

## Влияние сильного магнитного поля на проводимость квантового цилиндра в условиях „штарковской лестницы“

© Д.В. Завьялов, С.В. Крючков, Н.Е. Мещерякова

Волгоградский государственный педагогический университет,  
400131 Волгоград, Россия

E-mail: sed@fizmat.vspu.ru

(Поступила в Редакцию 5 апреля 2004 г.  
В окончательной редакции 13 сентября 2004 г.)

Исследована проводимость квантового цилиндра с параболическим потенциалом латерального конфайнмента и сверхструктурой, вдоль оси которого приложены однородные постоянные квантующие электрическое и магнитное поля. Предполагается, что рассеяние носителей тока происходит на оптических фононах.

Получена зависимость плотности тока, текущего вдоль оси сверхрешетки, от напряженности постоянного магнитного поля. Показано, что гибридизация электронного энергетического спектра приводит к проявлению при определенных условиях так называемого штарк-гибридно-фононного резонанса. Это в свою очередь определяет резкую немонотонность зависимости плотности тока от напряженности магнитного поля.

Работа поддержана грантом регионального конкурса АВО-РФФИ „Поволжье-2004“ № 04-02-96505.

В настоящее время развитие нанотехнологий сделало возможным изготовление из слоев напряженного GaAs/GaAlAs поверхностей различной кривизны [1], в том числе цилиндрических поверхностей, обладающих необычными физическими свойствами [2]. Особое внимание исследователей уделяется квантовым наноструктурам, конфайнмент которых можно моделировать параболическим потенциалом [3]. Оптические свойства наноструктур с параболическим потенциалом конфайнмента исследованы в [3–5], где, в частности, показано, что учет магнитного поля приводит к резонансным особенностям не на циклотронной, а на гибридных частотах.

Целью данной работы является исследование продольной магнитопроводимости квантового цилиндра со сверхструктурой. Предполагается, что дополнительный периодический потенциал создан вдоль оси цилиндра (таким образом, ось  $OZ$  является и осью сверхрешетки, и осью квантового цилиндра). Постоянные квантующие магнитное и электрическое поля приложены вдоль оси  $OZ$  и приводят к гибридизации электронного энергетического спектра. Это открывает возможность наблюдения интересных эффектов. В частности, как показано далее, должен наблюдаться так называемый штарк-гибридно-фононный резонанс.

Моделирование квантового цилиндра с тонкими стенками будем осуществлять согласно схеме, предложенной в [3]. Постоянное электрическое поле считаем достаточно сильным для проявления эффекта штарковского квантования, что обеспечивается неравенствами

$$\tau \Omega_{st} \gg 1, \quad (1)$$

$$\hbar \Omega_{st} \ll E_g. \quad (2)$$

Здесь  $\Omega_{st} = eEd/\hbar$  — штарковская частота,  $e$  — заряд электрона,  $E$  — напряженность постоянного электрического поля ( $\mathbf{E} \parallel OZ$ ),  $d$  — период сверхрешетки,  $\tau$  — время релаксации,  $E_g$  — ширина запрещенной

минизоны. Условие (1) подразумевает неразмытость дискретных уровней столкновениями электронов с нерегулярностями решетки, а условие (2) — возможность использования одноминизонного приближения.

Энергетический спектр носителей тока в квантовом цилиндре в описанной выше ситуации полностью дискретный и имеет вид

$$\varepsilon_{nmv} = \hbar \Omega \left( n + \frac{1}{2} \right) + \lambda m^2 + v \hbar \Omega_{st}, \quad (3)$$

где  $\Omega = \sqrt{\omega_c^2 + \omega^2}$  — гибридная частота,  $\omega_c = |e|B/m^*c$  — циклотронная частота,  $\omega$  — собственная частота потенциала конфайнмента,  $\lambda = 2\pi \hbar^2 \omega^2 / m^* L^2 \Omega^2$  — энергия конфайнмента,  $m^*$  — эффективная масса носителей,  $L = 2\pi R$  — длина канала,  $R$  — радиус цилиндра,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ,  $v = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ .

Волновая функция электрона, соответствующая спектру (1), может быть записана в виде

$$\Psi_{nmv} = \frac{1}{\sqrt{d}} J_{v-z/d} \left( \frac{\Delta}{\hbar \Omega_{st}} \right) \frac{1}{L} \exp \left( \frac{imx}{R} \right) \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \times \exp \left( -\frac{1}{2l} \left( y + \frac{\omega_c l^2}{\Omega R} m \right) \right) H_n \left( \frac{1}{l} \left( y + \frac{\omega_c l^2}{\Omega R} m \right) \right), \quad (4)$$

где  $l = \sqrt{\hbar/m^* \Omega}$ ,  $H_n(x)$  — полином Эрмита. Выражения (3) и (4) отличаются от соответствующих формул работы [3] заменой непрерывной части спектра  $p_z^2/2m$  на дискретную составляющую  $v \hbar \Omega_{st}$  и заменой  $\exp(ip_z z/\hbar)/\sqrt{2\pi \hbar}$  на составляющую волновой функции, учитывающую штарковское квантование  $J_{v-z/d}(\Delta/\hbar \Omega_{st})/\sqrt{d}$  [6]. Такие замены являются следствием того, что  $\mathbf{E} \parallel \mathbf{H} \parallel OZ$ .

