольца (характеризуемой ветвью *3*) не отличаются от классического варианта с бесконечной толщиной верхней жидкости $h \to \omega$. Согласно рис. 1, при некотором значении скорости движения верхней среды $U = U_*$ ветви волновых движений *1* и *2* сливаются, образуя два волновых же движения *3*, амплитуда одного из которых экспоненциально затухает со временем с декрементом, определяемым отрицательной частью мнимой компоненты ветви *3*, а другого экспоненциально нарастает с инкрементом, определяемым положительной частью мнимой компоненты ветви *3*.

При уменьшении безразмерной толщины слоя верхней жидкости (рис. 2–4) до значений $h \sim 1$ ветви *1–3* начинают взаимодействовать с ветвями *4* и *5* с образованием новых составных движений *6–10* и с деформированием ветвей *1, 2, 4*. Причем движения *4, 6, 7, 9* являются волновыми незатухающими, а движения *8* и *10* содержат как периодически экспоненциально затухающие (для которых $\mathrm{Im}\,\omega < 0$), так и периодически экспоненциально нарастающие (неустойчивые) ветви (для которых $\mathrm{Im}\,\omega > 0$). Неустойчивое движение *10* соответствует классической неустойчивости Кельвина–Гельмгольца, для него критическая скорость начала реализации неустойчивости U_* увеличивается с уменьшением толщины слоя верхней жидкости (рис. 1–4). Неустойчивое движение *8* обязано своим происхождением взаимодействию капиллярных движений, порождаемых свободной поверхностью верхней жидкости и границей

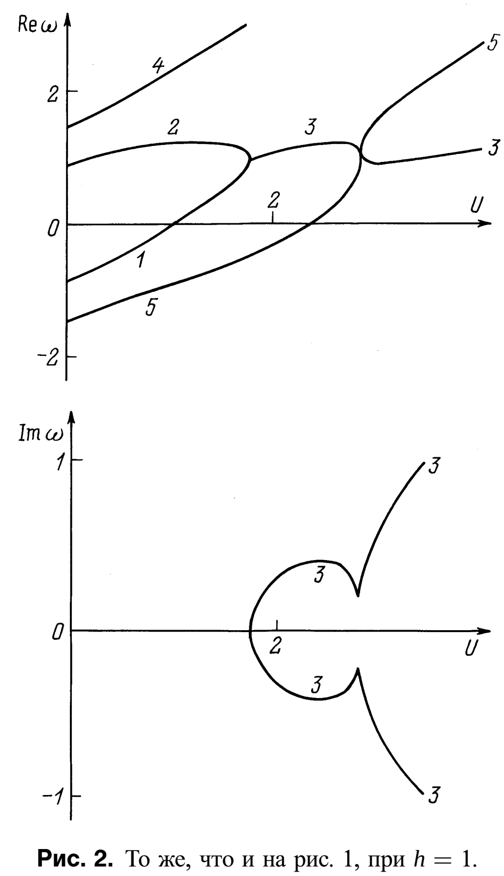

Рис. 2. То же, что и на рис. 1, при $h = 1$.

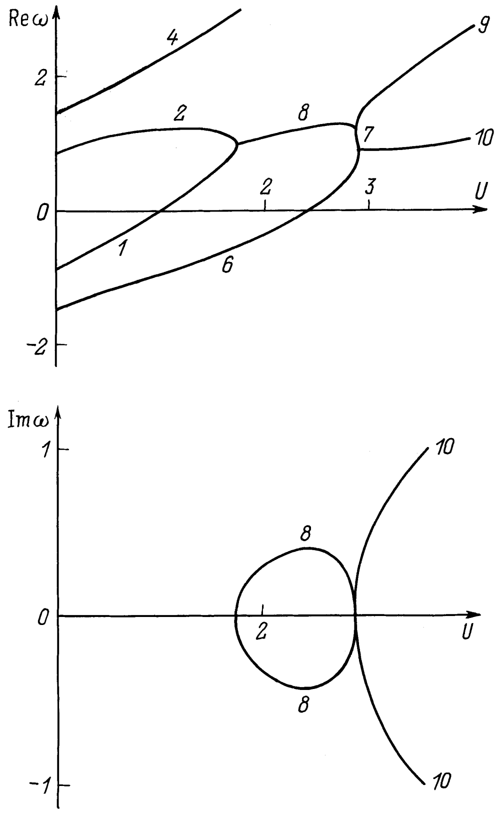

Рис. 3. То же, что и на рис. 1, при $h = 0.9$.

