

## О флуктуациях в жидкостях и газах

© С.О. Гладков, И.В. Гладышев

Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики (технический университет),  
117454 Москва, Россия

(Поступило в Редакцию 2 декабря 1999 г.)

С помощью лагранжева формализма получена система нелинейных, неоднородных диссипативных дифференциальных уравнений, описывающих нелинейную динамику поведения связанных флуктуаций плотности  $\delta\rho$  и температуры  $\delta T$  в веществе. Полученные уравнения позволили определить неустойчивую (по отношению к начальным условиям) фазовую траекторию "движения" в плоскости  $\rho-T$ , описывающую флуктуационное поведение данных параметров. Благодаря численному решению найденной нелинейной системы уравнений показано, что зависимость  $\delta\rho$  и  $\delta T$  от времени носит почти периодический, осциллирующий характер, свойственный именно флуктуациям.

Исследование многообразных процессов самоорганизации, имеющих место в совершенно различных веществах и, более того, в несвязанных между собой (на первый взгляд) дисциплинах (биофизике, биологии, геологии, химической кинетике, медицине и т.д.) характеризуется тем не менее единой тенденцией описания эволюционного развития некоторых событий исходя из диссипативных уравнений движения в соответствующем фазовом пространстве. Эти уравнения получаются варьированием некоторого классического действия, пропорционального инвариантному по отношению к группе преобразований  $t = Rt = -t$ ,  $x = RX = -x$  лагранжиану изучаемой системы.

В принципе к задачам, связанным со строгим математическим описанием поведения нелинейных систем, приводится чрезвычайно большой спектр проблем, так или иначе сводящихся, во-первых, к оценке времени прихода "фазовых" подсистем в устойчивое положение равновесия, а во-вторых, к пониманию того, как ведет себя траектория "движения" в соответствующем фазовом пространстве.

Наш интерес к подобного рода вопросам диктуется не только чисто академическим любопытством, но, главное, возможностью использования проанализированных решений в практических приложениях. Задача, которую мы будем решать сейчас адекватно укладывается в рамки очерченных выше проблем и входит в число классических. Речь идет об описании связанного временного поведения флуктуаций плотности и температуры в газах и жидкостях. Эта задача любопытна еще и по той простой причине, что поскольку ранее не описывалась временная зависимость флуктуаций (во всяком случае нам такие работы неизвестны) соответствующих термодинамических параметров.

Практически всегда можно феноменологически описать приход большинства систем в равновесие с помощью уравнения типа  $dx/dt = -\gamma x$ , где  $\gamma$  — затухание (обратное время релаксации). Температура и плотность здесь вовсе не исключение из правил и для них формально можно было бы записать аналогичные уравнения

вида:  $dT'/dt = -\gamma_1 T'$ ,  $d\rho'/dt = -\gamma_2 \rho'$ . Эти уравнения должны однозначным образом получаться из принципа наименьшего действия с помощью формального правила  $dx/dt = \gamma \delta S / \delta \bar{x}$ , где  $\bar{x} = \{T', \rho'\}$ ,  $\gamma = \{\gamma_1, \gamma_2\}$ . Подчиняющиеся таким уравнениям и запутывающиеся между собой независимые параметры  $T'$  и  $\rho'$  при совместном их учете в действии  $S$  должны будут привести к некоторому неустойчивому решению: точка  $T' = 0$ ,  $\rho' = 0$  является неустойчивой точкой равновесия, когда фазовая траектория, заданная параметрически в виде  $T' = T'(t)$ ,  $\rho' = \rho'(t)$ , проводит бесконечно большое время вблизи других точек (их координаты вычислены далее), описывая вокруг них сложную замкнутую фазовую траекторию. То, что асимптотически устойчивое решение  $T' = \rho' = 0$  отсутствует, вовсе не означает чего-либо странного, хотя качественно и информирует нас о том, что следует искать нелинейные эффекты влияния параметров  $T'$  и  $\rho'$  друг на друга. Они "закручены" таким образом, что некоторая устойчивая траектория все же появится и именно эта траектория будет описывать истинное флуктуационное фазовое равновесие любых подобных двумерных скалярных систем. Забегая вперед, следует заметить, что в зависимости от начальных условий  $u(0)$  и  $v(0)$  система может "скатываться" либо в начало координат ( $u = v = 0$ ), либо в точки  $u_0 v_0$ . В начало координат система попадает только в том случае, если начальные условия заданы вдали от начала координат. Во всех остальных случаях фазовая траектория уходит к точкам  $u_0 v_0$ . Теперь более подробно.

Традиционно считается, что как температура, так и плотность подчиняются хорошо известным уравнениям теплопроводности и уравнению звуковых колебаний. Действительно, согласно [1], имеем

$$\partial T' / \partial t = \chi \Delta T', \quad \partial^2 \rho' / \partial t^2 - c_{st}^2 \Delta \rho' = 0, \quad (1)$$

где  $T'$  и  $\rho'$  — соответственно малые отклонения температуры и плотности от некоторых значений  $T_0$ ,  $\rho_0$ , причем  $T' = T - T_0$ ,  $\rho' = \rho - \rho_0$ .

