

01;03

Нелинейные капиллярные колебания и устойчивость сильно заряженной капли при одномодовой начальной деформации большой амплитуды

© С.О. Ширяева

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
E-mail:shir@uniar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 12 апреля 2000 г.)

Исследованы во втором порядке малости спектр и устойчивость нелинейных колебаний заряженной капли, вызванных виртуальным начальным возмущением равновесной сферической формы, пропорциональным произвольной моде свободных осцилляций.

1. Проблема устойчивости заряженных капель представляет значительный интерес в связи с многочисленными приложениями в геофизике, научном приборостроении, технической физике и технологии [1]. Тем не менее большая часть теоретических исследований выполнена в линейном приближении, и лишь сравнительно недавно стали выполняться теоретические аналитические и численные работы, принимающие во внимание реальную нелинейность феномена [2–10], хотя некоторые результаты нелинейных исследований получены и в более простом линейном приближении [11,12]. Будем решать задачу о расчете формы и параметров осцилляций большой амплитуды поверхности капли, несущей электрический заряд, меньший критического в смысле устойчивости по Рэлею, в нелинейной постановке (более общей, чем в [2–10]) с точностью до слагаемых второго порядка малости по амплитуде начального возмущения формы методом многих масштабов. Использование иной по сравнению с ранее выполненными работами [2–10] методики удовлетворения начальным условиям позволяет получить решение во втором порядке малости по амплитуде начального возмущения для ситуации, когда начальное возмущение поверхности связано с возбуждением произвольной моды колебаний.

2. Рассмотрим эволюцию во времени формы поверхности капли идеальной, несжимаемой идеально проводящей жидкости с плотностью ρ , с коэффициентом поверхностного натяжения σ . Примем, что капля находится в вакууме, ее полный заряд равен Q , а объем определяется объемом сферы радиуса R . Пусть в начальный момент времени $t = 0$ равновесная сферическая форма капли претерпела виртуальное осесимметричное возмущение фиксированной амплитуды, существенно меньшей радиуса капли, пропорциональное одному из полиномов Лежандра. Зададимся целью определить спектр возникающих в такой ситуации капиллярных осцилляций капли (форму капли в последующие моменты времени $t > 0$). В нижеследующих рассуждениях будем пользоваться безразмерными переменными, в которых $R = \rho = \sigma = 1$.

Поскольку начальное возмущение поверхности капли осесимметрично и мало, то введем следующие упроще-

ния: форму поверхности капли будем принимать осесимметричной как в начальный момент, так и во все последующие моменты времени, а уравнение, описывающее форму поверхности капли, в полярной системе координат с началом в центре капли представим в виде

$$r(\Theta, t) = 1 + \xi(\Theta, t), \quad |\xi| \ll 1. \quad (1)$$

Движение жидкости в капле будем полагать потенциальным, т.е. примем, что поле скоростей движения жидкости в капле $\mathbf{V}(\mathbf{r}; t) = \nabla\psi(\mathbf{r}; t)$ полностью определяется функцией потенциала скоростей $\psi(\mathbf{r}; t)$.

Система уравнений, описывающих эволюцию капли, в изложенной формулировке будет состоять из системы уравнений Лапласа для потенциала скорости $\psi(\mathbf{r}; t)$ и электростатического потенциала $\Phi(\mathbf{r}; t)$

$$\Delta\psi(\mathbf{r}; t) = 0, \quad \Delta\Phi(\mathbf{r}; t) = 0 \quad (2), (3)$$

и граничных условий

$$r \rightarrow 0: \quad \psi(\mathbf{r}; t) \rightarrow 0, \quad (4)$$

$$r \rightarrow \infty: \quad \Phi(\mathbf{r}; t) \rightarrow 0, \quad (5)$$

$$r = 1 + \xi(\Theta, t): \quad \frac{\partial\xi}{\partial t} = \frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial\xi}{\partial\Theta} \frac{\partial\psi}{\partial\Theta}, \quad (6)$$

$$\Delta p - \frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{1}{2}(-\nabla\psi)^2 + \frac{1}{8\pi}(\nabla\Phi)^2 = \nabla\mathbf{n} \quad (7)$$

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \Phi_g(t). \quad (8)$$

Чтобы замкнуть систему (2)–(8), сформулируем дополнительные условия: неизменности полного заряда капли

$$-\frac{1}{4\pi} \oint_S (\mathbf{n}\nabla\Phi) dS = Q, \quad \text{где } S = \begin{cases} r = 1 + \xi(\Theta, t), \\ 0 \leq \Theta \leq \pi, \\ 0 \leq \phi \leq 2\pi \end{cases} \quad (9)$$

и неизменности объема капли

$$\int_V r^2 dr \sin\Theta d\Theta d\phi = \frac{4}{3}\pi,$$

где

$$V = \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 + \xi(\Theta, t), \\ 0 \leq \Theta \leq \pi, \\ 0 \leq \phi \leq 2\pi. \end{cases} \quad (10)$$

Начальные условия к поставленной задаче сформулируем в виде задания начальной осесимметричной деформации равновесной сферической формы капли вида

$$t = 0: \xi(\Theta) = \xi_0 + \varepsilon P_k(\mu), \quad (k \geq 2), \quad \mu \equiv \cos \Theta \quad (11)$$

и равенства нулю начальной скорости движения поверхности

$$t = 0: \frac{\partial \xi(\Theta)}{\partial t} = 0. \quad (12)$$

В выражениях (6)–(12) используются следующие обозначения: Δp — перепад постоянных давления внутри и вне капли в состоянии равновесия; \mathbf{n} — единичный вектор нормали к поверхности (1); $\Phi_g(t)$ — постоянный вдоль поверхности капли потенциал; ε — амплитуда начального возмущения формы поверхности капли; $P_k(\mu)$ — полином Лежандра порядка k ; ξ_0 — константа, определяемая из условия (10) с точностью до слагаемого второго порядка малости,

$$\xi_0 = -\varepsilon^2 \frac{1}{(2k+1)} + O(\varepsilon^3). \quad (13)$$

3. Для отыскания решения поставленной задачи с точностью до квадратичных по малому параметру ε слагаемых воспользуемся классическим методом многих масштабов [13]. Для этого искомые функции $\xi(\Theta, t)$, $\psi(\mathbf{r}, t)$, $\Phi(\mathbf{r}, t)$ представим в виде рядов по степеням малого параметра ε и будем считать зависящими не просто от времени t , а от разных его масштабов T_m , определенных через малый параметр $T_m \equiv \varepsilon^m t$,

$$\xi(\Theta, t) = \sum_{m=0} \varepsilon^m \xi^{(m)}(\Theta, T_0, T_1, T_2, \dots),$$

