Журнал технической физики, 2001, том 71, вып. 1

01;03

Об условиях конвективной неустойчивости в верхнем слое жидкого раствора

© Л.Х. Ингель

Федеральная служба России по гидрометеорологии и мониторингу окружающей среды
Научно-производственное объединение "Тайфун",
249020 Обнинск, Калужская область, Россия
E-mail: lingel@obninsk.com

(Поступило в Редакцию 25 мая 2000 г.)

Рассмотрена линейная задача о конвективной неустойчивости вблизи поверхности двухкомпонентной жидкой среды. Специфика задачи состоит в необходимости одновременного учета фоновых стратификаций и различия коэффициентов обмена для каждого из компонентов, а также термокапиллярного эффекта. Показано, что учет последнего приводит к выводу о существовании неизвестной ранее области монотонной неустойчивости. Найден соответствующий безразмерный критерий, рассчитанны нейтральные кривые.

Конвективная неусточивость, связанная с термокапиллярным эффектом (конвекция Марангони), обычно рассматривается только в достаточно тонких слоях жидкости (в воде, до нескольких миллиметров). Принято считать, что в более толстых слоях такая неустойчивость обычно должна быть незаметной на фоне проявлений конвективной неустойчивости Рэлея–Тейлора [1]. Но в двухкомпонентной среде (например, в соленой воде) возможны ситуации, когда при неустойчивой температурной стратификации (нагрев снизу) плотностная стратификация тем не менее устойчива благодаря устойчивой стратификации солености. Неустойчивость Рэлея–Тейлора при этом подавлена, а термокапиллярная неустойчивость возможна и "свободна от конкуренции". В этом случае приобретает смысл исследование такого механизма неустойчивости и в сколь угодно толстых слоях жидкости.

Исследуем в качестве примера устойчивость состояния покоя полуограниченного слоя воды, стратифицированного по температуре и солености, с учетом термокапиллярного эффекта. Будем пользоваться приближением Буссинеска (называемым также приближением свободной конвекции), применимость которого для жидкостей хорошо исследована и обоснована [1–3]. Согласно этому приближению, жидкость рассматривается как несжимаемая, за исключением учета ее теплового расширения. Линеаризованная система уравнений в этом случае имеет вид [1,3]

$$(\partial_t - \nu\nabla^2)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p + g(\alpha T - \beta s)\mathbf{e}_z, \quad \nabla\mathbf{v} = 0,$$

$$(\partial_t - \kappa\nabla^2)T + \gamma_T \mathbf{v}\mathbf{e}_z = 0, \; (\partial_t - \chi\nabla^2)s + \gamma_s \mathbf{v}\mathbf{e}_z = 0. \quad (1)$$

Здесь ось z направлена вертикально вверх; T, s — возмущения температуры и солености соответственно; γ_T, γ_s — фоновые вертикальные градиенты этих величин; $\mathbf{v}$ — трехмерный вектор возмущения поля скорости; α — термический коэффициент расширения жидкости, β — коэффициент ее "соленостного сжатия", характеризующий зависимость плотности от концентрации раствора; ρ_0 — средняя невозмущенная плотность воды; ν, κ, χ — коэффициенты обмена; g — ускорение свободного падения.

Задача устойчивости неограниченного слоя соленой воды ранее исследована (см., например, [3,4]). Предполагая значения параметров γ_T, γ_s, соответствующие устойчивому состоянию неограниченного слоя [4], будем исследовать возможность возникновения неустойчивости в связи с поверхностными эффектами. Следовательно, рассматриваем возмущения, затухающие вдали от поверхности, при $z \to -\infty$. Пренебрегаем деформациями поверхности жидкости. Это соответствует условию $w|_{z=0} = 0$, где w — вертикальная составляющая скорости. Для простоты ограничиваемся здесь также однородными краевыми условиями 2-го рода (отсутствие возмущений потоков) для тепла и соли при $z = 0$. Термокапиллярный эффект, как обычно, учитывается с использованием граничного условия [1]

$$\rho_0\nu\partial_z\mathbf{u} = -\sigma_T\nabla_h T \quad \text{при} \quad z = 0. \quad (2)$$

Здесь $\mathbf{u}$ — вектор горизонтальной скорости, ∇_h — горизонтальный оператор Гамильтона, σ_T — абсолютная величина температурной производной коэффициента поверхностного натяжения σ. Поставленная задача устойчивости исследовалась по отношению к монотонным возмущениям стандарным методом нормальных мод. Ищется решение вида

$$w(x, y, z, t) = W(z)\exp\left[i(k_x x + k_y y) + \omega t\right] \quad (3)$$

(для других неизвестных — аналогично). Исключая из исходной системы уравнений все неизвестные, кроме w, при $\omega = 0$ (имея в виду расчет нейтральных кривых), приходим к уравнению

