

Солитоны в двухатомной цепочке с конкурирующими нелинейностями

© А.В. Горбач*, А.С. Ковалев**, О.В. Усатенко*,***

* Харьковский национальный университет,
61077 Харьков, Украина

** Физико-технический институт низких температур,
61164 Харьков, Украина

*** Институт радиофизики и электроники Национальной академии наук Украины,
61085 Харьков, Украина

E-mail: univ@kharkov.ua

(Поступила в Редакцию 22 февраля 2001 г.)

Рассмотрена одномерная двухатомная цепочка с энергией, включающей слагаемые третьей и четвертой степеней по смещениям атомов. Предложен модифицированный асимптотический метод нахождения солитонных решений в таких системах с нелинейностями разной симметрии. Показано, что динамика рассматриваемой модели может быть описана в рамках уравнений, аналогичных уравнениям динамики двухатомной цепочки с четным потенциалом. В частном случае свободной двухатомной цепочки с чисто кубическим ангармоническим потенциалом найден новый тип необычных солитонных решений.

Работа была выполнена при частичной поддержке проекта INTAS-99 (грант 167) и программы МНОП (грант USU 082087).

Упругие одно- и многоатомные цепочки являются одними из наиболее распространенных объектов изучения нелинейной динамики. Несмотря на простоту таких моделей, исследование их актуально, так как проясняет физическую природу сложных нелинейных возбуждений в реальных кристаллах.

В последнее время двухатомные и многоатомные цепочки часто привлекаются для изучения свойств так называемых щелевых и околотщелевых солитонов, параметры которых лежат внутри и около щели спектра линейных волн системы [1–8]. В подавляющем большинстве работ изучаются системы с симметричным относительно смещений атомов нелинейным потенциалом. Однако принципиальный интерес представляет более общий случай, когда в потенциал взаимодействия входят и асимметричные относительно смещений атомов слагаемые. Подобный потенциал в простейшей модели одноатомной цепочки рассматривался в [9].

В данной работе рассмотрена двухатомная цепочка с нелинейным межчастичным взаимодействием и нелинейным внешним потенциалом в случае, когда оба потенциала (межчастичный и внешний) включают асимметричные и симметричные относительно смещений атомов слагаемые. Предложена модификация асимптотического метода получения неподвижных решений системы, которая в отличие от разработанного в работе [8] метода учитывает двухатомность цепочки с несимметричным потенциалом. Также разработан метод получения движущихся решений в подобных системах. Проведен качественный анализ возможных неподвижных и движущихся решений на фазовой плоскости в частных случаях, когда нелинейные слагаемые в потенциале являются чисто асимметричными. В частном случае свободной цепочки (внешний потенциал отсутствует) с кубическим ангармонизмом межчастичного взаимодействия приведены, аналитические выражения для особого типа солитонных решений.

1. Постановка задачи. Анализ линейной системы

Рассмотрим одномерную двухатомную цепочку с периодически чередующимися атомами с массами M и m ($M > m$), ангармоническим потенциалом межчастичного взаимодействия

$$U(\xi_n) = \frac{K_2}{2}(\xi_n - \xi_{n-1})^2 + \frac{K_3}{3}(\xi_n - \xi_{n-1})^3 + \frac{K_4}{4}(\xi_n - \xi_{n-1})^4 \quad (1)$$

и ангармоническим внешним потенциалом

$$V(\xi_n) = \frac{\gamma_2}{2} \xi_n^2 + \frac{\gamma_3}{3} \xi_n^3 + \frac{\gamma_4}{4} \xi_n^4, \quad (2)$$

где ξ_n — смещение n -го атома, а константы K_2 и γ_2 положительны. Разность масс атомов в дальнейшем будем считать малой величиной: $(M - m) \ll M, m$, что обеспечивает узость щели запрещенных частот спектра линейных волн.

Уравнение движения для n -го атома имеет вид

$$\begin{aligned} \mu [1 + \epsilon^2 \cos(\pi n)] \frac{d^2 \xi_n}{dt^2} + K_2(2\xi_n - \xi_{n+1} - \xi_{n-1}) + \gamma_2 \xi_n \\ + K_3 [(\xi_n - \xi_{n+1})^2 + (\xi_n - \xi_{n-1})^2] + \gamma_3 \xi_n^2 \\ + K_4 [(\xi_n - \xi_{n+1})^3 + (\xi_n - \xi_{n-1})^3] + \gamma_4 \xi_n^3 = 0, \quad (3) \end{aligned}$$

где $\mu = (M + m)/2$ и $\epsilon^2 = (M - m)/(M + m) \ll 1$.

При анализе свойств линейных волн в рассматриваемой системе общее решение линеаризованных уравнений (3) представляется в виде двух полей, описывающих колебания легких и тяжелых частиц:

$$\begin{aligned} \xi_n = G \exp(i\omega t - ikn) + c.c., \quad n = \pm 1, \pm 3, \dots \\ = F \exp(i\omega t - ikn) + c.c., \quad n = 0, \pm 2, \pm 4, \dots, \quad (4) \end{aligned}$$

и удобно ввести отдельную нумерацию для каждого типа частиц, фактически нумеруя элементарные ячейки [1–5].

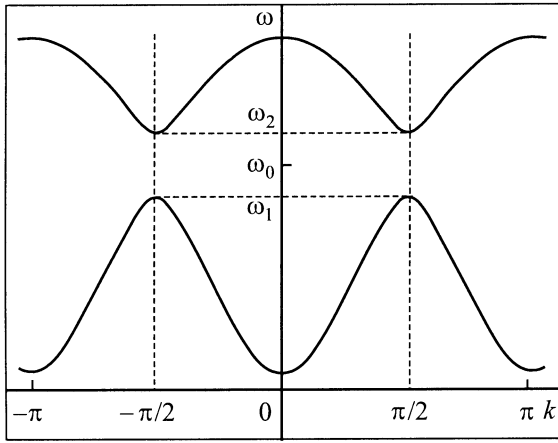


Рис. 1. Закон дисперсии линейных волн системы, описываемый характеристическим уравнением (5).

Закон дисперсии линейных волн вида (4) изображен на рис. 1 и описывается уравнением

$$\omega^4 - (\omega_1^2 + \omega_2^2)\omega^2 + \omega_1^2\omega_2^2 - \tilde{\omega}_1^2\tilde{\omega}_2^2 \cos^2(ka) = 0, \quad (5)$$

где $\omega_1^2 = (2K_2 + \gamma_2)/M$, $\omega_2^2 = (2K_2 + \gamma_2)/m$, $\tilde{\omega}_1^2 = (2K_2)/M$, $\tilde{\omega}_2^2 = (2K_2)/m$, a — постоянная решетки, которую в дальнейшем полагаем равной единице. При $k = \pm k_0 = \pm\pi/2$ спектр линейных волн имеет щель, ограниченную частотами ω_1 и ω_2 , ширина которой пропорциональна разности масс $(\omega_2^2 - \omega_1^2) = (2K_2 + \gamma_2)(M - m)/(Mm)$ и является малым параметром.

Соотношение амплитуд колебаний тяжелых и легких частиц определяется частотой линейных волн [10]

$$\frac{F}{G} = \mp \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_2^2}\right) \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right)^{-1}}. \quad (6)$$

Здесь верхний (нижний) знак соответствует возбуждениям с частотами, лежащими на участках спектра, где увеличение модуля волнового вектора соответствует увеличению (уменьшению) частоты.