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sum_{m=0} \varepsilon^m \psi^{(m)}(\Theta, T_0, T_1, T_2, \dots),$$

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \sum_{m=0} \varepsilon^m \Phi^{(m)}(\Theta, T_0, T_1, T_2, \dots). \quad (14)$$

Производные по времени будем вычислять, имея в виду полный набор различных его масштабов, по правилу

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + O(\varepsilon^3).$$

Подставляя разложения (14) в краевую задачу (2)–(10) и приравнявая в каждом из уравнений слагаемые одного порядка малости, несложно получить набор краевых задач для последовательного определения неизвестных функций $\xi^{(m)}$, $\psi^{(m)}$, $\Phi^{(m)}$, где $m = 1, 2, 3, \dots$

В силу линейности уравнений (2)–(5) им должна удовлетворять каждая из функций $\psi^{(m)}$, $\Phi^{(m)}$ в разложениях (14), поэтому представим последние как решения системы (2)–(5) в виде

$$\begin{aligned} \psi^{(m)}(r, \Theta, T_0, T_1, T_2, \dots) \\ = \sum_{n=1}^{\infty} D_n^{(m)}(T_0, T_1, T_2, \dots) r^n P_n(\mu), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi^{(m)}(r, \Theta, T_0, T_1, T_2, \dots) \\ = \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(m)}(T_0, T_1, T_2, \dots) r^{-(n+1)} P_n(\mu). \end{aligned} \quad (15)$$

В виде рядов по полиномам Лежандра будем искать и последовательные поправки $\xi^{(m)}$ к выражению, определяющему форму поверхности капли,

$$\begin{aligned} \xi^{(m)}(r, \Theta, T_0, T_1, T_2, \dots) \\ = \sum_{n=1}^{\infty} M_n^{(m)}(T_0, T_1, T_2, \dots) P_n(\mu). \end{aligned} \quad (16)$$

4. В нулевом порядке малости по ε из задачи (2)–(10) получим решение, описывающее равновесное состояние системы,

$$\begin{aligned} \xi^{(0)}(r, \Theta, T_0, T_1, T_2, \dots) &= 0; \\ \psi^{(0)}(r, \Theta, T_0, T_1, T_2, \dots) &= 0; \\ \Phi^{(0)}(r, \Theta, T_0, T_1, T_2, \dots) &= \frac{Q}{r}. \end{aligned} \quad (17)$$

5. В первом порядке малости по ε для определения коэффициентов $D_n^{(m)}$, $F_n^{(m)}$, $M_n^{(m)}$ в решениях (15), (16), (при $m = 1$) граничные условия (6)–(10) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} r = 1: \quad \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial T_0} &= \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial r}, \\ -\frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial T_0} + \frac{1}{4\pi} \frac{d\Phi^{(0)}}{dr} \left(\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} + \frac{d\Phi^{(0)}}{dr^2} \xi^{(1)} \right) &= -(2 + \Delta_\Omega) \xi^{(1)}, \\ \Phi^{(1)} + \frac{d\Phi^{(0)}}{dr} - \xi^{(1)} &= \Phi_g^{(1)}, \\ \int_0^\pi \left[\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} + \left(\frac{d^2 \Phi^{(0)}}{dr^2} + 2 \frac{d\Phi^{(0)}}{dr} \right) \xi^{(1)} \right] d\mu &= 0, \\ \int_0^\pi \xi^{(1)} d\mu = 0, \quad \Delta_\Omega &= \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Выражения для поправок первого порядка к коэффициентам разложений (15), (16) несложно найти из системы (18) в виде

$$\begin{aligned} M_0^{(1)}(T_0, T_1, T_2, \dots) &= 0, \\ M_0^{(1)}(T_0, T_1, T_2, \dots) &= A_n(T_1, T_2, \dots) \exp(i\omega_n T_0) + \text{к.с.} \\ &(n \geq 1), \end{aligned} \quad (19)$$

$$D_n^{(1)}(T_0, T_1, T_2, \dots) = \frac{1}{n} \frac{\partial M_n^{(1)}(T_0, T_1, T_2)}{\partial T_0} \quad (n \geq 1),$$

$$F_n^{(1)}(T_0, T_1, T_2, \dots) = QM_n^{(1)}(T_0, T_1, T_2, \dots) \quad (n \geq 0), \quad (20)$$

$$A_n(T_1, T_2) \equiv a_n(T_1, T_2, \dots) \exp[ib_n(T_1, T_2, \dots)],$$

$$\Phi_g^{(1)} = 0, \quad \omega_n^2 \equiv n(n-1)[(n+2) - W], \quad W \equiv \frac{Q^2}{4\pi}. \quad (21)$$

Аббревиатура "к.с." означает комплексно сопряженные слагаемые к выписанным. Зависимости функций a_n и b_n от параметров T_1, T_2 и т.д. определяются в следующих порядках малости. Чтобы завершить рассмотрение задачи в линейном по ε приближении, достаточно принять, что a_n и b_n — константы и определить их из начальных условий (11), (12). Посмотрим, какова будет погрешность такого приближения решения и на каких временных интервалах оно будет справедливым. Очевидно, что

$$a_n(T_1, T_2, \dots) \approx \hat{a}_n + O(\varepsilon t);$$

$$b_n(T_1, T_2, \dots) \approx \hat{b}_n + O(\varepsilon t), \quad (22)$$

где \hat{a}_n, \hat{b}_n — константы.