"Запутывание" уравнений (1) осуществляется путем учета нелинейных членов в лагранжиане системы и

может быть найдено с помощью принципа наименьшего действия [2]. Малым параметром разложения являются числовые множители, которые ради наглядности будут вычислены на примере идеального газа. Итак, введем в рассмотрение две безразмерные независимые функции

$$u = \rho' / \rho_0 = (\rho - \rho_0) / \rho_0, \quad v = T' / T_0 = (T - T_0) / T_0. \quad (2)$$

Постоянные  $T_0$  и  $\rho_0$  будут соответствующим образом перенормированы после решения нелинейных уравнений. Причем заметим, что как  $\rho_0$ , так и  $T_0$  не являются равновесными параметрами системы. Равновесные значения (истинные) должны находиться из условия асимптотической устойчивости решений. Общее выражение для классического действия  $\sigma$  в безразмерных независимых переменных  $u - v$  есть

$$\sigma\{u, v\} = (1/T_0) \int d\tau d^3x L\{u, v\}, \quad (3)$$

где  $\tau = t/t_0$  — безразмерное время,  $t_0$  — время релаксации системы к равновесию,  $d^3x = dV$  — элемент объема, а лагранжиан системы есть

$$\begin{aligned} L\{u, v\} = & (a\rho_0^2/2c_{st}^2) [(\partial u/\partial t)^2 - c_{st}^2(\nabla u)^2] \\ & + (bT_0^2/2c_T^2) [(\partial v/\partial t)^2 - c_T^2(\nabla v)^2] \\ & - K_1 \nabla u \nabla v - K_2 |u|(\nabla v)^2 - K_3 |v|(\nabla u)^2 - K_4 |v| \nabla u \nabla v \\ & - K_5 |u| \nabla u \nabla v - K_6 |v|(\nabla v)^2 - K_7 |u|(\nabla u)^2 - g_1 u^2/2 \\ & - g_2 v^2/2 - g_3 uv - g_4 u^2 |v| - g_5 v^2 |u| - g_6 u^2 |u| \\ & - g_7 v^2 |v| - g_8 u^2 v^2 - g_9 u^3 v - g_{10} uv^3 - g_{11} u^4 - g_{12} v^4 \\ & + g_{13} u^4 |u| - g_{14} v^4 |v| - g_{15} u^4 |v| + g_{16} v^2 u^2 |u| \\ & + g_{17} v^2 u^2 |v| - g_{18} v^4 |u| + g_{19} u^6 + g_{20} v^6 - g_{21} u^5 v \\ & + g_{22} v^2 u^4 - g_{23} v^3 u^3 + g_{24} v^4 u^2 - g_{25} v^5 u. \end{aligned} \quad (4)$$

Наличие знаков модуля означает, что при изменении знаков у флуктуаций  $u$  и  $v$  лагранжиан остается инвариантным к такому преобразованию. Что касается констант  $a, b, g_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, 25$ ), то они будут найдены, а вот константы  $K_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 7$ ), к сожалению, есть просто феноменологические постоянные,  $c_{st}$  — продольная скорость звука в среде,  $c_T$  — скорость распространения температурных флуктуаций по веществу. Диссипативные уравнения "движения" определим по правилу

$$\partial \mathbf{A} / \partial \tau = (V/N) \delta \sigma / \delta \mathbf{A}, \quad (5)$$

где двумерный вектор  $\mathbf{A} = (u, v)$ .

К слову сказать, подобные уравнения были использованы одним из авторов в работе [3]. Чтобы определить постоянные  $a$  и  $b$ , положим, что  $g_i = K_i = 0$ . Понятно, что в таком случае мы должны будем получить обычное уравнение теплопроводности и уравнение релаксации

для плотности  $\rho$ . В самом деле, при помощи (3), (4) и (5) найдем

$$\partial u / \partial t = \nu \Delta u, \quad \partial v / \partial t = \chi \Delta v, \quad (6)$$

где  $\nu$  — кинематическая вязкость,  $\chi$  — коэффициент температуропроводности.

Отсюда немедленно следует, что

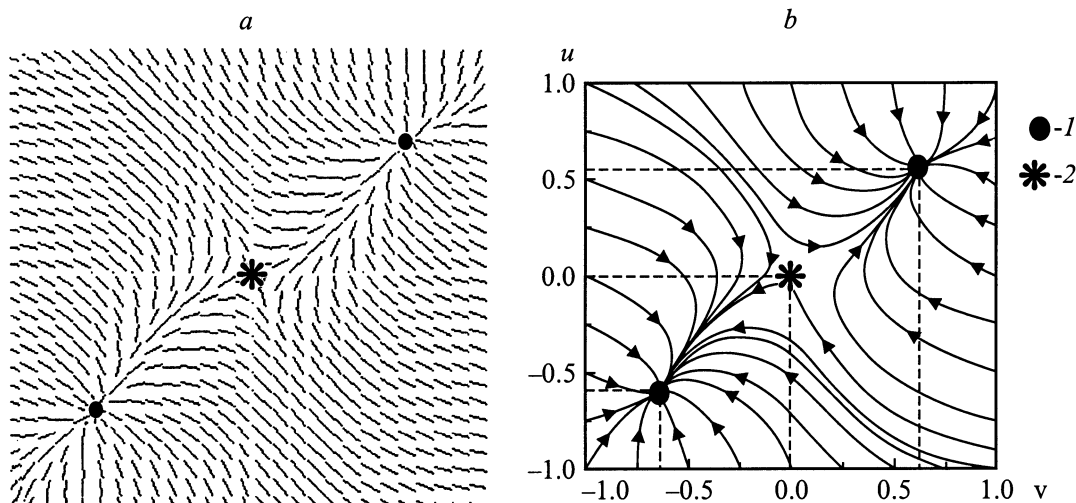
$$a = t_0 T_0 \nu / \rho_0^2, \quad b = t_0 \chi / T_0. \quad (7)$$