Для вычисления плотности тока воспользуемся общей теорией электропроводности полупроводников в квантовых полях, развитой в работе [7]. Тогда с учетом [8]

плотность тока, текущего вдоль оси сверхрешетки, описывается выражением

$$j = j_1 + j_2, \quad (5)$$

$$j_{1,2} = \frac{2\pi ed}{\hbar} \sum_{n,n'} \sum_{m,m'} \sum_{v-v'} \sum_{\mathbf{q}} (v-v') f(n,m) H_{\mathbf{q}}^2 \times |M_{1,2}|^2 \left( N_{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \right) \delta(\hbar\Omega(n-n') + \lambda(m'^2 - m^2) + \hbar\Omega_{st}(v'-v) \mp \hbar\omega_{\mathbf{q}}), \quad (6)$$

$H_{\mathbf{q}} = C_{\mathbf{q}} \sqrt{\hbar/2\omega_{\mathbf{q}}\rho V}$ ,  $\rho$  — плотность кристалла,  $C_{\mathbf{q}}$  — константа электрон-фононного взаимодействия,  $\omega_{\mathbf{q}}$  — частота фононов,  $\mathbf{q}$  — волновой вектор фононов,  $N_{\mathbf{q}}$  — планковская функция распределения фононов,  $V$  — нормировочный объем ( $V = L_x L_y L_z$ ),  $f(n,m)$  — неравновесная функция распределения электронов, требующая, вообще говоря, специального вычисления,  $|M_{1,2}|^2$  — квадрат модуля матричного элемента оператора  $\exp(i\mathbf{q}\mathbf{r})$  на волновых функциях (4), задаваемых выражением

$$|M_{1,2}|^2 = \frac{l^2 2^{n-n'}}{L^2 2^{n'n'}} \exp(-\Phi(q_x, q_y)) [\Phi(q_x, q_y)]^{n'-n} \times [L_{n'-n'}^{n-n'}(2\Phi(q_x, q_y))]^2 J_{v-v'}^2 \times \left( \frac{2\Delta}{\hbar\Omega_{st}} \sin \frac{q_z d}{2} \right) \delta(m-m' \mp q_x R). \quad (7)$$

Здесь

$$\Phi(q_x, q_y) = \frac{\omega_c^2}{\Omega^2} \frac{q_x^2 l^2}{4} + \frac{q_y^2 l^2}{4}.$$

Ток идет благодаря перескокам электронов по уровням „штарковской лестницы“ с одновременным изменением чисел  $n \rightarrow n'$ ,  $m \rightarrow m'$  и испусканием ( $j_1$ ) или поглощением ( $j_2$ ) фононов. Рассмотрим далее подробно случай взаимодействия электронов с оптическими фононами, дисперсией которых для простоты пренебрежем (далее полагаем  $H_{\mathbf{q}}$ ,  $C_{\mathbf{q}}$ ,  $\omega_{\mathbf{q}}$  величинами, не зависящими от  $\mathbf{q}$ , обозначая их  $H_0$ ,  $C_0$  и  $\omega_0$  соответственно). Из (6) следует, что зависимость плотности тока от напряженностей магнитного и электрического полей имеет вид серии  $\delta$ -образных максимумов, положение которых определяется условием штарк-гибридно-фононного резонанса

$$\hbar\Omega(n-n') + \lambda(m'^2 - m^2) + \hbar\Omega_{st}(v'-v) \mp \hbar\omega_0 = 0. \quad (8)$$

В этом состоит отличие от работ [8,9], где исследовалась магнитопроводность одномерной сверхрешетки и резонанс наблюдался не на гибридной, а на циклотронной частоте.