В линейном по ε приближении разложение (14) для возмущенной поверхности имеет вид

$$\xi(\Theta, t) \approx \varepsilon \xi^{(1)}[\Theta, T_0, a_n(T_1, \dots), b_n(T_1, \dots)] + O(\varepsilon^2)$$

или с учетом (22)

$$\xi(\Theta, t) \approx \varepsilon \xi^{(1)}(\Theta, t, \hat{a}_n, \hat{b}_n) + \varepsilon O(\varepsilon t). \quad (23)$$

Ошибка в этом разложении окажется порядка первого члена, если $t \approx O(\varepsilon^{-1})$. Для значений $t \geq O(\varepsilon^{-1})$ данное разложение становится непригодным. Таким образом, выражение (23) справедливо на временном интервале $t \leq O(1)$, в этом случае ошибка составляет величину $\sim \varepsilon^2$. Однако при исследовании тенденций движения поверхности использовать (23) можно и на временных интервалах $t \leq O(\varepsilon^{-1})$ при условии выполнения требования сравнимости решения первого порядка с величиной начального возмущения. Более детальная информация о пределах применимости выписанного разложения может быть получена при анализе в следующем квадратичном порядке малости по ε .

Подставляя разложение (23) с учетом (16), (19)–(22) в начальные условия (11)–(13) и приравнивая друг другу величины одного порядка малости, несложно найти

$$\hat{a}_n = \frac{1}{2} \delta_{nk}, \quad b_n = 0 \quad (n \geq 1),$$

где δ_{nk} — символ Кронекера ($\delta_{nk=1}$ при $n = k$ и $\delta_{nk} = 0$ при $n \neq k$).

В итоге функция, описывающая эволюцию формы поверхности капли со временем в линейном по ε приближении, будет иметь вид

$$\xi(\Theta, t) = \varepsilon \cos(\omega_k t) P_k(\mu) + O(\varepsilon^2). \quad (24)$$

Согласно этому решению в первом порядке по амплитуде возмущения ε поверхность капли совершает гармонические колебания в окрестности равновесной сферы, соответствующие k -й (начально возбужденной) моде.

Для потенциала скорости и электростатического потенциала в этом же приближении получим следующие решения:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = -\varepsilon \frac{\omega_k}{k} \sin(\omega_k t) P_k(\mu) + O(\varepsilon^2),$$

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{Q}{r} + \varepsilon \cos(\omega_k t) \frac{Q}{r^3} P_k(\mu) + O(\varepsilon^2). \quad (25)$$

6. Для определения поправок второго порядка малости к выписанным решениям (т.е. для отыскания функций $\xi^{(2)}(\Theta, t)$, $\psi^{(2)}(\mathbf{r}, t)$, $\Phi^{(2)}(\mathbf{r}, t)$) выпишем систему уравнений, получающуюся из граничных условий (6)–(10), приравниванием слагаемые $\sim \varepsilon^2$

$$r = 1: \quad \frac{\partial \xi^{(2)}}{\partial T_0} + \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial T_1} = \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi^{(1)}}{\partial r^2} \xi^{(1)} - \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \Theta} \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \Theta},$$

$$- \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial T_0} - \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial T_1} - \frac{\partial^2 \psi^{(1)}}{\partial r \partial T_0} \xi^{(1)} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \Theta} \right)^2 \right]$$

$$+ \frac{1}{8\pi} \left[2 \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial r} + \left(\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \Theta} \right)^2 + 2 \frac{d\Phi^{(0)}}{dr} \right]$$

$$\times \frac{d^2 \Phi^{(0)}}{dr^2} \xi^{(2)} + 2 \left(\frac{d\Phi^{(0)}}{dr} \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial r^2} + \frac{d^2 \Phi^{(0)}}{dr^2} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} \right) \xi^{(1)}$$

$$+ \left(\frac{d\Phi^{(0)}}{dr} \frac{d^3 \Phi^{(0)}}{dr^3} + \left(\frac{d^2 \Phi^{(0)}}{dr^2} \right)^2 \right) (\xi^{(1)})^2$$

$$+ (2 + \Delta_\Omega) \xi^{(2)} - 2 \xi^{(1)} (1 + \Delta_\Omega) \xi^{(1)} = 0,$$

$$\Phi^{(2)} + \left[\frac{d\Phi^{(0)}}{dr} \xi^{(2)} + \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} \xi^{(1)} + \frac{1}{2} \frac{d^2 \Phi^{(0)}}{dr^2} (\xi^{(1)})^2 \right] = \Phi_g^{(2)},$$

$$\int_0^\pi \left[\frac{d\Phi^{(2)}}{dr} \left(\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} \right) \xi^{(1)} + \left(\frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \right) \right]$$

$$\times \xi^{(2)} + \left(\frac{1}{2} \frac{d^3 \Phi^{(0)}}{dr^3} + 2 \frac{d\Phi^{(0)}}{dr^2} + \frac{d\Phi^{(0)}}{dr} \right)$$

$$\times (\xi^{(1)})^2 - \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \Theta} \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \Theta} \Big] d\mu = 0,$$

$$\int_0^\pi [\xi^{(2)}(\Theta, t) + (\xi^{(1)}(\Theta, t))^2] d\mu = 0. \quad (26)$$

Подставляя разложения (15), (16) (при $m = 2$), а также решения (17) и (19)–(21) в систему граничных условий (26), можно получить дифференциальные уравнения для нахождения неизвестных коэффициентов $M_n^{(2)}(T_0, T_1, T_2, \dots)$, требование исключения из решений которых секулярных членов приводит к соотношениям

$$\frac{\partial a_n}{\partial T_1} = 0, \quad \frac{\partial b_n}{\partial T_1} = 0,$$