Что же касается констант  $g_i$ , то они однозначным образом определяются из разложения термодинамического потенциала Гельмгольца  $F$  по степеням  $V'$  и  $T'$ . С точностью до членов шестого порядка имеем

$$\begin{aligned} F' + ST' + PV' = & -0.5(\partial P / \partial V)_T V'^2 - 0.5(C_V / T) T'^2 \\ & - (\partial P / \partial T)_V T' V' - (\partial^2 P / \partial V^2)_T (V'^3 / 6) \\ & - (\partial^2 P / \partial T^2)_V (V' T'^2 / 3) - (\partial^2 P / \partial T \partial V) (T' V'^2 / 3) \\ & - \partial[(C_V / T) / \partial T] (T'^3 / 6) - (\partial^3 P / \partial V^3)_T (V'^4 / 24) \\ & - \partial^2[(C_V / T) / \partial^2 T] (T'^4 / 24) - (\partial^3 P / \partial T^2 \partial V) (T'^2 V'^2 / 6) \\ & - (\partial^3 P / \partial V^2 \partial T) (T' V'^3 / 8) - (\partial^3 P / \partial T^3)_V (T'^3 V' / 8) \\ & - (1/5!) \left\{ (\partial^4 P / \partial V^4)_T V'^5 + \partial^3[(C_V / T) / \partial^3 T] T'^5 \right. \\ & + 2(\partial^4 P / \partial V^3 \partial T) T' V'^4 + 2(\partial^4 P / \partial V^2 \partial T^2) T'^2 V'^3 \\ & + 2(\partial^4 P / \partial V \partial T^3) T'^3 V'^2 + 2(\partial^4 P / \partial T^4) T'^4 V' \left. \right\} \\ & + (1/6!) \left\{ -(\partial^5 P / \partial V^5)_T V'^6 - \partial^4[(C_V / T) / \partial^4 T] T'^6 \right. \\ & - 6(\partial^5 P / \partial V^4 \partial T) T' V'^5 - 6(\partial^5 P / \partial V^3 \partial T^2) T'^2 V'^4 \\ & - 6(\partial^5 P / \partial V^2 \partial T^3) T'^3 V'^3 - 6(\partial^5 P / \partial V \partial T^4) T'^4 V'^2 \\ & \left. - 6(\partial^5 P / \partial T^5) T'^5 V' \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Отсюда видно, что коэффициенты  $g_i$ , отнесенные к единице объема, есть

$$\begin{aligned} g_1 = & -(\partial P / \partial V)_T V_0, \quad g_2 = -c_V T_0, \\ g_3 = & -(\partial P / \partial T)_V T_0, \quad g_4 = -(\partial^2 P / \partial T^2)_V (T_0^2 / 3), \\ g_5 = & -(\partial^2 P / \partial T \partial V) (V_0 T_0 / 3), \quad g_6 = -(\partial^2 P / \partial V^2) (V_0^2 / 6), \\ g_7 = & -[(\partial / \partial T)(c_V / T)] (T_0^3 / 6), \\ g_8 = & -(\partial^3 P / \partial T^2 \partial V) (V_0 T_0^2 / 6), \\ g_9 = & -(\partial^3 P / \partial T^3)_V (T_0^3 / 8), \\ g_{10} = & -(\partial^3 P / \partial V^2 \partial T) (T_0 V_0^2 / 8), \\ g_{11} = & -(\partial^3 P / \partial V^3)_T (V_0^3 / 24), \end{aligned}$$



**Рис. 1.** Интегральные кривые для случая  $c_v = 3/2$ , полученные по методу касательных (а) и интегрированием  $\dot{u}(t)$  и  $\dot{v}(t)$  (b). I — устойчивый узел, 2 — седловая точка.

$$\begin{aligned}
 g_{12} &= -[(\partial^2/\partial T^2)(c_v/T)](T_0^3/24), \\
 g_{13} &= -(\partial^4 P/\partial V^4)(V_0^4/5!), \\
 g_{14} &= -[(\partial^3/\partial T^3)(c_v/T)](T_0^4/5!), \\
 g_{15} &= -2(\partial^4 P/\partial V^4 \partial T)(V_0^4 T_0/5!), \\
 g_{16} &= -2(\partial^4 P/\partial V^2 \partial T^2)(T_0^2 V_0^3/5!), \\
 g_{17} &= -2(\partial^4 P/\partial V \partial T^3)(T_0^3 V_0^2/5!), \\
 g_{18} &= -2(\partial^4 P/\partial T^4)(T_0^4 V_0/5!), \\
 g_{19} &= (\partial^5 P/\partial V^5)V_0^6/6!, \\
 g_{20} &= -[(\partial^4/\partial T^4)(c_v/T)](T_0^6/6!), \\
 g_{21} &= (\partial^5 P/\partial V^4 \partial T)T_0 V_0^5/5!, \\
 g_{22} &= (\partial^5 P/\partial V^3 \partial T^2)T_0^2 V_0^4/5!, \\
 g_{23} &= (\partial^5 P/\partial V^2 \partial T^3)T_0^3 V_0^3/5!, \\
 g_{24} &= (\partial^5 P/\partial V \partial T^4)T_0^4 V_0^2/5!, \\
 g_{25} &= (\partial^5 P/\partial T^5)T_0^5 V_0/6!. \tag{9}
 \end{aligned}$$

Здесь  $c_v$  есть изохорическая теплоемкость, отнесенная к единице объема, т.е.  $c_v = C_V/V$ . Переход в соотношениях (8) к флуктуациям плотности тривиален:  $V' = -M\rho'/\rho_0^2$ , где  $M$  — постоянная масса вещества. Ясно, что подобное разложение свободной энергии по степеням независимых параметров  $u$  и  $v$  оправдано лишь в том случае, если получаемый в результате ряд сходится. При этом, как легко понять, наилучшая сходимость достигается вблизи точек асимптотически устойчивых решений. В самом деле, если  $T_0$  и  $\rho_0$  не есть асимптотически устойчивая точка (во всяком случае это так для идеального газа, см. ниже), то определение

