Краткие сообщения

01;04;10

Инварианты движения заряда в поле линейно поляризованной волны

© В.Н. Комаров

Саратовский государственный университет,
410601 Саратов, Россия

(Поступило в Редакцию 8 декабря 1998 г. В окончательной редакции 22 марта 2000 г.)

Решением уравнений Гамильтона получены шесть интегралов движения релятивистского заряда в поле поперечной линейно поляризованной электромагнитной волны, распространяющейся с произвольной фазовой скоростью $u > c$. На их основе в неподвижной системе координат анализируется траектория движения заряда в зависимости от фазы волны. Координаты, время и фаза связаны эллиптическими функциями.

Известно движение заряда в поле линейно поляризованной волны, распространяющейся с фазовой скоростью $u = c$ в системе отсчета, в которой заряд в среднем покоится [1,2]. Оно может быть также описано инвариантами движения, которые известны для этого случая [3]. В бесстолкновительной плазме $u > c$, и представляет интерес обобщение инвариантов для этого условия. Предположим, что линейно поляризованная волна задана векторным потенциалом, направленным по оси X,

$$A_x = -\frac{cE}{\omega}\sin\xi, \quad \xi = \omega t - kz. \tag{1}$$

Функция Гамильтона релятивистского заряда в электромагнитном поле имеет вид [4]

$$\varepsilon = \sqrt{m^2c^4 + c^2\left(\bar{P} - \frac{e}{c}\bar{A}(\xi)\right)^2}, \quad \bar{P} = \bar{p} + \frac{e}{c}\bar{A}, \tag{2}$$

откуда получим систему канонических уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \frac{c^2p_x}{\varepsilon}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{c^2p_y}{\varepsilon}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{c^2p_z}{\varepsilon}, \tag{3}$$

$$\frac{dp_x}{dt} = eE\left(1 - V_z\frac{k}{\omega}\right)\cos\xi,$$

$$\frac{dp_y}{dt} = 0, \quad \frac{dp_z}{dt} = eE\frac{k}{\omega}V_x\cos\xi. \tag{4}$$

1) Интегрируя первое и второе уравнения (4), получим

$$p_x - \frac{eE}{\omega}\sin\xi = \Psi_1, \quad p_y = \Psi_2. \tag{5}$$

Первое уравнение (4) умножим на скорость $V_x = dx/dt$ из (3), после привлечения других уравнений (4) и интегрирования получим

$$\varepsilon - up_z = \Psi_3. \tag{6}$$

Приведенные интегралы хорошо известны [5,6].

2) Из интеграла Ψ_3 выразим продольный импульс

$$p_z = \frac{-u\Psi_3 + \sqrt{c^2\Psi_3^2 + (u^2 - c^2)(m^2c^4 + c^2p_\perp^2(\xi))}}{u^2 - c^2},$$

$$p_\perp^2 = p_x^2 + p_y^2. \tag{7}$$

Знак "+" перед корнем выбирается в соответствии с пределом для $u \to c$. Подставим в третье уравнение (4) вычисленную производную dp_z/dt, причем $p_\perp^2(\xi)$ выразим через интегралы Ψ_1, Ψ_2. После интегрирования имеем