На нижней ветви спектра, т.е. при $\omega \leq \omega_1$, амплитуда колебаний тяжелых атомов F превышает амплитуду колебаний легких атомов G . При $\omega = \omega_1$ амплитуда легких атомов становится равной нулю, а тяжелые атомы колеблются в противофазе. На верхней ветви спектра, при $\omega \geq \omega_2$, амплитуда колебаний легких атомов превышает амплитуду тяжелых, которая при $\omega = \omega_2$ обращается в нуль, при этом легкие атомы колеблются в противофазе. Таким образом, нижнюю ветвь можно условно назвать ветвью колебаний тяжелых частиц, а верхнюю — легких.

Диапазон изменения волнового числа k в соотношении (4) соответствует интервалу $(-\pi/2, \pi/2)$ (область, ограниченная пунктирными линиями, на рис. 1), т.е. первой зоне Бриллюэна (см., например, [11]).

Существует также и другой подход, в котором общее решение линеаризованных уравнений (3) представляется

в виде, универсальном для описания как тяжелых, так и легких частиц [7,10],

$$\xi_n = A \exp i(\omega t - kn) + B \exp i(\omega t - (k - \pi)n). \quad (7)$$

При таком подходе в общее решение входят две волны с одинаковой частотой и групповой скоростью, однако разными амплитудами и фазовыми скоростями (поэтому излагаемый метод иногда называют "двухволновым приближением" [7,10]). Амплитуды A и B парциальных волн не являются независимыми, их отношение определяется частотой волн [7,10]

$$\frac{B}{A} = \frac{\sqrt{|1 - \omega^2/\omega_2^2|} \pm \sqrt{|1 - \omega^2/\omega_1^2|}}{\sqrt{|1 - \omega^2/\omega_2^2|} \mp \sqrt{|1 - \omega^2/\omega_1^2|}}, \quad (8)$$

где верхний (нижний) знак соответствует знаку в формуле (6).

Волновые числа двух волн в решении (7) лежат в пределах так называемой расширенной зоны Бриллюэна, т.е. в диапазоне $(-\pi, \pi)$. Недостаточность первой зоны Бриллюэна объясняется тем фактом, что все атомы в цепочке нумеруются последовательно без учета наличия частиц двух сортов. Уменьшение элементарной ячейки приводит к расширению зоны Бриллюэна, которая теперь совпадает с зоной Бриллюэна для одноатомной цепочки.

Из (4) и (7) легко установить связь между амплитудами F , G и A , B

$$G = A + B,$$

$$F = A - B. \quad (9)$$

Таким образом, оба подхода являются эквивалентными и с одинаковым успехом могут быть использованы для анализа как линейных, так и нелинейных волн.

2. Неподвижные солитоны

При изучении нелинейных волн наиболее интересной частью спектра является окрестность точки $k_0 = \pi/2$ (т.е. значения $k = k_0 + \kappa$ с $\kappa \ll k_0$), где обе ветви спектра линейных волн (5) имеют приблизительно параболическую форму.

Для начала рассмотрим неподвижные решения системы (3) с волновым числом $k \equiv k_0$. Для изложения асимптотического метода нахождения решений последовательно рассмотрим случаи наличия в системе: (2.1) гармонического межчастичного взаимодействия и нелинейного внешнего потенциала ("внешняя" нелинейность); (2.2) нелинейного межчастичного взаимодействия при отсутствии внешнего потенциала ("внутренняя" нелинейность); (2.3) общий случай наличия обоих типов нелинейностей.

2.1. Система с нелинейным внешним потенциалом. Полагаем взаимодействие между частицами гармоническим ($K_3 = K_4 = 0$ в (1)), а внешний потенциал — нелинейным. Анализ динамики одноатомной

цепочки с таким типом взаимодействия был проведен в работе [9]. Уравнения движения (3) примут в данном случае следующий вид:

$$M \frac{d^2 v_n}{dt^2} + K_2(2v_n - w_{n+1} - w_{n-1}) + \gamma_2 v_n + \gamma_3 v_n^2 + \gamma_4 v_n^3 = 0, \quad n = 2j,$$

$$m \frac{d^2 w_n}{dt^2} + K_2(2w_n - v_{n+1} - v_{n-1}) + \gamma_2 w_n + \gamma_3 w_n^2 + \gamma_4 w_n^3 = 0, \quad n = 2j + 1, \quad (10)$$

где v_n и w_n — смещения тяжелых и легких частиц соответственно.

В линейном приближении, как было описано выше, при $k = k_0$ смещения соседних частиц одного сорта имеют противоположные знаки (противофазные колебания). Учет нелинейности приводит к тому, что эти смещения в каждой подрешетке, оставаясь противофазными, становятся различными по величине ввиду асимметрии нелинейного потенциала относительно направления смещения атома [9]. Общее решение нелинейных уравнений (3) представляется в виде ряда, в который входят гармоники с частотами, кратными ω . При этом нечетные гармоники (с частотами $\omega, 3\omega, 5\omega \dots$) имеют амплитуды с противоположными знаками у соседних частиц одного сорта. В то же время четные гармоники (с частотами $0, 2\omega, 4\omega \dots$) имеют амплитуды с одинаковыми знаками у соседних частиц. Такая особенность структуры общего решения нелинейных уравнений (3) не была учтена в работе [12], что, на наш взгляд, привело к неверным конечным результатам.

Таким образом, общее решение системы (3) можно записать в следующем виде:

$$v_n \equiv v_{2j} = \epsilon^2 f_n^{(0)} + \epsilon(-1)^j f_n^{(1)} \cos(\omega t) + \epsilon^2 f_n^{(2)} \cos(2\omega t) + \epsilon^3(-1)^j f_n^{(3)} \cos(3\omega t) + \dots,$$

$$w_n \equiv w_{2j+1} = \epsilon^2 g_n^{(0)} + \epsilon(-1)^j g_n^{(1)} \cos(\omega t) + \epsilon^2 g_n^{(2)} \cos(2\omega t) + \epsilon^3(-1)^j g_n^{(3)} \cos(3\omega t) + \dots, \quad (11)$$

где в длинноволновом пределе $f^{(i)}, g^{(i)}$ — плавно меняющиеся функции номера n , $\epsilon^2 = (M - m)/(M + m)$ — ранее введенный малый параметр разложения.

Для перехода к континуальному пределу заменяем дискретный номер n на непрерывную координату x и разложим функции $f^{(i)}$ и $g^{(i)}$, сохраняя члены до ϵ^2 включительно

$$f^{(i)}(x \pm 1) = f^{(i)}(x) \pm \frac{df^{(i)}}{dx} + \mathcal{O}(\epsilon^3),$$

$$g^{(i)}(x \pm 1) = g^{(i)}(x) \pm \frac{dg^{(i)}}{dx} + \mathcal{O}(\epsilon^3), \quad (12)$$

где $i = 1, 2, 3 \dots$ (как будет видно из дальнейшего, $df^{(i)}/dx, dg^{(i)}/dx \sim \epsilon^2$).