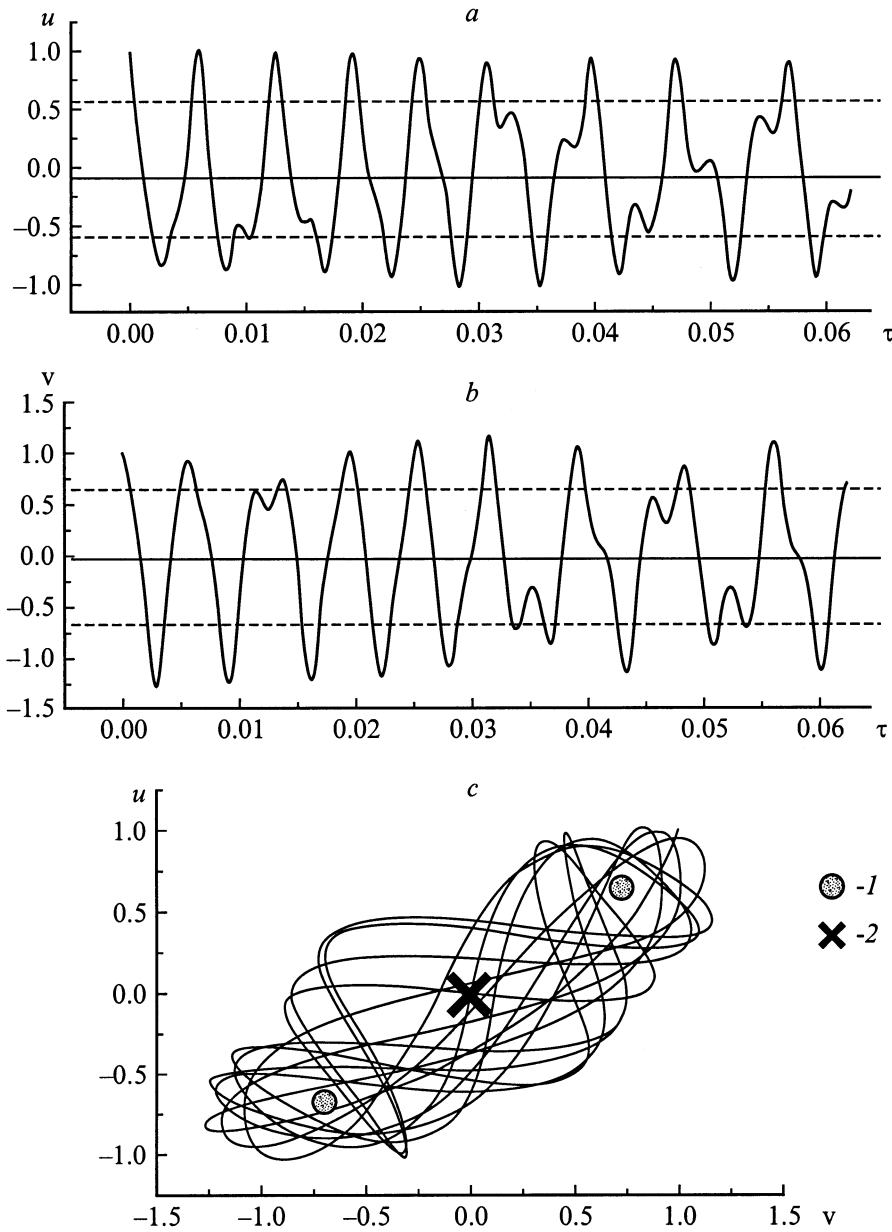
истинных асимптотически замкнутых циклов, вокруг которых фазовые траектории описывают сложные замысловатые траектории следует искать в нелинейных эффектах разложения  $F$  по степеням  $u$  и  $v$ . Если окажется, что ненулевых решений ( $u \neq v \neq 0$ ) несколько и среди них есть такие, которые отвечают условиям  $u_i \ll 1, v_i \ll 1$ , где  $i = 0, 1, 2, \dots, k$ , а  $k$  — количество решений вблизи нуля, то среди них и следует выбрать решение, которое даст, во-первых, сжатие фазового объема ( $\text{div } \mathbf{v} < 0$ ,  $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ , где  $v_x, v_y$  — правая часть уравнений (12)), а, во-вторых, после линеаризации правой части уравнений вблизи этой точки приведет к характеристическому уравнению с отрицательными собственными значениями матрицы.

В качестве примера мы рассмотрим случай идеального газа. В самом деле, поскольку  $PV = NT$  (постоянную Больцмана  $k_B$  полагаем равной единице), то из формул (9) немедленно получаем

$$\begin{aligned}
 g_1 &= P_0, & g_2 &= -c_v T_0, & g_3 &= -P_0, \\
 g_4 &= g_8 = g_9 = 0, & g_5 &= g_6 = -P_0/3, \\
 & & g_7 &= c_v T_0/6, & g_{10} &= -P_0/4, \\
 & & g_{11} &= P_0/4, & g_{12} &= -c_v T_0/12, \\
 & & g_{13} &= -NT_0/5, & g_{14} &= c_v T_0/20, \\
 g_{15} &= NT_0/10, & g_{16} &= g_{17} = g_{18} = 0, \\
 & & g_{19} &= -NT_0/6, & g_{20} &= c_v T_0/30, \\
 g_{21} &= NT_0/30, & g_{22} &= g_{23} = g_{24} = g_{25} = 0. \tag{10}
 \end{aligned}$$