т.е. получаем, что a_n и b_n не зависят от времени T_1 . Их зависимость от более медленных времен T_2, T_3 и т.д. может быть определена в следующих порядках приближений. Окончательное решение полученных из систем (26) уравнений записывается в виде

$$M_0^{(2)}(T_0, T_2, \dots) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} \{A_n(T_2, \dots) \times \bar{A}_n(T_2, \dots) + [A_n(T_2, \dots)]^2 \exp(i2\omega_n T_0) + \text{к.с.}\},$$

$$M_0^{(2)}(T_0, T_2, \dots) = \left\{ \left[\frac{c_n(T_2, \dots)}{a_n(T_2, \dots)} + id_n(T_2, \dots) \right] \times A_n(T_2, \dots) \exp(i\omega_n T_0) + \text{к.с.} \right\} + N_n(T_0, T_2, \dots),$$

$$N_n^{(2)}(T_0, T_2, \dots) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \{ \lambda_{mln}^{(+)} A_m(T_2, \dots) A_l(T_2, \dots) \times \exp[i(\omega_m + \omega_l)T_0] + \lambda_{mln}^{(-)} A_m(T_2, \dots) \bar{A}_l(T_2, \dots) \times \exp[i(\omega_m - \omega_l)T_0] + \text{к.с.} \},$$

$$\lambda_{mln}^{(+)} = \frac{[\gamma_{mln} \pm \omega_m \omega_l \eta_{mln}]}{\omega_n^2 - (\omega_m \pm \omega_l)^2},$$

$$\gamma_{mln} \equiv K_{mln} \left[\omega_m^2 (n-m+1) + 2n[l(l+1) - 1] + [l(m+1) - m(2m-2n+7) + 3]n \frac{W}{2} \right] + \alpha_{mln} \left[\frac{1}{m} \omega_m^2 + n \frac{W}{2} \right],$$

$$\eta_{mln} \equiv K_{mln} \left(\frac{n}{2} - m + 1 \right) + \alpha_{mln} \frac{1}{m} \left(1 + \frac{n}{2l} \right),$$

$$K_{mln} \equiv [C_{mln}^{000}]^2, \quad \alpha_{mln} \equiv -\sqrt{m(m+1)l(l+1)} C_{mln}^{000} C_{mln}^{-110},$$

$$C_{mln}^{000} \equiv \begin{cases} 0, & \text{если } m+l+n = 2g+1, \\ \text{где } g \text{ — целое число,} \\ \frac{(-1)^{g-n} \sqrt{2n+1} g!}{(g-m)!(g-l)!(g-n)!} \left[\frac{(2g-2m)!(2g-2l)!(2g-2n)!}{(2g+1)!} \right]^{1/2}, & \text{если } m+l+n = 2g(g \text{ — целое число}), \end{cases}$$

$$C_{mln}^{-110} \equiv \sqrt{2n+1} n!$$

$$\times \left[\frac{(m+l-n)! m(m+1)}{(n+m-l)!(n-m+l)!(m+l+n+1)!(l+1)} \right]^{1/2} \times \sum_z \frac{(-1)^{m+1+z} (m+z-1)!(n+l-z+1)!}{z!(m-z+1)!(n-z)!(l-n+z-1)!}. \quad (27)$$

В последней сумме суммирование ведется по всем целым значениям z , для которых выражения под знаком факториала неотрицательны. Горизонтальная черта сверху над A_n в (27) обозначает комплексное сопряжение. Отметим, что C_{mln}^{000} и C_{mln}^{110} (коэффициенты Клебша–Гордана [14]) отличны от нуля только, если их нижние индексы удовлетворяют соотношениям

$$|m-l| \leq n \leq (m+l),$$

$$m+l+n = 2g \quad (g \text{ — целое число}). \quad (28)$$

Коэффициенты в разложениях (15) для потенциала скорости $\psi^{(m)}(\mathbf{r}; t)$ и электростатического потенциала $\Phi^{(m)}(\mathbf{r}; t)$ связаны с решениями (19) и (27) следующими соотношениями:

$$D_n^{(2)}(T_0, T_2, \dots) = \frac{1}{n} \left\{ \frac{\partial M_n^{(2)}(T_0, T_2, \dots)}{\partial T_0} \times \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} [m(m-1)K_{mln} - \alpha_{mln}] \frac{1}{m} \times \frac{\partial M_m^{(1)}(T_0, T_2, \dots)}{\partial T_0} M_l^{(1)}(T_0, T_2, \dots) \right\};$$

$$F_0^{(2)}(T_0, T_2, \dots) = 0,$$

$$F_n^{(2)}(T_0, T_2, \dots) = Q \{ M_n^{(2)}(T_0, T_2, \dots) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} m K_{mln}(T_0, T_2, \dots) \times M_m^{(1)}(T_0, T_2, \dots) M_l^{(1)}(T_0, T_2, \dots) \}.$$

В решении (27) $c_n(T_2, \dots)$ и $d_n(T_2, \dots)$ — неизвестные функции времени, которые, как и функции a_n и b_n , не зависят от временных масштабов T_0 и T_1 . Аналогично тому, как это делалось для случая линейного приближения, чтобы завершить рассмотрение задачи в квадратичном по ε приближении, следует принять неизвестные функции c_n, d_n, a_n и b_n равными константам, величины которых определяются начальными условиями (11)–(13). В этом случае разложение (14) для функции, описывающей искажение формы поверхности капли, принимает вид

$$\xi(\Theta, t) \approx \varepsilon \xi^{(1)}(\Theta, T_0, \hat{a}_n, \hat{b}_n) + \varepsilon^2 \xi^{(2)}(\Theta, T_0, \hat{a}_n, \hat{b}_n, \hat{c}_n, \hat{d}_n) + \varepsilon O(\varepsilon^2 t), \quad (29)$$

$\hat{a}_n, \hat{b}_n, \hat{c}_n, \hat{d}_n$ — константы.

Выражение (29) справедливо на временном интервале $t \leq O(1)$ с ошибкой $\sim \varepsilon^3$. На временном интервале $O(1) < t \leq O(\varepsilon^{-1})$ величина ошибки сравнима со вторым слагаемым (с поправкой второго порядка малости), следовательно, в разложении (29) справедливым останется лишь первый член, соответствующий линейному приближению. Таким образом, приближенное линейное решение задачи (24), (25) строго применимо (равномерно пригодно) на временном интервале $t \leq O(\varepsilon^{-1})$. Всем разложением (29) можно пользоваться на временных интервалах $t \leq O(\varepsilon^{-1})$, имея в виду, что квадратичное по ε слагаемое должно оставаться лишь малой поправкой к линейному по ε слагаемому.