Подставляя разложения (11), (12) в (10) и приравнявая слагаемые при различных гармониках, получаем следующую замкнутую систему уравнений для $f^{(0)}, g^{(0)}, f^{(1)}, g^{(1)}, f^{(2)}$ и $g^{(2)}$:

$$(2K_2 + \gamma_2)f^{(0)} - 2K_2g^{(0)} + \frac{\gamma_3}{2}F^2 = 0,$$

$$(2K_2 + \gamma_2)g^{(0)} - 2K_2f^{(0)} + \frac{\gamma_3}{2}G^2 = 0,$$

$$(-4M\omega^2 + 2K_2 + \gamma_2)f^{(2)} - 2K_2g^{(2)} + \frac{\gamma_3}{2}F^2 = 0,$$

$$(-4m\omega^2 + 2K_2 + \gamma_2)g^{(2)} - 2K_2f^{(2)} + \frac{\gamma_3}{2}G^2 = 0,$$

$$\delta_1 F - \frac{2K_2}{\epsilon^2} \frac{dG}{dx} + \gamma_3 F(2f^{(0)} + f^{(2)}) + \frac{3\gamma_4}{4}F^3 = 0,$$

$$\delta_2 G + \frac{2K_2}{\epsilon^2} \frac{dF}{dx} + \gamma_3 G(2g^{(0)} + g^{(2)}) + \frac{3\gamma_4}{4}G^3 = 0, \quad (13)$$

где $F \equiv f^{(1)}, G \equiv g^{(1)}, \delta_i$ — параметры, характеризующие отклонение частоты ω от верхней и нижней границ щели,

$$\delta_1 = \frac{M(\omega_1^2 - \omega^2)}{\epsilon^2},$$

$$\delta_2 = \frac{m(\omega_2^2 - \omega^2)}{\epsilon^2}. \quad (14)$$

(Поскольку ширина щели и отклонение рассматриваемых частот от ее границ имеет порядок величины ϵ^2 , $\delta_i \sim 1$).

Первые четыре алгебраических уравнения в (13) позволяют выразить $f^{(0)}, g^{(0)}, f^{(2)}$ и $g^{(2)}$ через G и F и получить систему дифференциальных уравнений для этих двух функций. После перенормировки координаты: $(\epsilon^2/(2K_2))x \rightarrow x$ получаем систему дифференциальных уравнений первого порядка для F и G

$$\frac{dG}{dx} = \delta_1 F - \beta F(F^2 + pG^2),$$

$$-\frac{dF}{dx} = \delta_2 G - \beta G(G^2 + pF^2), \quad (15)$$

где параметры β и p выражаются через характеристики рассматриваемой модели

$$\beta = \gamma_3^2(2K_2 + \gamma_2) \times \frac{16(2K_2 + \gamma_2)^2 - \gamma_2(4K_2 + \gamma_2)}{2\gamma_2(4K_2 + \gamma_2)[8(2K_2 + \gamma_2)^2 + \gamma_2(4K_2 + \gamma_2)]} - \frac{3}{4}\gamma_4,$$

$$p = \frac{1}{\beta} \gamma_3^2 K_2 \frac{16(2K_2 + \gamma_2)^2 + 3\gamma_2(4K_2 + \gamma_2)}{\gamma_2(4K_2 + \gamma_2)[8(2K_2 + \gamma_2)^2 + \gamma_2(4K_2 + \gamma_2)]}. \quad (16)$$

(Параметр β в принципе может быть устранен в уравнениях (15) после соответствующей перенормировки амплитуд полей F и G).

Уравнения (15) представляют собой эффективную гамильтонову систему с гамильтонианом

$$H = \frac{\delta_1}{2} F^2 + \frac{\delta_2}{2} G^2 - \frac{\beta}{4} (F^4 + G^4) - p \frac{\beta}{2} F^2 G^2 \quad (17)$$

для канонически сопряженных координатах G и импульса F . Координата x играет роль эффективного "времени".

Система (15) аналогична системе динамических уравнений, получаемых при анализе нелинейной динамики двухатомной цепочки с четным нелинейным потенциалом, подробно рассмотренной в [5,6]. В данной работе ограничимся рассмотрением частного случая кубической нелинейности внешнего потенциала ($\gamma_4 = 0$). В этом случае коэффициенты p и γ удовлетворяют следующим соотношениям: $\beta > 0$, $0 < p < 1$.

Удобно изучать возможные типы решений системы (15) на фазовой плоскости переменных (F, G) . Фазовый портрет рассматриваемой системы зависит от значений параметров δ_1 и δ_2 , т.е. от значения частоты нелинейного возбуждения.

При частотах $\omega > \omega_2$ ($\delta_1 < 0$, $\delta_2 < 0$), т.е. над верхней ветвью спектра линейных волн, единственной особой точкой на плоскости (F, G) является точка типа центра с координатами $F = 0$, $G = 0$. В этой области частот систем (15) обладает только пространственно-периодическими решениями в виде так называемых "кноидальных" волн.

На верхней границе щели ($\omega = \omega_2$, $\delta_2 = 0$) происходит бифуркация решений: центр $F = 0$, $G = 0$ расщепляется на три особые точки, и в области частот ($\omega_1 < \omega < \omega_2$) на фазовой плоскости (F, G) существует особая точка типа седла $F = 0$, $G = 0$ и две особые точки типа центра $F = 0$, $G = \pm \sqrt{\delta_2/\beta}$ (рис. 2, *a*). Таким образом, внутри щели возникают замкнутые сепаратрисы типа L , выходящие из седловой точки, огибающие один из центров и возвращающиеся в седло. Этим сепаратрисам соответствуют солитонные решения — щелевые солитоны. В L -солитонах оба поля F и G имеют нулевые асимптотики на бесконечности. Амплитуда колебаний легких атомов G превышает амплитуду колебаний тяжелых атомов F . Данный солитон можно рассматривать как локализованные колебания легких частиц на фоне малых колебаний тяжелых частиц.

На нижней границе щели ($\omega = \omega_1$, $\delta_1 = 0$) происходит следующая бифуркация: седло $F = 0$, $G = 0$ расщепляется на центр с такими же координатами и два новых седла с координатами $F = \pm \sqrt{\delta_1/\beta}$, $G = 0$ (рис. 2, *b*). В области частот $(\omega_1 - p\omega_2)/(1-p) = \omega_* < \omega < \omega_1$ возникает два типа сепаратрис: N и N' , которые соответствуют так называемым "околощелевым" солитонам. N -солитон, как и L -солитон, является солитоном поля легких частиц: амплитуда поля G в таком солитоне превышает амплитуду поля F . Однако в отличие от щелевого солитона в околощелевом солитоне N поле F имеет ненулевые асимптотики на бесконечности. N' -солитон аналогичен N -солитону, но в нем амплитуда поля F превышает амплитуду поля G , таким образом, это солитон поля тяжелых частиц.