С учетом (4), (5), (8) и (10) система нелинейных уравнений диссипации будет

$$\begin{aligned}
 \partial u/\partial \tau &= \nu t_0 (\Delta u - c_{st}^{-2} \partial^2 u/\partial t^2) - k_1 \Delta v \\
 &+ k_2 (\nabla v)^2 - 2k_3 \nabla(v \nabla u) - k_4 [v \Delta v + (\nabla v)^2] \\
 &- k_5 u \Delta v + k_7 [(\nabla u)^2 + 2u \Delta u] - u + v + v^2/3 \\
 &+ u^2 + 3vu^2/4 - u^3 - u^4 - 2u^3 v/5 - u^5 - u^4 v,
 \end{aligned}$$



**Рис. 2.** Зависимость относительных флуктуаций  $u$  (a) и  $v$  (b) от безразмерного времени  $\tau$ . c — соответствующая "фазовая траектория" для случая  $c_v = 3/2$  при начальных условиях  $u(0) = v(0) = 1$ . 1 — узловые точки, 2 — усредненные "координаты";  $\Delta t = 10^{-6}$ .

$$\begin{aligned}
 \partial v / \partial \tau &= \chi t_0 (\Delta v - c_T^{-2} \partial^2 v / \partial t^2) - k_1 \Delta u \\
 &- k_2 \nabla (u \nabla v) + k_3 (\nabla u)^2 - k_4 v \Delta u \\
 &- k_5 [u \Delta u + (\nabla u)^2] + k_6 [(\nabla v)^2 + 2v \Delta v] \\
 &+ u + c_v v + 2uv/3 - 3c_v v^2 + u^3/4 + c_v v^3/3 \\
 &- c_v v^4/4 - u^4/10 + c_v v^5/5 - u^4/5, \quad (11)
 \end{aligned}$$

где  $k_i = K_i/T_0$  и  $k_i$  имеет размерность  $[\text{см}^2]$ .

Рассмотрим решение уравнений (11) в весьма важном случае однородного распределения плотности и температуры по объему  $V$ . При условии, что

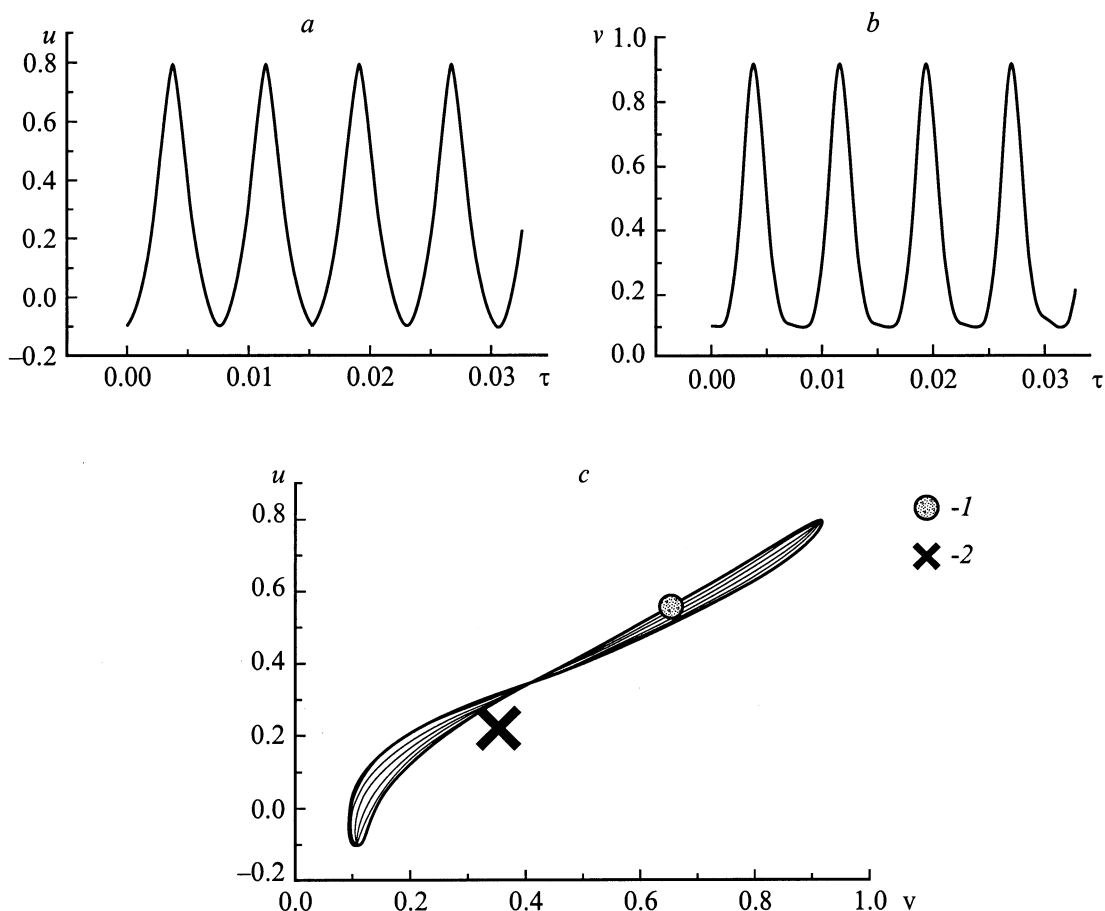
$\partial u / \partial t \gg (\nu / c_{st}^2) \partial^2 u / \partial t^2$  и  $\partial v / \partial t \gg (\chi / c_T^2) \partial^2 v / \partial t^2$ , имеем право на времена  $\delta t \gg \max\{\nu / c_{st}^2, \chi / c_T^2\}$  пренебречь второй производной, в результате чего нелинейные дифференциальные уравнения, заданные параметрически, примут вид

$$\begin{aligned}
 \partial u / \partial t &= -u + v + s_1 (v^2/3 + u^2) + 3\nu u^2/4 \\
 &- u^3 - s_1 (u^4 + 2u^3 v/5) - u^5 - u^4 v,
 \end{aligned}$$

$$\partial v / \partial t = u + c_v v + s_2 (2uv/3 - 3c_v v^2) + u^3/4 + c_v v^3/3$$

$$- s_2 (c_v v^4/4 + u^4/10) + c_v v^5/5 - u^4/5, \quad (12)$$

где  $s_1, s_2$  — знаковые функции ( $s_1 = |u|/u, s_2 = |v|/v$ ).