В случае низких температур можно считать, что электроны сосредоточены на нижнем энергетическом уровне; следовательно, в суммах по  $n$  и  $m$  можно оставить только слагаемые с  $n = m = 0$ . Обозначим

$f(0,0) = n_0$ ,  $n_0$  — концентрация электронов в мини-зоне. При низких температурах ( $kT \ll \omega_0$ )  $N_{\mathbf{q}} \ll 1$  и, следовательно,  $j_2 \ll j_1$ . С учетом сделанных замечаний выражение для плотности тока примет вид

$$j = \frac{2\pi ed H_0^2 l^2 n_0}{\hbar^2 \Omega L^2} \sum_n \sum_m \sum_{v-v'} \sum_{\mathbf{q}} (v-v') J_{v-v'}^2(z_{\mathbf{q}}) \frac{2^n}{n!} \times \exp(-2\Phi(q_x, q_y)) (\Phi(q_x, q_y))^n [L_0^n(2\Phi(q_x, q_y))]^2 \times \delta\left(-n - \beta m^2 + \frac{\Omega_{st}}{\Omega}(v'-v) - \frac{\omega_0}{\Omega}\right) \delta(m+q_x R), \quad (9)$$

где  $\beta = \lambda/\hbar\Omega$ .

В квазиклассическом приближении, когда  $z_{\mathbf{q}} \gg 1$ , суммирование по  $v-v'$  можно выполнить следующим образом [8,10,11]:

$$\sum_{v=-\infty}^{\infty} v J_v^2(z_{\mathbf{q}}) \delta\left(n + \beta m^2 - v \frac{\Omega_{st}}{\Omega} + \frac{\omega_0}{\Omega}\right) = \frac{\Omega}{\pi \Omega_{st}} \frac{\gamma_{n,m} \Theta(z_{\mathbf{q}} - \gamma_{n,m})}{\sqrt{z_{\mathbf{q}}^2 - \gamma_{n,m}^2}}, \quad (10)$$

где  $\Theta(x)$  — ступенчатая функция Хевисайда,  $\gamma_{n,m} = n + \beta m^2 + \omega_0/\Omega$ .

С учетом (10) выражение для плотности тока примет вид

$$j = \frac{2\pi ed H_0^2 l^2 n_0}{\hbar^2 \Omega L^2} \sum_n \sum_m \sum_{\mathbf{q}} \frac{2^n}{n!} \frac{\Omega}{\pi \Omega_{st}} \exp(-2\Phi(q_x, q_y)) \times \frac{\gamma_{n,m} \Theta(z_{\mathbf{q}} - \gamma_{n,m})}{\sqrt{z_{\mathbf{q}}^2 - \gamma_{n,m}^2}} (\Phi(q_x, q_y))^n \delta(m+q_x R). \quad (11)$$

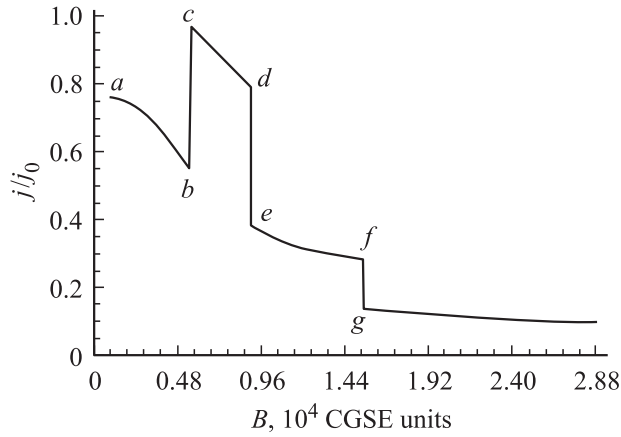
После суммирования в (11) по  $\mathbf{q}$  получаем следующее выражение:

$$j = j_0 \frac{l}{L} \sum_n \sum_m \frac{2^n}{n!} Q(n,m) \gamma_{n,m} \frac{\Theta(\alpha - \gamma_{n,m})}{\sqrt{\alpha^2 - \gamma_{n,m}^2}} \times F\left(\arcsin \sqrt{\frac{\alpha^2 - \gamma_{n,m}^2}{\alpha^2}}, \sqrt{\frac{\alpha^2}{\alpha^2 - \gamma_{n,m}^2}}\right), \quad (12)$$

где введены обозначения  $j_0 = 16eH_0^2 V n_0 / \hbar^2 L^2 \Omega_{st} \pi^2$ ,  $\alpha = 2\Delta/\hbar\Omega$ ,  $F(\varphi, k)$  — эллиптический интеграл первого рода,

$$Q(n,m) = \frac{1}{2\Gamma(-n)} e^{-2\chi^2} \left( \chi^{1+2n} \sqrt{\pi} \Gamma(-1/2-n) \times {}_1F_1(1/2, 3/2+n, 2\chi^2) + 2^{-1/2-n} \Gamma(-n) \times \Gamma(1/2+n) {}_1F_1(-n, 1/2-n, 2\chi^2) \right), \quad (13)$$

$\Gamma(x)$  — гамма-функция,  ${}_1F_1(a, c, x)$  — вырожденная гипергеометрическая функция,  $\chi = \omega m l / 2R\Omega$ .