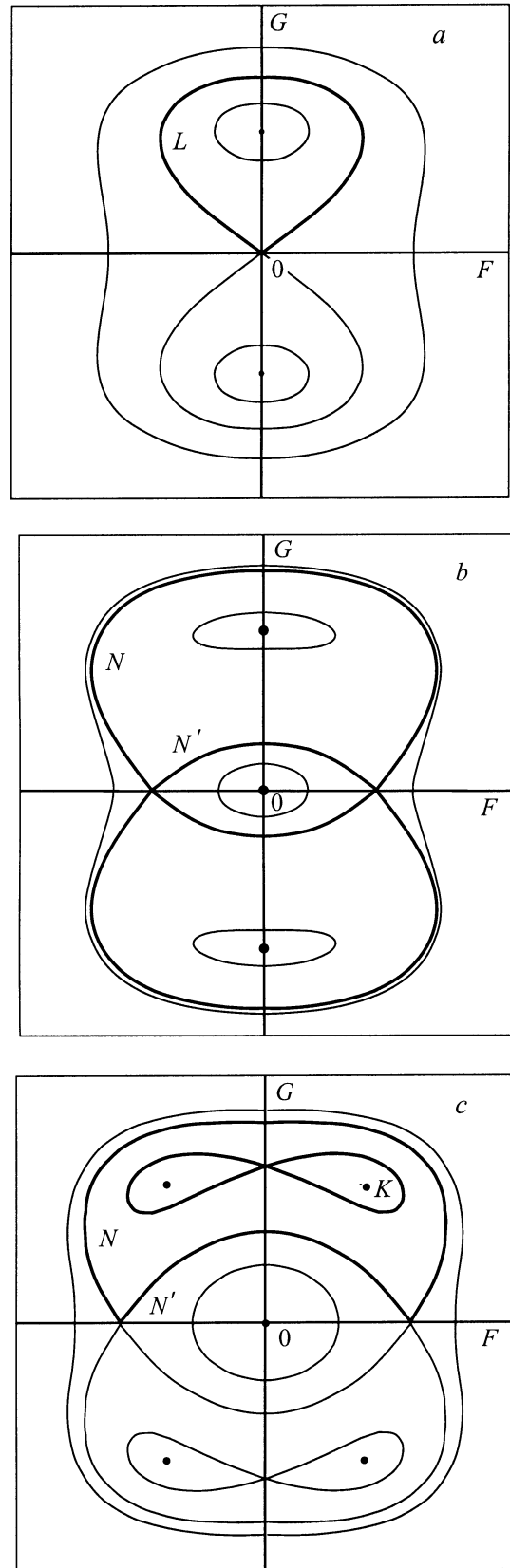


Рис. 2. Фазовые портреты системы (15) в случае чисто кубической внешней нелинейности при различных значениях частоты нелинейного возбуждения: $\omega_1 < \omega < \omega_2$ (*a*), $\omega_* < \omega < \omega_1$ (*b*), $\omega < \omega_*$ (*c*).

Наконец, при частоте $\omega = \omega_*$ ($\delta_1 = p\delta_2$) происходит последняя бифуркация: центры $F = 0$, $G = \pm\sqrt{\delta_2/\beta}$ расщепляются на седла с теми же координатами и центры с координатами $F = \pm\sqrt{\delta_1 - p\delta_2/(1-p^2)}$, $G = \pm\sqrt{\delta_2 - p\delta_1/(1-p^2)}$ (рис. 2, *c*). Таким образом, в области частот $\omega < \omega_* < \omega_1$ помимо сепаратрисы N и N' возникают новые сепаратрисы типа K . Этим сепаратрисам соответствуют окошечковые солитоны, в которых связанные колебания поля тяжелых частиц существуют на фоне неубывающих на бесконечности колебаний легких частиц. K -солитон представляет собой комбинацию "светлого" солитона поля F и "темного" солитона поля G , т. е. возбуждения поля тяжелых частиц локализованы в "яме" конденсата возбуждений легких частиц.

Наличие интеграла "движения" (17) позволяет проинтегрировать систему (15) и получить аналитические выражения для всех описанных выше типов солитонных решений [1,6].

2.2. Система с нелинейным внутренним потенциалом. Рассмотрим двухатомную цепочку в отсутствие внешнего потенциала ($\gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = 0$ в (2)), но с нелинейным межчастичным взаимодействием (1).

Уравнения движения (3) в данном случае будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned}
 M \frac{d^2 v_n}{dt^2} + K_2(2v_n - w_{n+1} - w_{n-1}) \\
 + K_3[(v_n - w_{n-1})^2 - (v_n - w_{n+1})^2] \\
 + K_4[(v_n - w_{n-1})^3 + (v_n - w_{n+1})^3] = 0, \quad n = 2j, \\
 m \frac{d^2 w_n}{dt^2} + K_2(2w_n - v_{n+1} - v_{n-1}) \\
 + K_3[(w_n - v_{n-1})^2 - (w_n - v_{n+1})^2] \\
 + K_4[(w_n - v_{n-1})^3 + (w_n - v_{n+1})^3] = 0, \quad n = 2j + 1. \quad (18)
 \end{aligned}$$

Решение системы (18), как и в случае внешней нелинейности, будем искать в виде (11). Переходя к континуальному пределу и подставляя выражения (11) в уравнения (18), получаем следующую систему уравнений для $f^{(i)}$, $g^{(i)}$:

$$\begin{aligned}
 2K_2(f^{(0)} - g^{(0)}) + K_3FG = 0, \\
 (-4M\omega^2 + 2K_2)f^{(2)} - 2K_2g^{(2)} + K_3FG = 0, \\
 (-4m\omega^2 + 2K_2)g^{(2)} - 2K_2f^{(2)} - K_3FG = 0, \\
 \delta_1 F - \frac{dG}{dx} + 2K_3G[2(f^{(0)} - g^{(0)}) + f^{(2)} - g^{(2)}] \\
 + \frac{3}{2}K_4(F^3 + FG^2) = 0, \\
 \delta_2 G + \frac{dF}{dx} + 2K_3F[2(f^{(0)} - g^{(0)}) + f^{(2)} - g^{(2)}] \\
 + \frac{3}{2}K_4(G^3 + GF^2) = 0. \quad (19)
 \end{aligned}$$

Здесь, как и раньше, δ_i обозначают отклонения частот ω от нижней и верхней границ щели (см. (14)), $F \equiv f^{(1)}$, $G \equiv g^{(1)}$ и произведена перенормировка координаты $(\epsilon^2/2K_2)x \rightarrow x$.

После исключения функций f^0 , g^0 , f^2 и g^2 получаем гамильтонову систему уравнений для функций F и G вида (15) со следующими значениями параметров β и p :

$$\begin{aligned}
 \beta &= -\frac{3}{2}K_4, \\
 p &= 1 - \frac{2}{3} \frac{K_3^2}{K_2K_4}. \quad (20)
 \end{aligned}$$

Отметим, что в работе [12] для аналогичной системы из-за неверного выбора формы решения получилась негамильтонова система уравнений.

Особый интерес представляет частный случай $K_4 = 0$, когда в нелинейной части потенциала межчастичного взаимодействия (1) содержится только асимметричное по смещениям атомов слагаемое. При таком выборе межчастичного потенциала система уравнений (15) для переменных F и G примет вид

$$\begin{aligned}
 \frac{dG}{dx} &= \delta_1 F - \frac{K_3^2}{K_2} FG^2, \\
 -\frac{dF}{dx} &= \delta_2 G - \frac{K_3^2}{K_2} GF^2. \quad (21)
 \end{aligned}$$

Данная система не обладает неподвижными солитонными решениями. Однако, как будет показано далее, движущиеся солитоны с ненулевой скоростью в этой системе допускаются. При частотах $\omega > \omega_2$ ($\delta_1, \delta_2 < 0$), т. е. выше щели спектра линейных волн, единственной особой точкой на фазовой плоскости (F, G) является центр с координатами $F = 0$, $G = 0$. В этой области частот система (21) обладает лишь пространственно-периодическими решениями. На границе щели ($\omega = \omega_2$) центр трансформируется в особую линию $F = 0$. В щели спектра при частотах $\omega_1 < \omega = \omega_2$ она превращается в особую точку типа седла $F = G = 0$. В этой области частот существуют лишь сингулярные решения, не имеющие физического смысла. На нижней границе щели ($\omega = \omega_2$) седловая точка расщепляется на пять особых точек: центр $F = G = 0$ и четыре седла с координатами: $F = \pm\sqrt{\delta_2 2K_2/K_3^2}$, $G = \pm\sqrt{\delta_1 2K_2/K_3^2}$ (рис. 3, *a*). Сепаратрисы C и C' разделяют два типа решений: решения с периодически меняющимися с координатой полями F и G , аналогичные решениям выше щели, и решения, в которых одно из полей неограниченно нарастает с координатой (последние не имеют физического смысла). Сами сепаратрисы соответствуют особому типу солитонных решений, в которых одно из полей имеет форму кинка, в то время как второе поле равно константе по всей длине цепочки (рис. 3, *b*). Аналитическое выражение для решений, соответствующих