**Рис. 3.** Зависимость относительных флуктуаций  $u$  (a) и  $v$  (b) от безразмерного времени  $\tau$ . c — соответствующая ”фазовая траектория” для случая  $c_v = 3/2$  при начальных условиях  $u(0) = -0.1, v(0) = 0.1$ . 1 — узловая точка, 2 — усредненные по времени ”координаты”;  $\Delta t = 10^{-6}$ .

Стационарные точки определяются из обычных условий  $\partial u/\partial \tau = \partial v/\partial \tau = 0$  и линеаризованная система уравнений (12) дает следующее характеристическое уравнение:  $\lambda^2 - (c_v - 1)\lambda - c_v - 1 = 0$ . Из него следует, что точка  $u^* = v^* = 0$  не является асимптотически устойчивой [4] фазовой точкой равновесия линейного дифференциального уравнения (рис. 1). Учет нелинейных членов разложения позволяет выделить истинные точки флуктуационного ”равновесия”, определяемые двумя равенствами:

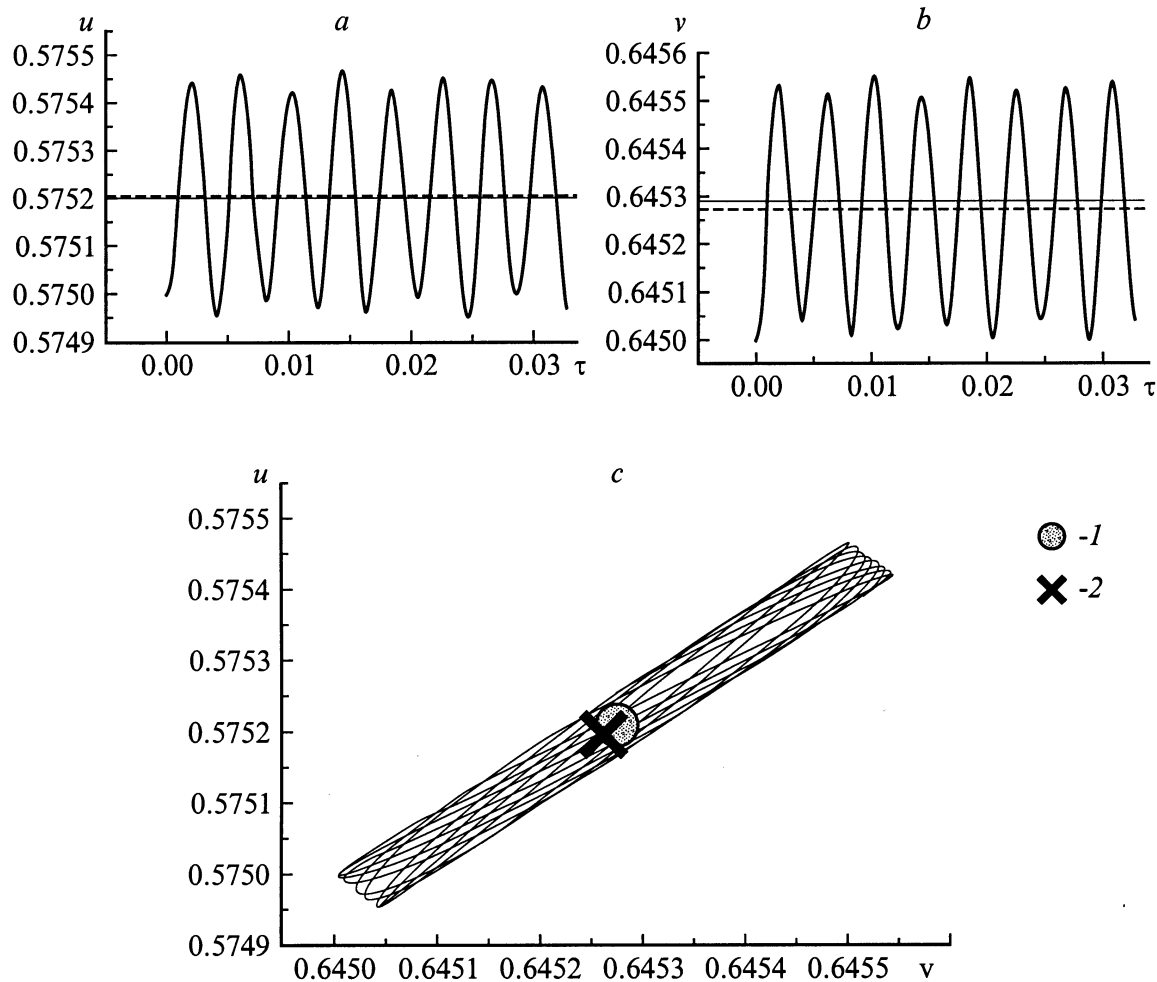
$$\begin{aligned}
 & -u + v + v^2/3 + u^2 + 3vu^2/4 - u^3 - u^4 \\
 & - 2u^3v/5 - u^5 - u^4v = 0, \\
 & u + c_v v + 2uv/3 - 3c_v v^2 + u^3/4 + c_v v^3/3 \\
 & - c_v v^4/4 - u^4/10 + c_v v^5/5 - u^4/5 = 0. \quad (13)
 \end{aligned}$$