Отметим, что характерным масштабом измерения времени в принятых безразмерных переменных является величина $t_* = (R^3 \rho / \sigma)^{1/2}$. Для капли воды миллиметрового радиуса она будет ~ 0.004 s, а при $R = 1$ cm $t_* \sim 0.12$ s. Следовательно, выражение (29) будет адекватно описывать временную эволюцию формы капли воды для интервала времени $t \leq 0.01$ s (при $R = 1$ mm) и $t \leq 0.3$ s (при $R = 1$ cm). Решение же (24) (если принять амплитуду возмущения $\varepsilon \sim 0.1$) будет оставаться справедливым вплоть до значений времени, на порядок больших приведенных.

Подставим разложение (29) с учетом (16) в начальные условия (11)–(13) и, приравнявая друг другу величины одного порядка малости, получим следующие соотношения:

$$t = 0: \quad M_n^{(1)} = \delta_{nk}, \quad M_n^{(2)} = -\frac{\delta_{n0}}{2k+1},$$

$$\frac{\partial M_n^{(1)}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial M_n^{(2)}}{\partial t} = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

из которых, используя выражения (19), (20), (27), определим неизвестные константы $\hat{a}_n, \hat{b}_n, \hat{c}_n, \hat{d}_n$:

$$\hat{a}_n = \frac{1}{2} \delta_{nk}, \quad \hat{b}_n = 0,$$

$$\hat{c}_n = -\frac{1}{2} N_n(t=0), \quad \hat{d}_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

При этом решения (19), (20), (27) для коэффициентов $M_n^{(m)}(t)$ примут окончательный вид

$$M_n^{(1)}(t) = \delta_{nk} \cos(\omega_n t),$$

$$M_0^{(2)}(t) = -\frac{1}{2(2k+1)} [1 + \cos(2\omega_k t)],$$

$$M_n^{(2)}(t) = -N_n(0) \cos(\omega_n t) + N_n(t) \quad (n \geq 1),$$

$$N_n(t) = \frac{1}{2} (\lambda_{kkn}^{(-)} + \lambda_{kkn}^{(+)} \cos(2\omega_k t)). \quad (30)$$

Несложно заметить, что коэффициенты $M_n^{(2)}(t)$ пропорциональны величинам $\lambda_{kkn}^{(\pm)}$, которые в свою очередь, согласно обозначениям, введенным в (27), пропорциональны коэффициентам Клебша–Гордана C_{kkn}^{000} и C_{kkn}^{-110} и,

следовательно, (см. (28)), отличны от нуля только для $n = 2j$ ($j = 0, \dots, k$).

Подставляя (30) в (29), получим, что изменение во времени формы поверхности капли с точностью до слагаемых второго порядка малости (на временных интервалах $t \leq O(\varepsilon^{-1})$) будет описываться функцией

$$\begin{aligned} \xi(\Theta, t) \approx & \varepsilon \cos(\omega_k t) P_k(\mu) - \varepsilon^2 \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{(2k+1)} \right. \\ & \times [1 + \cos(2\omega_k t)] + \sum_{j=1}^k [(\lambda_{k,k,2j}^{(-)} + \lambda_{k,k,2j}^{(+)}) \cos(\omega_{2j} t) \\ & \left. - (\lambda_{k,k,2j}^{(-)} + \lambda_{k,k,2j}^{(+)} \cos(2\omega_k t))] P_{2j}(\mu) \right\} + O(\varepsilon^3 t). \quad (31) \end{aligned}$$

7. Из (31) видно, что начальное возмущение любой k -й (четной либо нечетной) одиночной моды капиллярных колебаний приводит к возбуждению во втором порядке малости только четных мод с номерами, лежащими в диапазоне $[0; 2k]$, что иллюстрируется рис. 1, *a-d*. На рисунках приведены рассчитанные по (31) графики зависимости от времени амплитуд $M_n^{(2)}$ различных мод капиллярных осцилляций заряженной капли, возбуждающихся во втором порядке малости, в результате взаимодействия. Начальное искажение равновесной сферической формы задано в виде возмущения мод 2–5 (рис. 1, *a-d* соответственно) при $W = 3.9$ (критическое для начала неустойчивости сферической капли значение параметра W определено соотношением $W_* = 4$). Несложно видеть, что (в противоречии с предсказаниями линейной теории) независимо от вида начального возмущения равновесной сферической формы капли, несущей заряд, близкий к критическому, но меньший его, неустойчивость по отношению к собственному заряду может быть реализована через быстрое нарастание амплитуды основной моды ($n = 2$). Этот вывод качественно согласуется с данными работы [8], посвященной численному расчету нелинейных осцилляций заряженной капли. Для ситуации, когда начальная деформация связана с пятой модой, имеется и количественное согласие временных зависимостей амплитуд возбуждения во втором порядке малости мод с работой [8].

Из рис. 1 видно, что скорость увеличения амплитуды основной моды увеличивается с ростом номера моды, определяющей начальную деформацию. С увеличением номера моды начальное возмущение которой определяет исходное возмущение равновесной сферической формы, растет и количество мод капиллярных осцилляций заряженной капли, возбуждающихся за счет взаимодействия. Возбуждение нечетных мод проявится лишь в третьем порядке приближений как результат взаимодействия возбужденной нечетной k -моды и генерируемых ею во втором порядке малости четных мод.

На рис. 2, *a* приведены рассчитанные по соотношениям (1), (31) контуры форм капли (ось симметрии горизонтальна) в различные моменты безразмерного времени