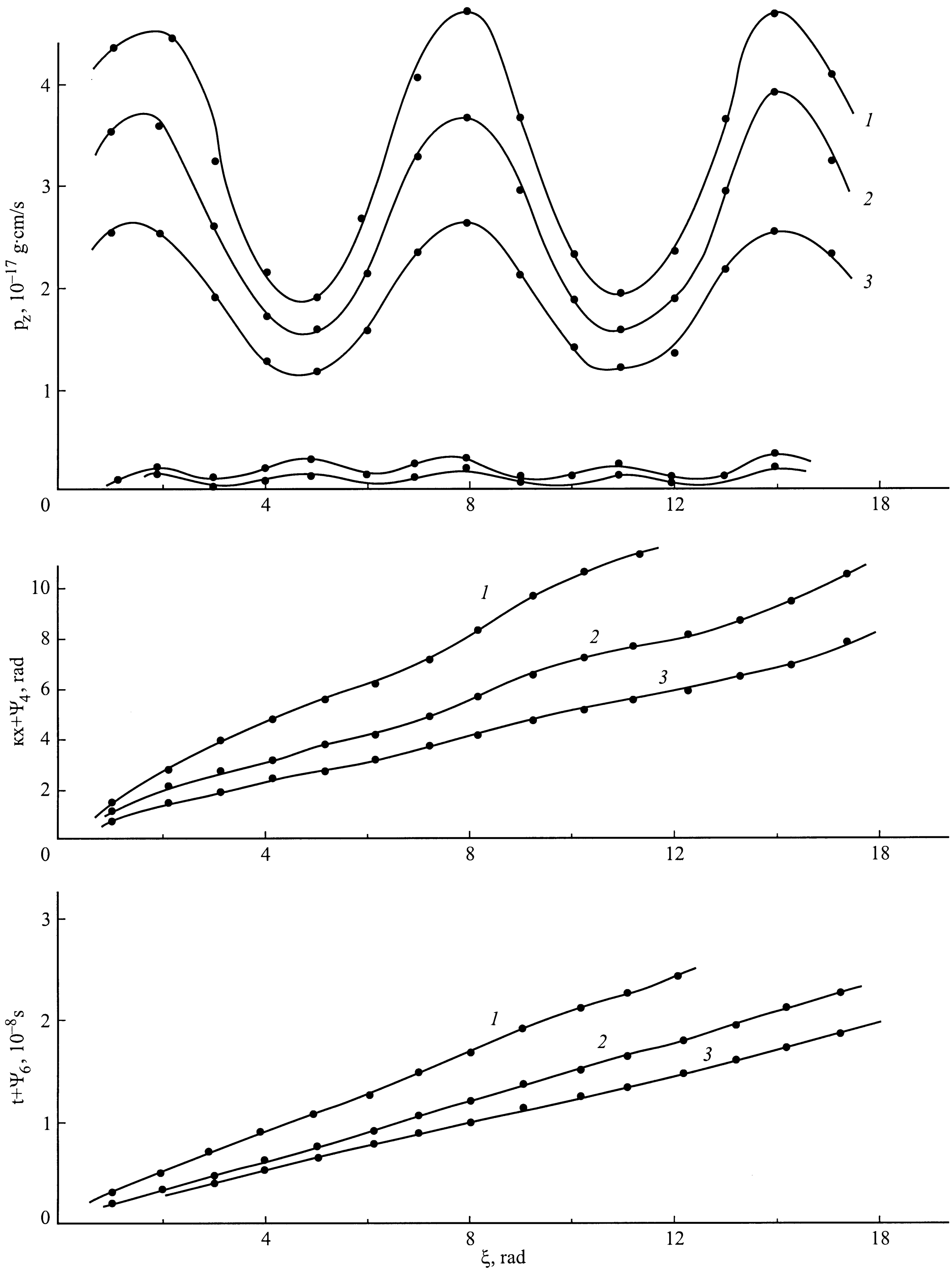
$$\int\limits_0^\xi \frac{c^2(\Psi_1 + (eE/\omega)\sin\xi)d\xi}{\sqrt{c^2\Psi_3^2 + (u^2 - c^2)[m^2c^4 + c^2\Psi_2^2 + c^2(\Psi_1 + (eE/\omega)\sin\xi)^2]}} = kx + \Psi_4. \tag{8}$$

Интеграл Ψ_3 разделим на энергию ε, откуда $\varepsilon = \Psi_3/(1 - uV_z/c^2)$. Из второго уравнения (3) $\varepsilon = p_yc^2/V_y$. Приравнивая энергии и интегрируя, получим

$$y\Psi_3 = \Psi_2c^2\left(t - u\frac{z}{c^2}\right) + \Psi_5. \tag{9}$$

Из определения фазы следует $d\xi/\omega dt = 1 - p_zc^2/u\varepsilon$ или $d\xi/\omega(1 - p_zc^2/u\varepsilon) = dt$. В левую часть подставим энергию $\varepsilon = \Psi_3 + up_z$, p_z выразим через поперечный импульс $p_\perp(\xi)$, как ранее, тогда

$$\int\limits_0^\xi \frac{u}{\omega(u^2 - c^2)} \times \left(u - \frac{c^2\Psi_2}{\sqrt{c^2\Psi_3^2 + (u^2 - c^2)\left[m^2c^4 + c^2\Psi_2^2 + c^2(\Psi_1 + (eE/\omega)\sin\xi)^2\right]}}\right) d\xi = t + \Psi_6. \tag{10}$$



Зависимость продольного импульса, координаты и времени от фазы: *1–3* — $\Psi_1 = \Psi_2 = mc$.