Численное решение приведенной системы алгебраических уравнений приводит к трем флуктуационным точкам в действительной области значений. Если  $\nabla v = \partial v_x/\partial u + \partial v_y/\partial v$ , где  $v_x$  и  $v_y$ , как мы уже говорили, соответствуют правым частям уравнений (12), то знак скаляра  $\nabla v$  определяет либо рост фазовой области

( $\nabla v > 0$ ), либо ее сжатие ( $\nabla v < 0$ ) [5]. Случай  $\nabla v = 0$  отвечает так называемым консервативным системам, и здесь не рассматривается. Значения  $\nabla v$  берутся в соответствующей точке, координаты которой зависят от  $c_v$ ! Например, для  $c_v = 3/2$  и начальных условий  $u(0) = 0.1, v(0) = 0.1$  находим  $u_0 = 0.302, v_0 = 0.432, \nabla v = -2.24$  (см. таблицу), и фазовая область при этом сжимается.

Точки флуктуаций при начальных условиях  $u(0) = 0.1, v(0) = 0.1$

$c_v$	$ u_0 $	$ v_0 $	$\text{div } v$
3/2	0.302	0.432	-2.24
5/2	0.32	0.417	-3.54
7/2	0.352	0.394	-4.58
9/2	0.285	0.378	-5.33
11/2	0.305	0.361	-6.02
13/2	0.317	0.308	-5.27
15/2	0.331	0.344	-7.53
17/2	0.328	0.337	-8.17
21/2	0.329	0.326	-9.42
25/2	0.323	0.320	-10/74



**Рис. 4.** Зависимость относительных флуктуаций  $u$  (а) и  $v$  (б) от безразмерного времени  $\tau$ .  $c$  — соответствующая "фазовая траектория" для случая  $c_v = 3/2$  при начальных условиях непосредственно вблизи устойчивой точки [ $u_0 = 0.5752$ ,  $v_0 = 0.6453$ ]. 1 — узловая точка, 2 — усредненные по времени "координаты";  $\Delta t = 10^{-6}$ .

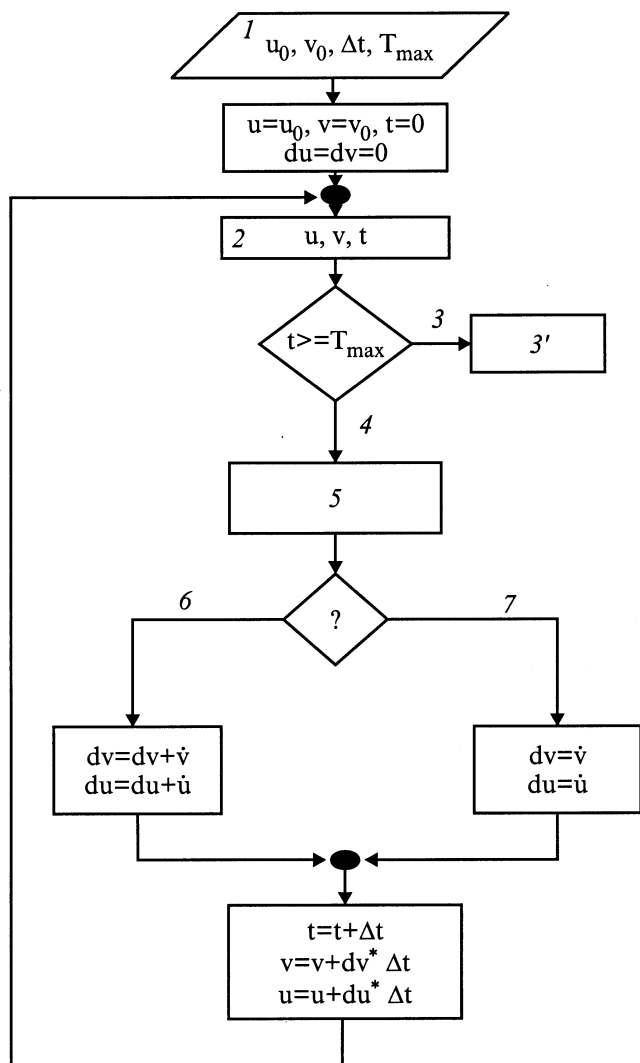
Эта точка представляет собой флуктуационную точку. Именно при этом значении "координат" должна определяться равновесная плотность в газе  $\rho_{eq}$  и равновесная температура  $T_{eq}$ . Причем  $T_{eq} = T_0(1 + v_0)$ ,  $\rho_{eq} = \rho_0(1 + u_0)$ , а  $\rho_0$  и  $T_0$  "перенормируются" с помощью этих формул, как  $\rho_0 = \rho_{eq}/(1 + u_0)$ ,  $T_0 = T_{eq}/(1 + v_0)$ .

То, что эта точка оказалась одна, вовсе не удивительно: при соответствующих начальных условиях (рис. 2–4) и из-за симметрии гамильтониана фазовая траектория "скатывается" либо в отрицательную область значений  $u-v$  ( $u(0) = -0.1$ ,  $v(0) = -0.1$ ), либо в положительную ( $u(0) = 0.1$ ,  $v(0) = 0.1$ ) и приближается к ней по разнообразным фазовым траекториям (эта точка обозначена крестиком на рис. 2–4). Кроме того, как следует из этих рисунков, ясно видна осциллирующая зависимость  $u(t)$  и  $v(t)$  (рис. 2, а, б–4, а, б).