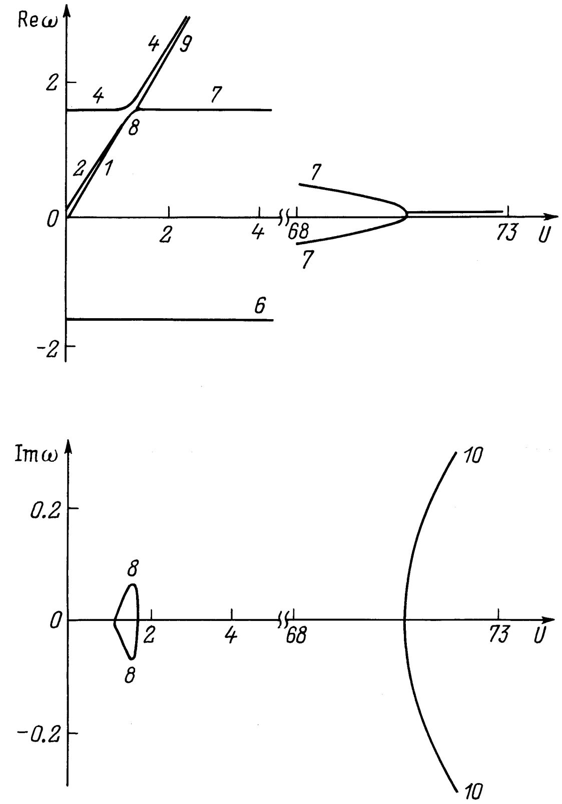

Рис. 4. То же, что и на рис. 1, при $h = 0.001$.

раздела сред. Как видно из рис. 3, 4, при уменьшении безразмерной толщины слоя верхней жидкости h область реализации неустойчивого движения *8* в отличие от движения *10* смещается в сторону меньших значений скорости верхней жидкости U_*, а величина его инкремента при этом снижается.

На рис. 5 приведены результаты расчета по дисперсионному уравнению (23) зависимости действительной $\operatorname{Re}\omega(W)$ и мнимой $\operatorname{Im}\omega(W)$ компонент комплексной частоты от величины параметра W, характеризующего устойчивость заряженной поверхности жидкости по отношению к собственному заряду (т. е. возможность реализации неустойчивости Тонкса–Френкеля), построенные при $U = 1$ и $h = 0.0001$. Нумерация приведенных ветвей такая же, как и на предыдущих рисунках. Ветвь *10* описывает апериодическую неустойчивость Тонкса–Френкеля (вызванную весьма большими значениями поверхностного заряда на границе раздела), развивающуюся на фоне колебательной неустойчивости Кельвина–Гельмгольца (происходящей из-за разрыва поля скоростей на границе раздела сред). Численные расчеты показывают, что выделение самостоятельного движения *8*, вызванного взаимодействием волн, порождаемых разными поверхностями (по той же схеме, что и на рис. 2, 3), происходит при безразмерных толщинах слоя верхней жидкости, измеряемых сотыми долями единицы.