3) Инварианты Ψ_4 и Ψ_6 содержат эллиптические интегралы. Левая часть (8) с использованием известных подстановок [7] выражается через эллиптические интегралы первого, третьего рода и арксинусы. Из вида интеграла Ψ_4 следует, что вдоль оси X заряд имеет постоянную составляющую импульса, связанную с инвариантом Ψ_1, и наложенные осцилляции, вызванные переменным полем. Причем рост амплитуды осцилляций замедляется с увеличением напряженности поля волны. Изменение координаты X и амплитуда осцилляций тем меньше, чем больше отличается фазовая скорость волны от скорости света в вакууме.

В пределе $u = c$ в Ψ_5 образуется величина ξ/ω, пропорциональная фазе волны [3], где слагаемое с продольной координатой z определяет запаздывание. Если $u \neq c$, то отмеченное слагаемое теряет смысл запаздывания, так как последнее должно быть обратно пропорционально фазовой скорости волны u. Инвариант Ψ_6 содержит эллиптический интеграл первого рода и позволяет связать фазу и время. Из выражения (7) следует, что продольный импульс в общем случае имеет постоянную составляющую и осцилляции с частотами ω и 2ω. Преобладание одной из частот зависит от соотношения начального импульса Ψ_1 и величины eE/ω. Для больших импульсов Ψ_1 влияние электрической составляющей поля волны на скорость V_x мало́, в переменную составляющую p_z дает вклад только изменяющееся магнитное поле, и преобладает частота ω. В случае малого импульса Ψ_1 дополнительно проявляется действие электрической составляющей, изменяющей скорость в силе Лоренца, и в спектре увеличивается амплитуда частотной составляющей 2ω.

На рисунке приведены зависимости от фазы ξ для p_z, $kx + \Psi_4$, $t + \Psi_6$ при значениях $\Psi_3 = mc^2$, $eE/\omega = mc/2$, $k \approx 0.02$ rad/cm, $\omega = 10^9$ rad/s, фазовых скоростей на кривых *1, 4* $u = 1.05$ s, на кривой *2* $u = 1.2$ s, на кривых *3, 5* $u = 1.5$ s, m и e — масса и заряд электрона. Полученные соотношения могут быть применены к анализу возбуждения лонгмюровских волн импульсами поперечных электромагнитных волн, который в настоящее время проведен на основе релятивистской гидродинамики, преимущественно в одномерном случае [8].

Список литературы

[1] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. М.: Наука, 1973. 504 с.
[2] *Клеммоу Ф., Доуэрти Дж.* Электродинамика частиц и плазмы // Под ред. Рухадзе А.А. Пер. с англ.
[3] *Амиров Р.Х., Комаров В.Н., Прозоркевич А.В., Смолянский С.А.* // Вопросы теоретической и ядерной физики. Саратов: СГУ, 1986. С. 34–39.
[4] *Бредов М.М., Румянцев В.В., Топтыгин И.Н.* Классическая электродинамика. М.: Наука, 1985. 400 с.
[5] *Морозов А.И., Соловьев Л.С.* // Вопросы теории плазмы. М. Атомиздат. Т. 2. С. 177–261.
[6] *Давыдовский В.Я.* // ЖЭТФ. 1979. Т. 77. Вып. 12. С. 519–525.
[7] *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Эллиптические и автоморфные функции, функции Ламе и Матье. М.: Наука, 1967. 299 с.
[8] *Горбунов Л.М., Кирсанов В.И.* Возбуждение плазменных волн электромагнитными импульсами. Тр. ФИАН. М.: Наука, 1992. Т. 219. С. 3–54.