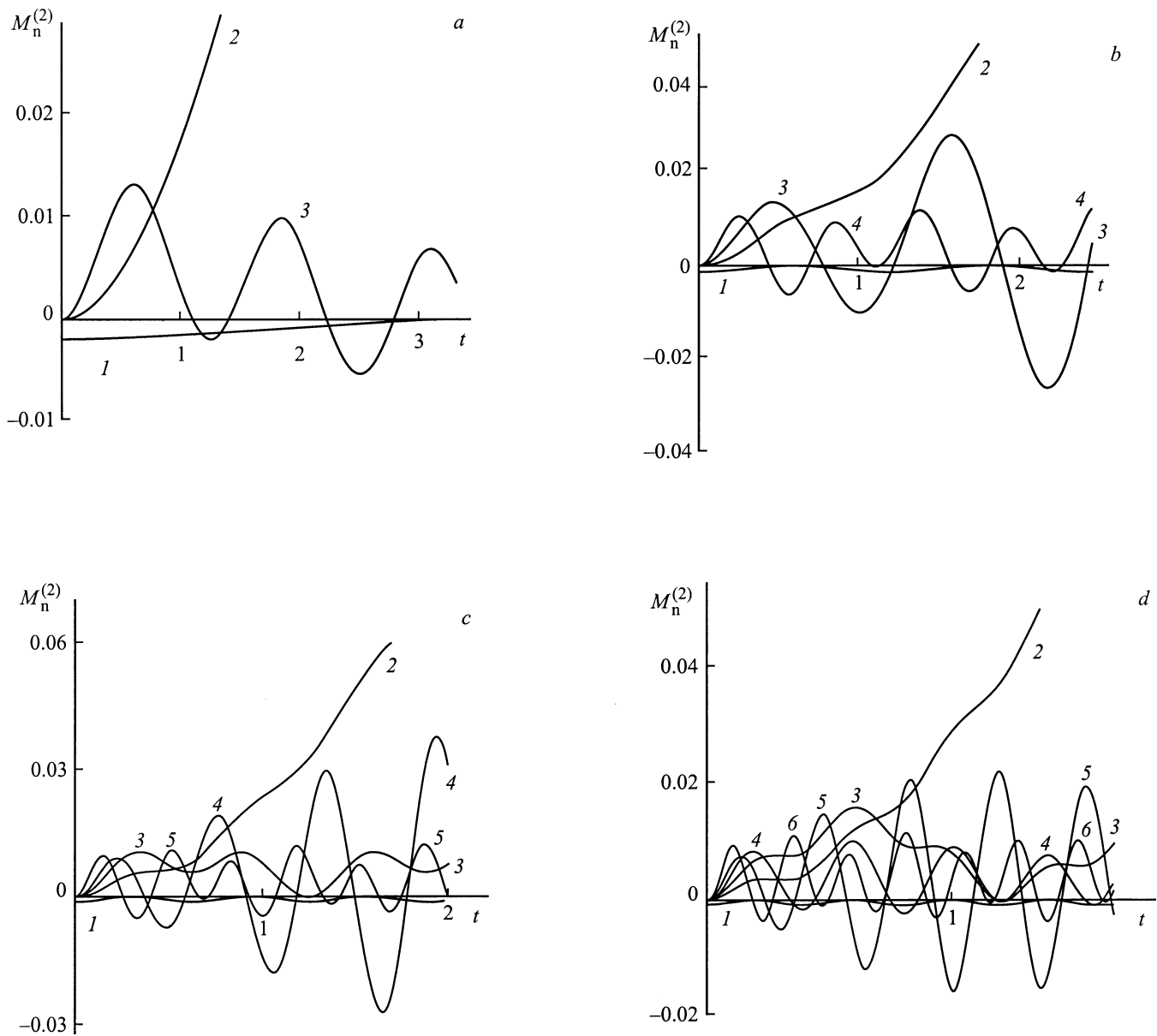


Рис. 1. Графики зависимости от безразмерного времени t безразмерных амплитуд $M_n^{(2)}$ различных мод капиллярных осцилляций заряженной капли при $W = 3.9$, возбуждающихся в результате взаимодействия во втором порядке малости. 1 — нулевая мода, 2 — вторая (основная) мода, 3 — четвертая мода, 4 — шестая мода, 5 — восьмая мода, 6 — десятая мода. Начальное искажение равновесной сферической формы задано в виде возмущения с безразмерной амплитудой ε 2-й моды (а), 3-й (б), 4-й (с), 5-й (д).

при значениях параметра W , близких к критическому, когда начальное возмущение равновесной сферической формы задано в виде возмущения третьей и четвертой мод соответственно. Следует отметить, что область равномерной пригодности соотношений (31) в соответствии с представлениями теории возмущений определена условием $t < \varepsilon^{-1}$. На самом деле выписанное ограничение по времени t еще более жесткое, что видно из приведенных рисунков. Кривые 4 на всех рисунках построены уже на границе применимости равномерного разложения. Это следует из сравнения амплитуд результирующих отклонений поверхности капли (кривые 4) от ее формы в начальный момент времени (кривые 2) и проявляет-

ся в очевидном несохранении первоначального объема для капель с образующими, обозначенными номером 4. Тем не менее несложно видеть, что когда начальное возмущение равновесной формы определено четными полиномами Лежандра, то образующая формы капли в любой момент времени строится из четных же полиномов Лежандра и имеет симметричный относительно начала координат вид. При достаточно большом t (лежащем на границе интервала равномерности решения по t) капля проявляет тенденцию к делению на две равные части. Если же начальное возмущение связано с нечетными полиномами Лежандра, то форма капли в любой последующий момент времени асимметрична