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2\right)^3 W = k^6 S W. \quad (4)$$

Здесь

$$S = \frac{1}{\nu k^4}\left(\frac{N_T^2}{\kappa} + \frac{N_s^2}{\chi}\right), \qquad (5)$$

$k^2 = k_x^2 + k_y^2$; $N_T = (\alpha g \gamma_T)^{1/2}$, $N_s = (-\beta g \gamma_s)^{1/2}$ — "термическая" и "соленостная" частоты плавучести (Брента–Вяйсяля). Параметр S является некоторым аналогом и обобщением числа Рэлея [1–3] на случай двухкомпонентной среды. Но вместо толщины слоя жидкости (которая в рассматриваемой задаче бесконечна) в нем фигурирует горизонтальный масштаб возмущения k^{-1}. Как уже упоминалось, рассматриваются ситуации, когда без учета поверхностных эффектов система устойчива (за счет устойчивости соленостной стратификации), но неустойчива температурная стратификация

$$\gamma_T < 0, \quad \gamma_s < 0, \quad N_T^2 < 0, \quad N_s^2 > 0, \quad N_s^2 + N_T^2 > 0;$$

$$N_T^2/\kappa + N_s^2/\chi > 0. \qquad (6)$$

Последнее неравенство — одно из условий устойчивости по отношению к так называемым эффектам двойной (дифференциальной) диффузии, способным дестабилизировать систему даже при устойчивой плотностной стратификации [3,4]. В соответствии с условием (6) рассматриваем только положительные значения параметра S. Отметим, что поскольку коэффициент переноса соли χ в воде на два порядка меньше, чем коэффициент температуропроводности κ [3], то параметр S при прочих равных условиях гораздо сильнее зависит от соленостной стратификации, чем от температурной. В частности, устойчивая стратификация солености гораздо сильнее стабилизирует среду, чем такая же, но термического происхождения.

Ищем решение уравнения (4) в виде суммы экспонент. С учетом затухания при $z \to -\infty$ решение для вертикальной скорости представляет собой сумму трех экспонент

$$W(z) = \sum_{i=1}^{3} C_i e^{q_i k z}, \; q_1 = (1 + S^{1/3})^{1/2},$$

$$q_{2,3} = \left[1 + S^{1/3}\exp\left(\pm\frac{2}{3}\pi i\right)\right]^{1/2} \qquad (7)$$

($\mathrm{Re}\, q_i > 0$). В выражениях для температуры и солености имеется и четвертая экспонента e^{kz}. Из краевых условий вытекает система уравнений для коэффициентов C_i

$$\sum_{i=1}^{3} C_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{3}\frac{q_i}{q_i^2 - 1}C_i = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{3}\left[q_i^2 - \frac{M}{q_i^2 - 1}\right]C_i = 0, \qquad (8)$$

где аналог числа Марангони

$$M = -\frac{\sigma_T \gamma_T}{\rho_0 \kappa \nu k^2}. \qquad (9)$$

Определитель D системы (8) можно привести к виду

$$D = \frac{\sqrt{3}i}{S^{1/3}}\left\{-\frac{M}{S^{1/3}}\left[2q\cos\left(\phi - \frac{\pi}{3}\right) - q_1\right] + S^{1/3}q_1 + q\left[(q_1^2 - q^2)\cos\phi + (q_1^2 + q^2)\sin\phi/\sqrt{3}\right]\right\}. \qquad (10)$$

Здесь q и φ — модуль и фаза величины q_2

$$q_{2,3} = qe^{\pm i\varphi}; \quad q = (1 - S^{1/3} + S^{2/3})^{1/4},$$

$$\varphi = \frac{1}{2}\begin{cases} \mathrm{arctg}\left\{[(\sqrt{3}/2)S^{1/3}]/[1 - (1/2)S^{1/3}]\right\} \\ \text{при} \quad 0 \le S < 8, \\ \pi + \mathrm{arctg}\left\{[(\sqrt{3}/2)S^{1/3}]/[1 - (1/2)S^{1/3}]\right\} \\ \text{при} \quad S > 8. \end{cases}$$

Нейтральная кривая $M(S)$ соответствует обращению в нуль правой части (10). Как показывает анализ полученного характеристического уравнения, в качестве безразмерного критерия неустойчивости можно рассматривать параметр

$$I = -(\chi/\nu)^{1/2}\sigma_T\gamma_T/\rho_0\kappa N_s. \qquad (11)$$

Условие неустойчивости имеет вид

$$I > S^{1/6}[(2q/q_1)\cos\varphi + 1]\Big/\left[(2q/q_1)\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right) - 1\right]. \qquad (12)$$