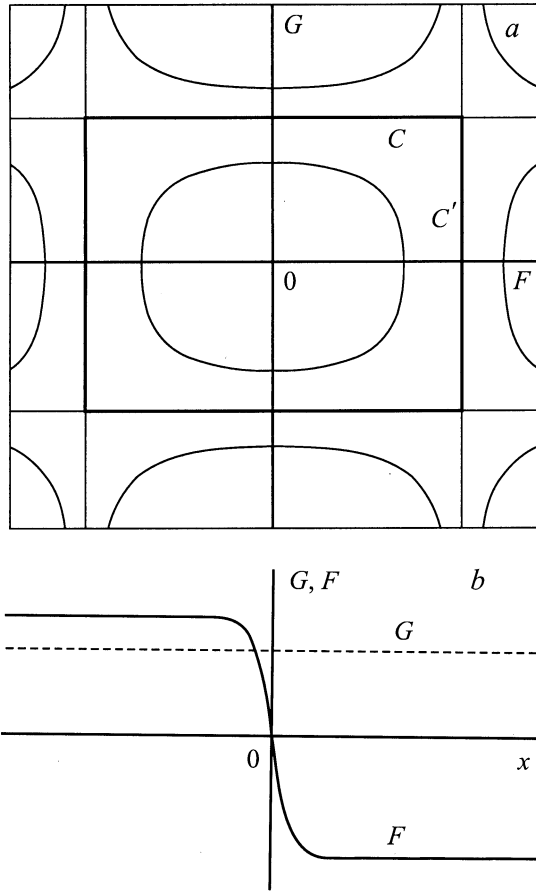


Рис. 3. *a* — фазовый портрет системы (21), *b* — профиль солитонного решения, соответствующего сепаратрисе *C*.

сепаратрисам *C*, имеет вид

$$G = \pm \sqrt{\frac{\delta_1 2K_2}{K_3^2}},$$

$$F = \mp \sqrt{\frac{\delta_2 2K_2}{K_3^2}} \tanh \left[\sqrt{\delta_1 \delta_2} \delta_2 x \right], \quad (22)$$

а сепаратрисам *C'* соответствуют следующие решения:

$$F = \pm \sqrt{\frac{\delta_2 2K_2}{K_3^2}},$$

$$G = \mp \sqrt{\frac{\delta_1 2K_2}{K_3^2}} \tanh \left[\sqrt{\delta_1 \delta_2} \delta_1 x \right]. \quad (23)$$

2.3. Система с нелинейными внешним и внутренним потенциалами взаимодействия. Нетрудно убедиться, что комбинация двух типов нелинейности не приводит к физически новым результатам. Очевидно, что результирующие уравнения для переменных *F* и *G* по-прежнему будут иметь вид (15),

с параметрами β и p , которые определяются константами $K_2, K_3, K_4, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ и несколько отличаются от введенных в формулах (16)

$$\beta = \gamma_3^2 (2K_2 + \gamma_2) \times \frac{16(2K_2 + \gamma_2)^2 - \gamma_2(4K_2 + \gamma_2)}{2\gamma_2(4K_2 + \gamma_2)[8(2K_2 + \gamma_2)^2 + \gamma_2(4K_2 + \gamma_2)]} - \frac{3}{4}(2K_4 + \gamma_4),$$

$$p = \frac{1}{\beta} \left\{ \gamma_3^2 K_2 \frac{16(2K_2 + \gamma_2)^2 + 3\gamma_2(4K_2 + \gamma_2)}{\gamma_2(4K_2 + \gamma_2)[8(2K_2 + \gamma_2)^2 + \gamma_2(4K_2 + \gamma_2)]} + \frac{3}{2}K_4 - \frac{K_3^2}{K_2} \right\}. \quad (16)$$

Таким образом, уравнения (15) описывают неподвижные решения системы (3) в общем случае наличия "внешней" и "внутренней" нелинейности третьей и четвертой степеней по смещениям атомов в потенциале. Уравнения (15) аналогичны уравнениям, получаемым при анализе нелинейной динамики двухатомной цепочки с "внешней" и "внутренней" нелинейностями четвертой степени (четный потенциал) [5,6]. Все возможные решения системы (15) качественно изучены и описаны в работе [5]. Метод получения аналитических выражений для решений данной системы подробно изложен в [1,6].

3. Движущиеся солитоны

Перейдем к рассмотрению движущихся решений системы (3). Для простоты будем рассматривать только случай кубической нелинейности потенциалов, полагая коэффициенты K_4 и γ_4 в выражениях (1) и (2) равными нулю. Как было показано выше, наличие членов четвертой степени по смещениям атомов в потенциале качественно не изменяет структуру нелинейных решений.

При анализе решений удобно использовать метод двухволнового приближения. Вблизи щели спектра линейных волн (при $\epsilon \ll 1$), согласно (7), будем искать решение уравнений (3) с точностью до членов порядка ϵ^2 включительно в виде

$$\xi_n = \epsilon \left[A_1 \exp \left(-i \frac{\pi n}{2} \right) + A_2 \exp \left(i \frac{\pi n}{2} \right) \right] \exp(i\omega t) + \epsilon^2 \left\{ [B_1 \exp(-i\pi n) + B_2] \exp(i2\omega t) + \frac{1}{2} [C_1 \exp(-i\pi n) + C_2] \right\} + c.c., \quad (25)$$

где A_i, B_i, C_i — функции номера атома n и времени t .

В данном разделе, как и ранее, последовательно рассмотрим случаи наличия в системе: (3.1) только внешней нелинейности; (3.2) только внутренней нелинейности; (3.3) нелинейностей обоих типов.

3.1. Случай нелинейного внешнего потенциала. Полагаем взаимодействие между частицами гармоническим ($K_3 = K_4 = 0$ в (1) и (3)).

Подставляя (25) в (3) и приравнявая коэффициенты при различных экспонентах, в длинноволновом пределе получаем следующую систему алгебраических уравнений для переменных A_i, B_i, C_i :

$$\begin{aligned} \gamma_2(C_2 + C_2^*) + 2\gamma_3[|A_1|^2 + |A_2|^2] &= 0, \\ (4K_2 + \gamma_2)(C_1 + C_1^*) + 2\gamma_3[A_1A_2^* + A_2A_1^*] &= 0, \\ (-4\omega^2\mu + \gamma_2)B_2 + 2\gamma_3A_1A_2 &= 0, \\ (-4\omega^2\mu + 4K_2 + \gamma_2)B_1 + \gamma_3(A_1^2 + A_2^2) &= 0 \end{aligned} \quad (26)$$

и дополнительно систему из двух дифференциальных уравнений для A_1 и A_2

$$\begin{aligned} i2\omega\mu \frac{\partial A_1}{\partial t} + i2K_2 \frac{\partial A_1}{\partial x} + (-\omega^2\mu + 2K_2 + \gamma_2)A_1 \\ - \omega^2\mu\epsilon^2 A_2 + \gamma_3\epsilon^2[2(B_1A_1^* + B_2A_2^*) \\ + (C_1 + C_1^*)A_2 + (C_2 + C_2^*)A_1] &= 0, \\ i2\omega\mu \frac{\partial A_2}{\partial t} - i2K_2 \frac{\partial A_2}{\partial x} + (-\omega^2\mu + 2K_2 + \gamma_2)A_2 \\ - \omega^2\mu\epsilon^2 A_1 + \gamma_3\epsilon^2[2(B_1A_2^* + B_2A_1^*) \\ + (C_1 + C_1^*)A_1 + (C_2 + C_2^*)A_2] &= 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Подставим частоту решения в виде $\omega = \omega_0 + \delta$, где $\delta \sim \epsilon^2$ и $\omega_0^2 = (2K_2 + \gamma_2)/\mu$ — середина щели спектра линейных волн. (Таким образом, δ — отклонение частоты от середины щели).