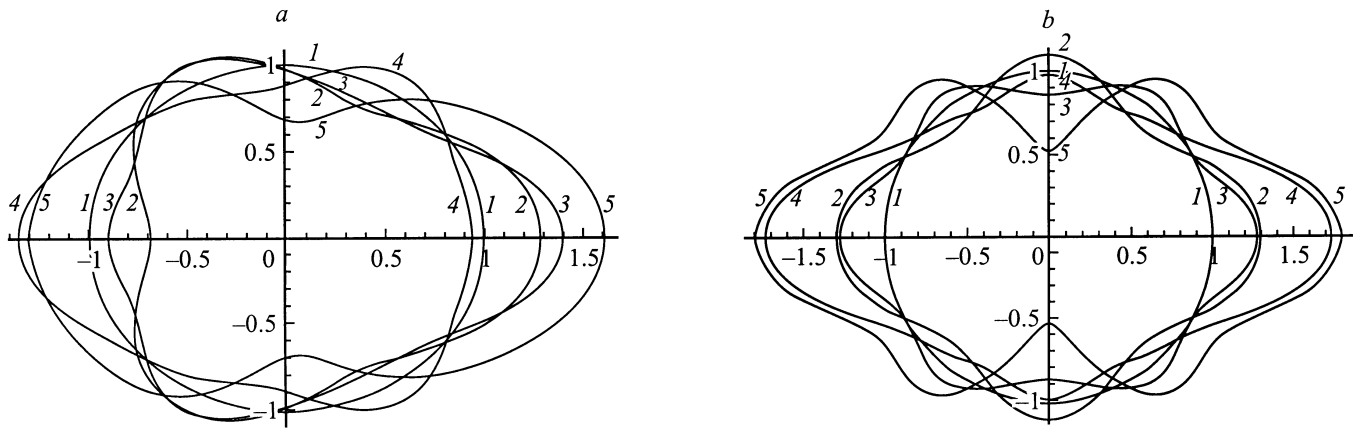


Рис. 2. Контуры огибающей формы капли в различные моменты времени, когда начальное возмущение с амплитудой $\varepsilon = 0.3$ равновесной сферической формы задано в виде виртуального возмущения различных мод. 1 — равновесная сферическая форма, 2 — форма в начальный момент времени (сферическая форма, деформированная возмущением вида $\varepsilon P_n(\mu)$; $n = 3, 4$). *a:* $n = 3$; $W = 3, 8$. $t\varepsilon$: 3 — 0.065, 4 — 0.26, 5 — 0.585. *b:* $n = 4$; $W = 3, 8$. $t\varepsilon$: 3 — 0.24, 4 — 0.36, 5 — 0.57.

относительно начала координат, несмотря на то, что за счет взаимодействия мод во втором порядке малости по ε возбуждаются только четные моды. При больших t такая капля проявляет тенденцию к асимметричному делению.

Из общефизических соображений очевидно, что учет вязкости, не принимавшейся во внимание в проведенном рассмотрении, будет приводить к затуханию всех мод. Однако декремент затухания высоких мод больше, чем у низких, и на достаточно большом временном интервале амплитуда первоначально возмущенной высокой нечетной моды может уменьшиться до нуля быстрее, чем амплитуда возбужденных ею более низких четных мод. Тогда дальнейшие колебания капли и ее возможное деление на две части будут симметричны.

Из сказанного и приведенных графиков следует, что независимо от вида начальной деформации наиболее быстро растет амплитуда основной моды капиллярных колебаний. Поскольку использованная процедура расчета обеспечивает пригодность полученных выражений до тех пор, пока амплитуда мод, возбужденных во втором порядке малости, не сравняется с амплитудой начального возмущения, то увеличение амплитуды основной моды до величины порядка ε будет соответствовать вытягиванию капли в сфероид с квадратом эксцентриситета $e^2 \approx 3\varepsilon - 5.25\varepsilon^2$ [15]. Несложно видеть, что даже при малых значениях $\varepsilon \sim 0.1$ это приведет к заметному удлинению капли и к снижению, согласно [16], критических условий реализации неустойчивости капли по отношению к собственному заряду, которые для сфероидальной капли в линейном по e^2 приближении имеют вид

$$W_*(e^2) = 4(1 - 2e^2/7) \approx 4[1 - 2(3\varepsilon - 4.25\varepsilon^2)/7]. \quad (32)$$

Таким образом, если параметр Рэлея W капли близок к критическому, то может реализовываться неустойчивость капли. Если капля характеризуется некоторым значением параметра Рэлея $W = W_+$, достаточно близким к

критическому $W_* = 4$, но меньшим его, то из выражения (32) можно найти текущую безразмерную амплитуду основной моды a_2 , при достижении которой капля претерпит неустойчивость. Из (32) несложно найти

$$a_2 \approx \frac{1}{3.5} \{1 - [1 - 8.17(1 - 0.25W_+)]^{1/2}\}.$$

Так, при $W_+ = 3.6$ капля станет неустойчивой, когда безразмерная амплитуда основной моды достигнет величины $a_2 \approx 0.16$. При этом капля сбросит часть своего заряда путем эмиссии значительного количества сильно заряженных высокодисперсных дочерних капелек [1,17].

8. Из рис. 1 видно, что колебания амплитуд всех мод, возбужденных во втором порядке малости, происходят около средних линий, смещенных вверх относительно оси абсцисс. Это означает, что осцилляции капли происходят не в окрестности сферы, но в окрестности фигуры

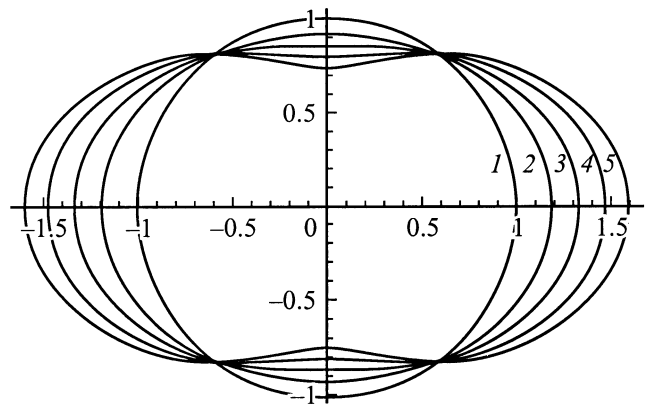


Рис. 3. Формы фигур, в окрестности которых осуществляются нелинейные осцилляции капли при $W = 3$, когда начальная деформация с амплитудой $\varepsilon = 0.3$ связана с виртуальным возбуждением k -й моды. 1 — образующая равновесной сферической формы капли, 2–5 соответствуют номерам мод, возбужденных в начальный момент времени.

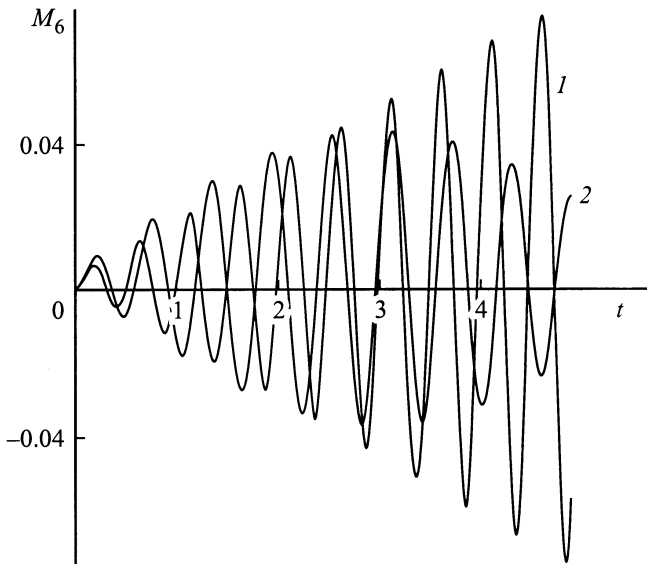


Рис. 4. Временная зависимость безразмерной амплитуды 6-й моды при начальном возмущении четвертой моды с $\varepsilon = 0.1$ в условиях резонанса (1) и вдали от резонанса (2).