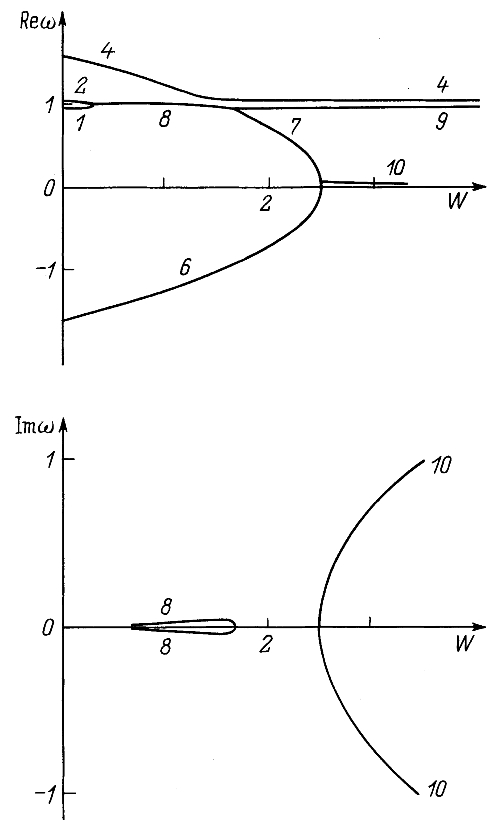

Рис. 5. Зависимости действительной и мнимой компонент безразмерной комплексной частоты от величины безразмерного параметра W при $k = 1$, $\rho = 0.5$, $\alpha = 0.5$, $h = 0.0001$, $U = 1$.

Из рис. 4 и 5 видно, что при уменьшении толщины слоя верхней жидкости скорости, критические для реализации неустойчивости границы раздела, порождаемой взаимодействием волн, имеющих разное происхождение, снижаются, как и величина инкремента неустойчивости. Наличие на границе раздела сред нескомпенсированного электрического заряда усиливает этот эффект.

На рис. 6 и 7 приведены зависимости действительной $\mathrm{Re}\,\omega(U)$ и мнимой $\mathrm{Im}\,\omega(U)$ компонент комплексной частоты от величины безразмерной скорости U, рассчитанные при постоянной толщине слоя верхней жидкости, но различных значениях безразмерной плотности верхней среды. Нумерация и смысл приведенных ветвей такие же, как и на рис. 3, 4 (ветвь *4* на рис. 7 вышла за пределы приведенной области значений величин). Видно, что с уменьшением плотности верхней среды (с уменьшением ρ) области значений безразмерной скорости U, в которых реализуются неустойчивости, описываемые ветвями *8* и *10*, смещаются в сторону увеличения и расстояние между ними увеличивается. Интересно, что при этом величина инкремента неустойчивости, порожденной взаимодействием волн (ветвь *8*), существенно увеличивается, сравниваясь с величиной инкремента ветви *10*.

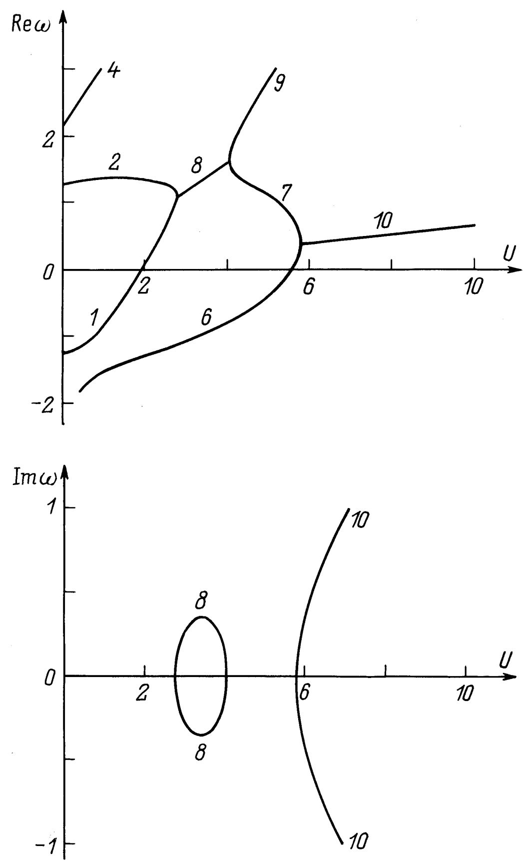

Рис. 6. Зависимости действительной и мнимой компонент безразмерной комплексной частоты от безразмерной скорости направленного движения верхней жидкости при $k = 1$, $\alpha = 0.5$, $h = 0.9$, $W = 0$, $\rho = 0.1$.