После перенормировки времени, координаты и амплитуд

$$\frac{\omega_0\epsilon^2}{2} t \rightarrow t, \quad \frac{2K_2 + \gamma_2}{2K_2} \epsilon^2 x \rightarrow x,$$

$$2\gamma_3 \sqrt{\frac{8K_2 + 5\gamma_2}{\gamma_2(4K_2 + 3\gamma_2)(2K_2 + \gamma_2)}} A_i = F_i$$

получаем для F_i систему из двух дифференциальных уравнений в безразмерных переменных

$$\begin{aligned} -\frac{\partial F_1}{\partial t} - \frac{\partial F_1}{\partial x} &= i\Omega F_1 + iF_2 \\ &+ \frac{i}{2} [F_1(|F_1|^2 + p_1|F_2|^2) + p_2F_2^2F_1^*], \\ -\frac{\partial F_2}{\partial t} + \frac{\partial F_2}{\partial x} &= i\Omega F_2 + iF_1 \\ &+ \frac{i}{2} [F_2(|F_2|^2 + p_1|F_1|^2) + p_2F_1^2F_2^*], \end{aligned} \quad (28)$$

где $\Omega = 2\delta/(\omega_2\epsilon^2)$ — безразмерное отклонение частоты от середины щели, а параметры p_1 и p_2 выражаются

через отношение констант K_2 и γ_2 ($\chi = K_2/\gamma_2$)

$$\begin{aligned} p_1 &= 2 \frac{32\chi^2 + 24\chi + 5}{(8\chi + 3)(8\chi + 5)} > 0, \\ p_2 &= \frac{(4\chi + 5)}{(8\chi + 5)(4\chi + 1)} > 0 \end{aligned} \quad (29)$$

(напомним, что константы K_2 и γ_2 положительны).

Уравнения (28) аналогичны уравнениям, получаемым при анализе нелинейной динамики двухатомной цепочки с четным внешним потенциалом [8] и одноатомной цепочки в двухбарьерном внешнем потенциале [13].

Вводя новые вещественные переменные u_1, u_2, s и q ,

$$\begin{aligned} F_1 &= u_1 \exp(iq + is), \\ F_2 &= u_2 \exp(iq - is), \end{aligned} \quad (30)$$

получаем для них следующие уравнения:

$$\frac{du_1}{dz} = -u_1 \sin(2s) - \beta u_1^3 \sin(4s), \quad (31)$$

$$\frac{ds}{dz} = -\nu - \cos(2s) - \alpha u_1^2 - \beta u_1^2 \cos(4s), \quad (32)$$

$$\frac{dq}{dz} = -\nu V - \frac{V}{\sqrt{1-V^2}(1+V)} u_1^2, \quad (33)$$

$$u_2 = \sqrt{\frac{1-V}{1+V}} u_1, \quad (34)$$

где $z = (x - Vt)/\sqrt{1-V^2}$, а $\nu(\Omega, V)$, $\alpha(V, p_1, p_2)$ и $\beta(V, p_1, p_2)$ определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{\Omega}{\sqrt{1-V^2}}, \\ \alpha &= \frac{1+V^2+p_1(1-V^2)}{2(1+V)\sqrt{1-V^2}}, \\ \beta &= \frac{p_2(1-V^2)}{2(1+V)\sqrt{1-V^2}}. \end{aligned} \quad (35)$$

Связь между амплитудами u_1, u_2 вида (34) соответствует двухпараметрическим решениям системы (28) (в качестве параметров удобно брать частоту Ω и скорость V). Отметим, что помимо двухпараметрических решений, уравнения (28) допускают также более широкий класс трехпараметрических решений [8,14], которые в рамках данной работы не рассматриваются. Подробному изучению трехпараметрических решений посвящена работа [14].

Уравнения (31), (32) отделяются и представляют систему гамильтоновых уравнений со следующим эффективным гамильтонианом:

$$H = \left(\nu + \cos(2s)\right) u_1^2 + \frac{\alpha}{2} u_1^4 + \frac{\beta}{2} u_1^4 \cos(4s), \quad (36)$$

где переменные u_1^2 и $2s$ играют роль канонически сопряженных координаты и импульса, а координата z — эффективного "времени".

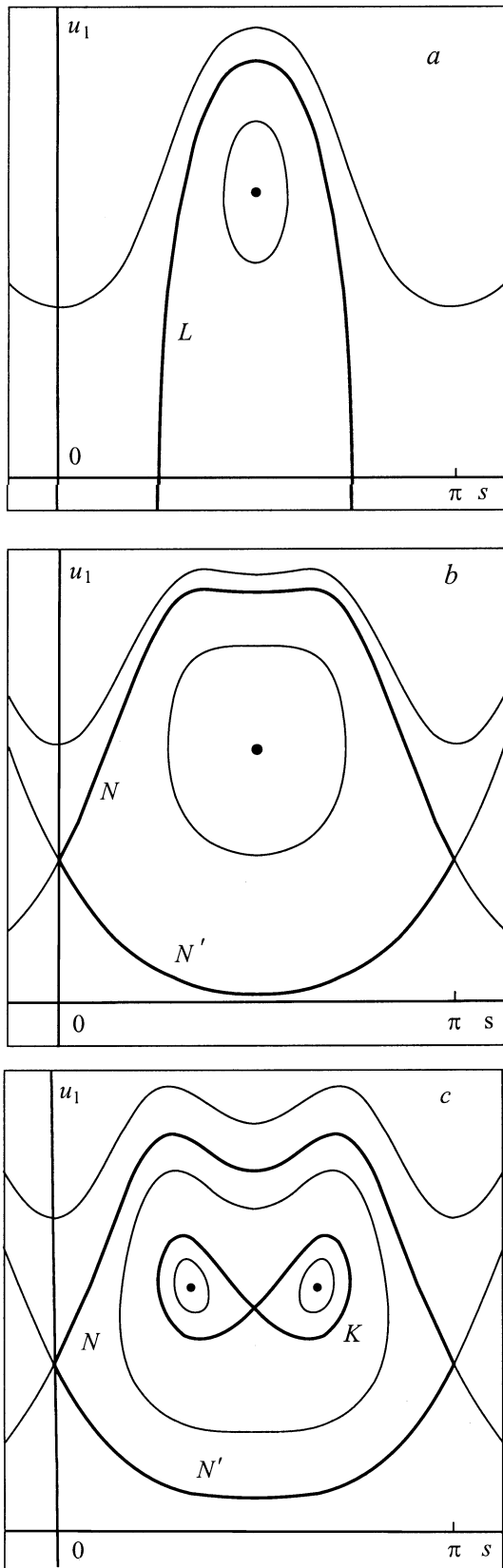


Рис. 4. Фазовые портреты системы (31), (32) с параметрами α и β , определяемыми соотношениями (35) (случай внешней кубической нелинейности) при различных значениях параметра ν : $-1 < \nu < 1$ (a), $\nu_* < \nu < -1$ (b), $\nu < \nu_*$ (c).

Удобно исследовать возможные решения системы (31), (32) на фазовой плоскости переменных (u_1, s) . Вид фазового портрета рассматриваемой системы зависит от значения параметра ν , зависящего от частоты и скорости нелинейного возбуждения ((см. (35)). В общем случае он симметричен относительно оси $u_1 = 0$ и периодичен по переменной s с периодом, равным π . Поэтому будем рассматривать фазовый портрет данной системы в области $u_1 > 0, 0 < s < \pi$ (рис. 4).