с меньшей степенью симметрии. Если из формулы (31) выделить слагаемые, не зависящие от времени, то они определяют фигуру, в окрестности которой реализуются колебания поверхности капли,

$$r(\Theta) \approx 1 - \varepsilon^2 \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{(2k+1)} - \sum_{j=1}^k \lambda_{k,k,2j}^{(-)} P_{2j}(\mu) \right\} + O(\varepsilon^3 t), \quad (33)$$

где k — номер первоначально возбужденной моды.

Несложно видеть, что во втором порядке малости по ε независимо от четности моды возбужденной в первом порядке малости фигура, в окрестности которой имеют место осцилляции, состоит лишь из четных мод, т.е. представляет собой фигуру типа вытянутого сфероида, а не сферы, как было получено в линейном анализе Рэлея [1]. Интересно, что параметры такого сфероида через коэффициенты $\lambda_{k,k,2j}^{\pm}$ зависят от заряда капли (от параметра W). На рис. 3 приведены формы образующих обсуждаемых фигур, рассчитанные по (32) для различных значений k . Видно, что с увеличением номера начально возбужденной моды степень вытянутости фигуры, в окрестности которой происходят осцилляции, увеличивается.

9. Полученные решения позволяют наблюдать и проявления резонансного взаимодействия отдельных мод колебаний поверхности капли, подробно проанализированного в работе [3]. Взаимодействие обсуждаемого типа возникает между модами во втором порядке малости, частоты колебаний которых при некотором значении заряда Q удовлетворяют соотношению $\omega_m^2 = j^2 \omega_n^2$, где j — целое число, а $m \neq n$. В результате такого

взаимодействия амплитуда одной из мод неограниченно (в использованном приближении) периодически нарастает во времени. В [3] исследовался резонанс между изначально возбужденными четвертой и шестой модами, проявляющийся при $W = 2.67$ (при этом $\omega_0^2 = 4\omega_4^2$). В настоящем исследовании такой же резонанс имеет место при начальном возмущении лишь одной из мод (четвертой). Вид временной зависимости амплитуды шестой моды, возбужденной начальным возмущением четвертой моды, рассчитанной при $W = 2.67$ на малых интервалах времени, внешне сходен с кривой 4 на рис. 1, с. Однако на рис. 1, с приведены результаты расчета при $W = 3.9$, и увеличение амплитуды шестой моды связано с перекачкой энергии между взаимодействующими во втором порядке малости модами и на временном интервале, большем, чем использован на рис. 1, с, амплитуда шестой моды убывает со временем. Для сравнения на рис. 4 приведены рассчитанные (при начальном возбуждении четвертой моды) временные зависимости амплитуды шестой моды в условиях резонанса при $W \approx 2.667$ (кривая 1) и вдали от резонанса при $W = 3.9$ (кривая 2) на большем временном интервале, чем на рис. 1, с. Разница во временном ходе обеих кривых очевидна. Обсуждаемое резонансное взаимодействие реализуется, когда в (31) появляются слагаемые с множителями $\sim (\omega_m^2 - j^2 \omega_n^2)^{-1}$.

Заключение

Вследствие взаимодействия различных мод капиллярных колебаний в квадратичном приближении по амплитуде начального возмущения потеря устойчивости капель, имеющей заряд, чуть меньший критического, может быть инициирована виртуальным возбуждением не только основной моды, но любой из мод независимо от четности. Нелинейные осцилляции капли происходят в окрестности фигуры типа вытянутого сфероида, а не в окрестности сферы, как это следовало из линейного анализа. В отличие от аperiodической неустойчивости заряженной капли, несущей заряд, чуть меньший критического, являющейся следствием перекачки энергии от возбужденных соседних мод, колебательная неустойчивость может быть реализована при резонансном взаимодействии несоседних мод.

Список литературы

- [1] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.
- [2] Tsamopoulos J.A., Brown R.A. // J. Fluid Mech. 1983. Vol. 127. P. 519–537.
- [3] Tsamopoulos J.A., Brown R.A. // J. Fluid Mech. 1984. Vol. 147. P. 373–395.
- [4] Tsamopoulos J.A., Akulas T.R., Brown R.A. // Proc. Roy. Soc. London, 1985. Vol. A401. P. 67–88.
- [5] Natarajan R., Brown R.A. // Proc. Roy. Soc. London, 1987. Vol. A410. P. 209–227.
- [6] Pelekasis N.A., Tsamopoulos J.A., Manolis G.D. // Phys. Fluids. 1990. Vol. A2. N 8. P. 1328–1340.

- [7] Wang T.G., Anilkumar A.V., Lee C.P. // J. Fluid Mech. 1996. Vol. 308. P. 1–14.
- [8] Feng Z. // J. Fluid Mech. 1997. Vol. 333. P. 1–21.
- [9] Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. // Письма в ЖТФ. 1999. Т. 25. Вып. 15. С. 1–45.
- [10] Basaran O.A., Scriven L.E. // Phys. Fluids A. 1989. Vol. 1. N 5. P. 795–798.
- [11] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // ЖТФ. 1999. Т. 69. Вып. 7. С. 10–14.
- [12] Щукин С.И., Григорьев А.И. // ЖТФ. 1998. Т. 68. Вып. 11. С. 48–52.
- [13] Найфе А. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
- [14] Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К. Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975. 439 с.
- [15] Ширяева С.О., Григорьев А.И., Григорьева И.Д. // ЖТФ. 1995. Т. 65. Вып. 9. С. 39–45.
- [16] Ширяева С.О., Григорьев А.И. // ЖТФ. 1996. Т. 66. Вып. 6. С. 12–20.
- [17] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // ЖТФ. 1991. Т. 61. Вып. 3. С. 19–28.