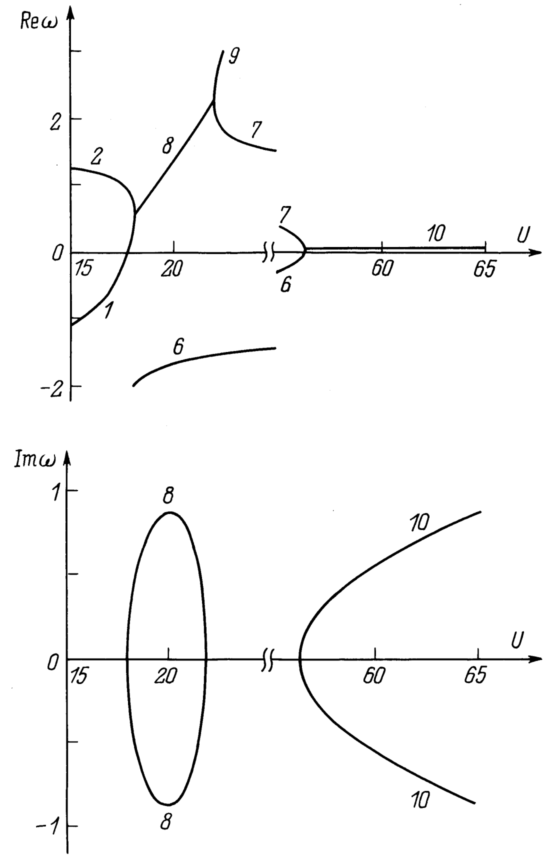

Рис. 7. То же, что и на рис. 6, при $\rho = 0.001$.

Согласно численным расчетам (рис. 3, 6) уменьшение плотности верхней среды приводит к увеличению значения толщины верхнего слоя, при котором формируется в виде самостоятельного движение *8*, порожденное взаимодействием волн.

Заключение

При толщинах слоя верхней жидкости, меньших капиллярной постоянной нижней жидкости, имеет место взаимодействие капиллярных движений, порождаемых свободной поверхностью верхней жидкости и границей раздела сред, приводящее к появлению дополнительной, ранее неизвестной колебательной неустойчивости. Критические условия ее реализации снижаются с уменьшением толщины слоя, хотя при этом снижается и величина инкремента. Наличие на границе раздела сред нескомпенсированного электрического заряда усиливает этот эффект.

Сравнение результатов проведенного в разделах 6 и 7 численного анализа дисперсионного уравнения (23) с результатами качественного рассмотрения в разделах 2–5 показывает, что взаимодействие различных ветвей капиллярных волновых движений между собой в матфизическом смысле в используемой линейной постановке задачи реализуется через граничные условия.

Список литературы

[1] *Miles J.W.* // Appl. Mech. Rev. 1962. Vol. 15. № 9. P. 685–687.
[2] *Ле Блон П., Майсек Л.* Волны в океане. Т. 2. М.: Мир, 1981. 365 с.
[3] *Sydora R.D., Wagner J.S., Lee J.S.* et al. // Phys. Fluids. 1983. Vol. 26. N 10. P. 2986–2991.
[4] *Sneyd A.D.* // J. Fluid Mech. 1985. Vol. 156. P. 223–236.
[5] *Степанянц Ю.А., Фабрикант А.Л.* // УФН. 1989. Т. 159. № 1. С. 83–123.
[6] *Кузнецов В.М., Лушников П.М.* // ЖЭТФ. 1995. Т. 108. Вып. 2(8). С. 614–630.
[7] *Григорьев О.А., Ширяева С.О.* // ЖТФ. 1996. Т. 66. Вып. 2. С. 23–34.
[8] *Григорьев А.И., Коромыслов В.А., Ширяева С.О.* // ЖТФ. 1999. Т. 69. Вып. 5. С. 7–14.
[9] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 733 с.
[10] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.
[11] *Сретенский Л.Н.* Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 696 с.
[12] *Левич В.Г.* Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 699 с.