При $\nu > 1$, когда частота нелинейного возбуждения лежит над верхней ветвью спектра линейных волн ($\Omega > \sqrt{1 - V^2}$), особых точек на фазовой плоскости u_1, s нет и солитонные решения в данной области частот отсутствуют. При частоте $\Omega = \sqrt{1 - V^2}$ ($\nu = 1$) возникает особая точка с координатами $u_1 = 0, s = \pi/2$, которая расщепляется на два седла $u_1 = 0, s = \pi \pm \arccos(-\nu)/2$ и центр $u_1 = \sqrt{(1 - \nu)(\alpha + \beta)}, s = \pi/2$ в области параметров V и Ω , определяемой неравенством $-1 < \nu < 1$ (рис. 4, a). Седла соединены сепаратрисами L , которые соответствуют движущимся щелевым солитонам. В таких солитонах амплитуды u_1, u_2 имеют нулевые асимптотики при $z \rightarrow \pm\infty$, а фаза s приобретает сдвиг $\Delta_s = \arccos(-\nu)$ при изменении координаты z от $-\infty$ до $+\infty$.

На нижней ветви спектра линейных волн, т.е. при $\nu = -1$ ($\Omega = -\sqrt{1 - V^2}$), происходит очередная бифуркация. В области значений параметра ν : $-(\alpha - \beta)/(2\beta) = \nu_* < \nu < -1$, на фазовой плоскости u_1, s существуют седла с координатами $u_1 = \sqrt{(-\nu - 1)(\alpha + \beta)}, s = 0, \pi$ и центр с координатами $u_1 = \sqrt{(-\nu + 1)(\alpha + \beta)}, s = \pi/2$ (рис. 4, b). Седла соединены сепаратрисами N и N' , которым соответствуют движущиеся околощелевые солитоны. В отличие от щелевых L -солитонов амплитуды u_1 и u_2 в солитонах N и N' имеют отличные от нуля асимптотики на бесконечности ($z \rightarrow \pm\infty$), а сдвиг фазы s при изменении координаты z от $-\infty$ до $+\infty$ равен $\Delta_s = \pi$.

Наконец, при $\nu = \nu_* = -(\alpha - \beta)/(2\beta)$ происходит последняя бифуркация: центр $u_1 = \sqrt{(-\nu + 1)(\alpha + \beta)}, s = \pi/2$ расщепляется на седло с теми же координатами и два новых центра с координатами $u_1 = \sqrt{-\nu/(\alpha - \beta)}, s = \pi \pm \arccos(\nu_*/\nu)/2$ (рис. 4, c). Теперь помимо сепаратрис N и N' возникает новый тип сепаратрис — K . В области параметров $\nu < \nu_*$ существует три типа движущихся околощелевых солитонов: N, N' и K . Характерной особенностью K -солитонов является то, что фаза s в них не приобретает сдвига при изменении координаты z от $-\infty$ до $+\infty$.

Движущиеся щелевые солитоны L и околощелевые солитоны N, N', K были подробно изучены в работах [8, 13].

3.2. Случай нелинейного межчастичного взаимодействия. В этом случае полагаем коэффициенты γ_2, γ_3 и γ_4 равными нулю в (3) (внешний потенциал отсутствует).

Решение системы (3) по-прежнему будем искать в виде (25). Подставляя (25) в (3) и переходя к безраз-

мерным переменным

$$\frac{\omega_0 \epsilon^2}{2} t \rightarrow t, \quad \epsilon^2 x \rightarrow x, \quad \sqrt{\frac{8K_3^2}{K_2}} A_i = F_i,$$

получаем окончательно для F_i систему из двух дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} -\frac{\partial F_1}{\partial t} - \frac{\partial F_1}{\partial x} &= i\Omega F_1 + iF_2 \\ &+ \frac{i}{2} [F_1(|F_1|^2 + 2|F_2|^2) - 3F_2^2 F_1^*], \\ -\frac{\partial F_2}{\partial t} + \frac{\partial F_2}{\partial x} &= i\Omega F_2 + iF_1 \\ &+ \frac{i}{2} [F_2(|F_2|^2 + 2|F_1|^2) - 3F_1^2 F_2^*], \end{aligned} \quad (37)$$

где $\omega_0 = \sqrt{2K_2/\epsilon^2}$ — частота, соответствующая середине щели, $\Omega = 2\delta/(\omega_0 \epsilon^2)$ — безразмерное отклонение частоты от середины щели.

После перехода к вещественным переменным u_1, u_2, s и q согласно (30) получаем для них систему уравнений (31)–(34) со следующими измененными коэффициентами α и β :

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{3 - V^2}{2(1 + V)\sqrt{1 - V^2}}, \\ \beta &= -\frac{3(1 - V^2)}{2(1 + V)\sqrt{1 - V^2}}. \end{aligned} \quad (38)$$

Эволюция фазового портрета системы (31), (32), в данном случае происходит аналогично эволюции, описанной в предыдущем подразделе для случая внешней нелинейности системы. Как и прежде, с изменением значения параметра ν происходят три последовательные бифуркации. Бифуркации на верхней и нижней ветвях спектра линейных волн (т.е. при $\nu = 1$ и $\nu = -1$) качественно совпадают с описанными ранее соответствующими бифуркациями. Таким образом, фазовые портреты системы (31), (32) в областях $-1 < \nu < 1$ и $-(\alpha + \beta)/(2\beta) = \nu_* < \nu < -1$ в данном случае такие же, как и соответствующие фазовые портреты для случая внешней нелинейности (рис. 4, а и б). Однако бифуркация при $\nu = \nu_*$ теперь имеет иной характер: каждое из седел $u_1 = \sqrt{(-\nu - 1)(\alpha + \beta)}$, $s = 0$, π расщепляется на центр с такими же координатами и два новых седла с координатами $u_1 = \sqrt{-\nu/(\alpha - \beta)}$, $s = \pm \arccos(\nu_*/\nu)/2$ (рис. 5). Таким образом, при $\nu \leq \nu_*$ на фазовом портрете системы (31), (32) имеется четыре типа сепаратрис: $N, N', \tilde{N}, \tilde{N}'$, которые соответствуют движущимся околощелевым солитонам. Данные солитоны по своим свойствам аналогичны околощелевым солитонам N и N' в области значений параметра ν ($\nu_* < \nu < -1$), основное отличие между ними заключается только в асимптотиках фазы s на бесконечности (при $z \rightarrow \pm\infty$).

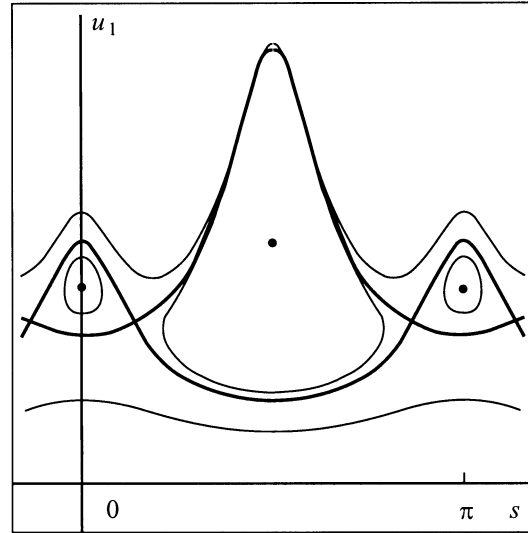


Рис. 5. Фазовый портрет системы (31), (32) с параметрами α и β , определяемыми соотношениями (38) (случай внутренней кубической нелинейности) в области значений параметра ν : $\nu < \nu_*$.