Нейтральная кривая на плоскости (S, I) приведена на рис. 1; область неустойчивости находится выше этой кривой. Наиболее "опасной" моде соответствует $S = S_* \approx 34$, $I = I_* \approx 5.828$, $k = k_* \approx \approx (N_s^2/S_*\nu\chi)^{\frac{1}{4}} \approx 0.41(N_s^2/S_*\nu\chi)^{\frac{1}{4}}$. На рис. 2 представлены нейтральные кривые на поскости (N_s^2, N_T^2), относящиеся к следующим значениям параметров: $\rho_0 = 10^3\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$, $\sigma_T = 1.4\cdot 10^{-4}\,\mathrm{Nm}^{-1}\cdot\mathrm{K}^{-1}$,

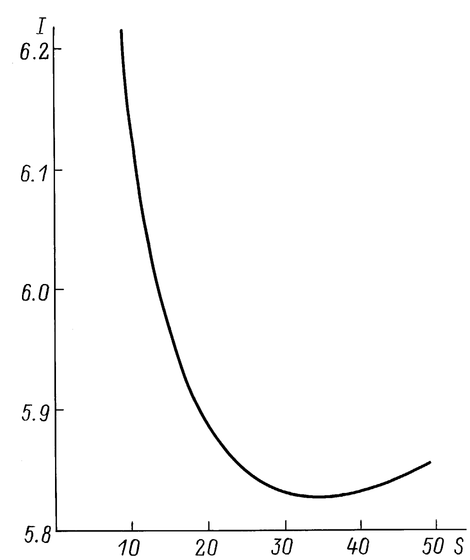

Рис. 1. Нейтральная кривая на плоскости (S, I).

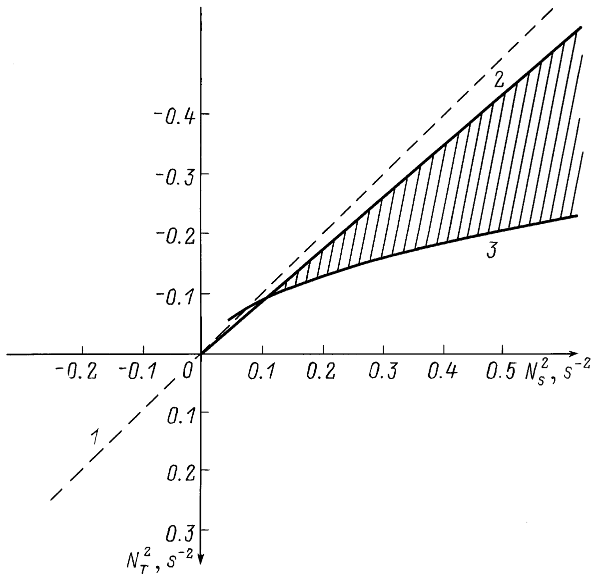

Рис. 2. Нейтральные кривые на "частотной" плоскости (N_s^2, N_T^2). *1* — нейтральная плотностная стратификация, *2* — нижняя граница области колебательной неустойчивости [3,4]. Заштрихована обнаруженная в настощей работе область неустойчивости, нижняя граница которой (*3*) определяется критерием (12).

$\nu = 10^{-6}\,\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-1}$, $\kappa = 1.4 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-1}$, $\chi = 1.5 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-1}$. Видно, что учет термокапиллярного эффекта приводит к появлению при устойчивой плотностной стратификации области неустойчивости над кривой *3*. Если $\gamma_s = 0.33\,{}^0\!/_{00}\,\mathrm{cm}^{-1}$, $\beta = 0.76 \cdot 10^{-3}\,({}^0\!/_{00})^{-1}$, то $N_s \approx 0.5\,\mathrm{s}^{-1}$, $k_* = 1.5 \cdot 10^3\,\mathrm{m}^{-1}$; при $\alpha = 2 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{K}^{-1}$ для возникновения неустойчивости необходим неустойчивый фоновый вертикальный градиент температуры порядка $10^2\,\mathrm{K} \cdot \mathrm{m}^{-1}$. Эффективная глубина проникновения нейтральных возмущений в среду для наиболее опасной моды несколько меньше длины ее волны.

Итак, основные результаты работы сводятся к следующему. Показано, что с учетом поверхностных эффектов значительная часть области физических параметров верхнего слоя двухкомпонентной среды, традиционно считающейся устойчивой, строго говоря, является областью неустойчивости. Найден соответствующий безразмерный критерий, рассчитаны нейтральные кривые.

Список литературы

[1] *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972.372 с.
[2] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
[3] *Тернер Дж.* Эффекты плавучести в жидкостях. М.: Мир, 1977. 431 с.
[4] *Walin G.* // Tellus. 1964. Vol. 16. P. 389.