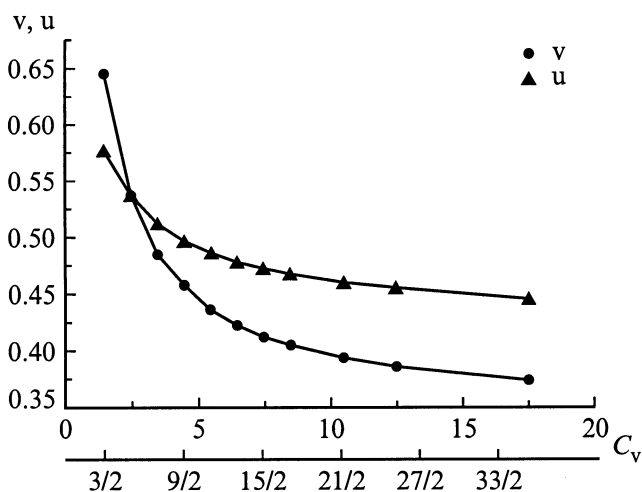
Что касается стационарных точек, то при задании начальных условий  $u(0) = 1$ ,  $v(0) = 1$  в результате

интегрирования мы приходим в точку, расположенную в первом квадранте (рис. 1). Однако при численном расчете фазовой траектории оказывается, что при данных начальных условиях система будет осциллировать вокруг точки 0–0 (рис. 2). Независимо от начальных условий флуктуационная точка всегда расположена между стационарными точками. Интегрирование системы уравнений (12) осуществлено с помощью математической программы, блок-схема которой представлена на рис. 5.

Рис. 6 иллюстрирует зависимость относительных флуктуаций от теплоемкости вещества. Следует заметить, что, хотя выше был рассмотрен только идеальный газ, полученные результаты тем не менее можно обобщить и на реальные газы, и на жидкости, а отличие от случая идеального газа заключается лишь в значениях численных параметров  $u$  и  $v$ , которые в свою очередь зависят от буквенных величин, фигурирующих в формулах (9).



**Рис. 5.** Блок-схема программы расчета интегральных кривых и "фазовых траекторий": 1 — ввод, 2 — вывод, 3 — да, 3' — стоп, 4 — нет, 5 — определение  $\dot{u}(u, v)$ ;  $\dot{v}(u, v)$ , 6 — траектории, 7 — интегральные кривые.



**Рис. 6.** Зависимость координат устойчивых точек от теплоемкости  $c_v$ .

## Заключение

В итоге проведенного исследования следует сказать несколько слов по поводу основных результатов, полученных в работе. Вполне объяснимо, что отсутствие базовых предпосылок в прошлое время не позволило вплотную приблизиться к решению задачи об описании временного поведения флуктуаций в жидкостях и газах. В свете же последних достижений в этой области (см., скажем, литературу [6–12]) некоторые переосмысленные явления требуют весьма серьезной корректировки и доработки в плане постановки новой (или уточненной) проблемы. Именно поэтому наша задача, решение которой было отражено выше, отличается от соответствующих классических задач по газо- и гидродинамике [1] и описывается с помощью лагранжева формализма на языке классического действия, что является весьма удобным при учете различного рода нелинейных эффектов. Численный анализ уравнений, учитывающих нелинейные поправки в лагранжиане, показал, что асимптотически устойчивых точек (как и следовало ожидать) не существует, а найденные численным интегрированием значения  $u_0, v_0$  являются центрами замкнутых циклов или точками, вокруг которых система флуктуирует. Истинная точка квазиравновесия (на языке описанных выше флуктуаций) — это такая точка, вблизи которой система "дышит" и проводит все свое время "жизни". Последнее с наглядностью и проиллюстрировано рис. 2–4. Видно, что вблизи флуктуационных точек (отмеченные крестиками на рисунках) фазовая траектория блуждает вокруг них весьма интенсивно, а стало быть, именно в окрестности этих точек справедливо и эргодическое описание физических параметров подобных систем. Следует еще пожалуй отметить, что качественная картина флуктуаций не зависит от шага интегрирования (шаг менялся от  $10^{-3}$  до  $10^{-20}$ ) и единственное, что происходит, так это то, что зависимости  $u(t)$  и  $v(t)$  лишь "гуляют" наподобие гармошки вдоль оси времени  $\tau$ . Частота этих флуктуаций, как видно из рис. 3, *a* и *b*, для шага  $\Delta\tau = 10^{-6}$  есть  $\omega \approx 2\pi/0.25t_0 = 8\pi/t_0$ .

## Список литературы

- [1] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. Т. 6.
- [2] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. М.: Наука, 1973. Т. 1.
- [3] Гладков С.О. // Перспективные материалы. 2000. № 1. С. 16–20.
- [4] Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1964.
- [5] Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С. Введение в синергетику. М.: Наука, 1990. 270 с.
- [6] Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics and Climate Dynamics. Int. School of Physics "Enrico Fermi". Course 88.
- [7] Chaos in Astrophysics / Ed. J.R. Buchler et al. Dordrecht: Reidel, 1985.

- [8] Random fluctuations and Pattern Growth: Experiments and Models / Ed. H.E. Stanley, N. Ostrowsky. Dordrecht: Kluwer Academic, 1988.
- [9] *Шустер Г.* Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988.
- [10] Фракталы в физике / Под ред. Л. Пьетронеро, Э. Тозатти. М.: Мир, 1988.
- [11] *Хакен Г.* Информация и самоорганизация. Макроскопический подход к сложным системам. М.: Мир, 1991.
- [12] *Гладков С.О.* Физика композитов: термодинамические и диссипативные свойства. М.: Наука, 1999.