Итак, при наличии внутренней кубической нелинейности в системе могут существовать движущиеся щелевые солитоны (L) и движущиеся околощелевые солитоны ($N, N', \tilde{N}, \tilde{N}'$). В то же время, как было показано ранее (см. подраздел 3.2), неподвижных солитонных решений при таком характере нелинейности нет. В связи с этим представляет интерес предельный переход от движущихся к неподвижным решениям. Анализ показывает, что при $V \rightarrow 0$ амплитуды L, N и \tilde{N} солитонов вблизи координаты $z = 0$ (т.е. вблизи центра солитона) бесконечно нарастают (заметим, однако, что с ростом амплитуд поля теряет применимость используемое нами малоамплитудное приближение). Солитоны N' и \tilde{N}' переходят при $V \rightarrow 1$ в локализованные решения (22, 23), соответствующие сепаратрисам C и C' на рис. 3, б.

В качестве примера приведем аналитическое выражение для движущегося щелевого L -солитона

$$\begin{aligned} s &= \frac{\pi}{2} = \arctan[X], \\ u_1 &= \left\{ (1 + V)\sqrt{1 - V^2} \frac{2(1 + \nu)(1 + X^2)}{V^2(1 + X^4) + 4(6 - 5V^2)X^2} \right. \\ &\quad \left. \times \frac{1}{\cosh^2(2 - \sqrt{1 - \nu^2}z)} \right\}^{1/2}, \\ q &= \nu Vz + \frac{V}{\sqrt{2 - V^2}} \arctan \left[2\sqrt{2 - V^2} \frac{X}{1 - X^2} \right], \end{aligned} \quad (39)$$

где

$$X = \sqrt{\frac{1 + \nu}{1 - \nu}} \tan(2 - \sqrt{1 - \nu^2}z).$$

Из приведенных соотношений видно, что при малых скоростях ($|V| \ll 1$) амплитуда u_1 в окрестности координаты $z = 0$ неограниченно возрастает. Таким образом,

излагаемый асимптотический метод не пригоден для анализа солитонных решений системы с малыми скоростями в случае кубической внутренней нелинейности. В рамках малоамплитудного приближения неподвижных и движущихся с малой скоростью солитонных решений рассматриваемой системы не существует.

3.3. Общий случай нелинейного кубического потенциала. Очевидно, что комбинация двух типов нелинейностей, как и в случае неподвижных решений, не приводит к физически новым результатам. Можно показать, что в общем случае наличия в системе внешней и внутренней кубических нелинейностей после подстановки решения (25) в уравнение (3) и перехода к безразмерным переменным

$$\frac{\omega_0 \epsilon^2}{2} t \rightarrow t, \quad \frac{2K_2 + \gamma_2}{2K_2} \epsilon^2 x \rightarrow x, \quad \eta A_i = F_i,$$

$$\eta = 2\gamma_3^2 \frac{8K_2 + 5\gamma_2}{\gamma_2(4K_2 + 3\gamma_2)(2K_2 + \gamma_2)} + \frac{4K_3^2}{K_2}$$

получаем для F_i систему из двух дифференциальных уравнений вида (28) со следующими значениями параметров p_1 и p_2 :

$$p_1 = \frac{1}{\eta} \left[4\gamma_3^2 \frac{32K_2^2 + 24K_2\gamma_2 + 5\gamma_2^2}{\gamma_2(8K_2 + 3\gamma_2)(4K_2 + 3\gamma_2)(2K_2 + \gamma_2)} + \frac{8K_3^2}{K_2} \right],$$

$$p_2 = \frac{1}{\eta} \left[2\gamma_3^2 \frac{4K_2 + 5\gamma_2}{(4K_2 + \gamma_2)(2K_2 + \gamma_2)} - \frac{12K_3^2}{K_2} \right].$$

Структура нелинейных решений системы зависит от соотношения коэффициентов γ_3 и K_3 , характеризующих внешнюю и внутреннюю нелинейности. Полный качественный анализ системы вида (28) для различных значений входящих в нее параметров проведен в работе [8].

В работе рассмотрена наиболее полная модель нелинейной двухатомной цепочки, в которой внешний нелинейный потенциал и потенциал межчастичного взаимодействия включают в себя как четные, так и нечетные по смещениям атомов слагаемые. При помощи модифицированного асимптотического метода, учитывающего асимметричность нелинейного потенциала относительно смещений атомов, получены динамические уравнения для неподвижных решений системы, отличающиеся от таковых, приведенных в работе [12]. Также разработан асимптотический метод нахождения решений для движущихся солитонов. Показано, что динамика неподвижных и движущихся солитонов может быть описана при помощи дифференциальных уравнений, полностью аналогичных уравнениям, получаемым при анализе нелинейной динамики двухатомной цепочки с четным потенциалом. Проведен качественный анализ возможных неподвижных и движущихся солитонов на фазовой плоскости в частных случаях "внешней" и "внутренней" нелинейностей. В последнем случае система не обладает неподвижными малоамплитудными солитонными решениями, возможны лишь пространственно-периодические решения в виде

так называемых "кноидальных волн", а также специфические решения, в которых огибающая колебаний частиц одного из сортов имеет форму кинка. Однако движущиеся малоамплитудные солитоны в случае кубической нелинейности межчастичного взаимодействия существуют.

Список литературы

- [1] O. Chubykalo, A. Kovalev, O. Usatenko. Phys. Rev. **B47**, 6, 3153 (1993).
- [2] O. Chubykalo, Yu. Kivshar. Phys. Rev. **E48**, 5, 4128 (1993).
- [3] A.S. Kovalev, K.V. Kladko, O.V. Usatenko. J. Phys. Soc. Jpn. **64**, 7, 2464 (1995).
- [4] O.V. Usatenko, A.S. Kovalev, A.A. Vialov. Fluctuation phenomena: Disorder and Nonlinearity. World Scientific / Ed. by A.R. Bishop, S. Jimenez, L. Vazquez. (1994); P. 286. O.V. Усатенко, А.С. Ковалев, А.А. Вялов. ФТТ **37**, 8, 2487 (1995).
- [5] A.S. Kovalev, O.V. Usatenko, A.V. Gorbach. Phys. Rev. **E60**, 2, 2309 (1999).
- [6] А.С. Ковалев, О.В. Усатенко, А.В. Горбач. Электромагнитные явления **1**, 3, 324 (1998).
- [7] A.S. Gorshkov, O.N. Ermakova, V.F. Marchenko. Nonlinearity **10**, 4, 1007 (1997).
- [8] А.С. Ковалев, О.В. Усатенко, А.В. Горбач. ФТТ **43**, 9, 000 (2001).
- [9] А.М. Косевич, А.С. Ковалев. ЖЭТФ **67**, 5 (11), 1793 (1974).
- [10] П.С. Ланда, В.Ф. Марченко. УФН **161**, 9, 201 (1991).
- [11] А.М. Косевич. Теория кристаллической решетки. Изд-во ХГУ, Харьков (1988).
- [12] Yu.S. Kivshar, O.A. Chubykalo, O.V. Usatenko, D.M. Grinyoff. Int. J. of Modern Phys. **B9**, 22, 2963 (1995).
- [13] А.С. Ковалев, О.В. Усатенко, А.В. Горбач. Динамика нелинейной одноатомной цепочки в двухбарьерном внешнем потенциале. Будет опубликовано в ФНТ.
- [14] J. Feng, F.K. Kneubuhl. IEEE J. of Quantum Electronics **29**, 2, 590 (1993).