Зависимость безразмерной плотности тока от величины магнитной индукции. Значения параметров указаны в тексте.

По результатам численного анализа (12) построен график зависимости плотности тока от величины магнитного поля. Использовались типичные параметры сверхрешетки и квантового цилиндра:  $\Delta = 0.01$  eV,  $n_0 = 10^{14}$  cm $^{-3}$ ,  $m^* = 10^{-29}$  g, период сверхрешетки  $d = 10^{-6}$  cm, частота фононов  $\omega_0 = 1.6 \cdot 10^{12}$  s $^{-1}$  [12],  $C_q = 5 \cdot 10^8$  eV/cm [13], частота потенциала конфинемента  $\omega = 1.6 \cdot 10^{13}$  s $^{-1}$ , радиус цилиндра  $R = 10^{-6}$  cm [3],  $\Omega_{st} \approx 2 \cdot 10^{12}$  s $^{-1}$ . При этих значениях параметров имеем  $j_0 \approx 0.3$  A/mm $^2$ , что представляется вполне достижимым для экспериментального наблюдения.

Как видно из рисунка, с ростом магнитного поля плотность тока испытывает резкие скачки, объясняемые следующим образом. Из закона сохранения энергии следует неравенство, определяющее правила отбора для  $m$  и  $n$ ,

$$\frac{2\Delta}{\hbar\Omega} - n - \frac{2\pi\hbar\omega^2}{m^*L^2\Omega^3} m^2 - \frac{\omega_0}{\Omega} > 0. \quad (14)$$

Так, например, участку  $ab$  на графике соответствуют три слагаемых ( $n = 1, m = 0$ ;  $n = 0, m = -1$ ;  $n = 0, m = 1$ ). Всплеск тока  $bcd$ , обусловленный добавлением слагаемых  $n = |m| = 1$ , наступает при условии

$$\frac{(2\Delta - \omega_0\hbar)m^*c}{3\hbar e} \left( 2 \cos \frac{\varphi + 4\pi}{3} + 1 \right) < B < \frac{(2\Delta - \omega_0\hbar)m^*c}{3\hbar e} \times \left( 2 \cos \frac{\varphi}{3} + 1 \right), \quad (15)$$

где  $B$  — модуль вектора магнитной индукции,

$$\cos \varphi = 1 - \frac{27\pi\hbar^4\omega^2}{m^*L^2(2\Delta - \omega_0\hbar)^3}. \quad (16)$$

Спад  $fg$  связан с исчезновением суммы по  $n$  ( $n = 0$ ), что наступает в случае

$$B > \frac{m^*c}{e} \sqrt{\left( \frac{2\Delta}{\hbar} - \omega_0 \right)^2 - \omega^2}. \quad (17)$$

В пределе сильных магнитных полей ( $B \gg 10^5$  CGSE) отношение  $j/j_0$  устремляется к нулю, так как с возрастанием поля увеличиваются энергетические зазоры между гибридными квантовыми уровнями энергии, что приводит к уменьшению вероятности переходов носителей и как следствие к уменьшению тока.

## Список литературы

- [1] V.Ya. Prinz, V.A. Seleznev, V.A. Samoylov, A.K. Gutakovskiy. *Microelectr. Eng.* **30**, 439 (1996).
- [2] В.А. Гейлер, В.А. Маргулис, А.В. Шорохов. *ЖЭТФ* **115**, 1478 (1999).
- [3] Н.Г. Галкин, В.А. Маргулис, А.В. Шорохов. *ФТТ* **43**, 3, 511 (2001).
- [4] Э.П. Синявский, С.М. Сокович. *ФТТ* **42**, 9, 1685 (2000).
- [5] В.А. Маргулис. *ЖЭТФ* **111**, 1092 (1997).
- [6] Дж. Каллуэй. *Теория энергетической зонной структуры*. Мир, М. (1969). 360 с.
- [7] В.В. Брыксин, Ю.А. Фирсов. *ЖЭТФ* **61**, 6, 2373 (1971).
- [8] С.В. Крючков, Н.П. Михеев. *ФТП* **15**, 11, 2277 (1981).
- [9] В.М. Поляновский. *ФТП* **15**, 10, 2051 (1981).
- [10] С.В. Крючков. *ФТТ* **21**, 5, 1595 (1979).
- [11] Л. Солимар. *Туннельный эффект в сверхпроводниках и его применение*. Мир, М. (1974). 430 с.
- [12] Ф.Г. Басс, А.А. Булгаков, А.П. Тетервов. *Высокочастотные свойства полупроводников со сверхрешетками*. Наука, М. (1989). 288 с.
- [13] К. Зеегер. *Физика полупроводников*. Мир, М. (1977). 615 с.