

Отражение и поглощение света квантовой ямой в сильном магнитном поле при импульсном облучении

© И.Г. Ланг, Л.И. Коровин, Д.А. Контрерас-Солорио*, С.Т. Павлов*,**

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе Российской академии наук,
194021 Санкт-Петербург, Россия

*Escuela de Fisica de la UAZ, Apartado Postal c-580,
98060 Zacatecas, Mexico

**Физический институт им. П.Н. Лебедева Российской академии наук,
117924 Москва, Россия

E-mail: ilang@dor.ioffe.rssi.ru

E-mail: pavlov@ahabon.reduaz.mx

(Поступила в Редакцию 17 октября 2000 г.)

Показано, что при импульсном световом облучении квантовой ямы, в которой имеется набор большого числа эквидистантных энергетических уровней электронных возбуждений, в проходящем, отраженном и поглощаемом потоках энергии возникают осцилляции несинусоидального характера. В случае длинных импульсов, продолжительность которых γ_i^{-1} на порядок превосходит время $\hbar/\Delta E$, где ΔE — расстояние между уровнями, амплитуда осцилляций мала. В случае коротких импульсов, для которых $\gamma_i^{-1} \leq \hbar/\Delta E$, амплитуда осцилляций сравнима с величинами потоков. В случае очень коротких импульсов $\gamma_i^{-1} \ll \hbar/\Delta E$ должно наблюдаться затухающее эхо возбуждающего импульса, возникающее через промежутки времени, равные $2\pi\hbar/\Delta E$. Рассмотрены случаи симметричного и асимметричного импульсов. Теория применима к узким квантовым ямам, помещенным в сильное магнитное поле, когда эквидистантные уровни соответствуют электронно-дырочным парам с различными квантовыми числами Ландау.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 00-02-16904) и Программы МНТК "Физика твердотельных наноструктур" (№ 97-1099). С.Т.П. благодарит Университет Сакатекаса и Национальный совет по науке и технологии (CONACyT) Мексики за финансовую поддержку и гостеприимство. Д.А.К.-С. благодарит CONACyT (27736-E) за финансовую поддержку.

В последнее десятилетие возник большой интерес к изучению отклика различных систем на облучение их световыми импульсами [1–4]. Применение техники коротких импульсов и коммерческих источников света сделало возможным исследовать когерентные явления в процессах взаимодействия света и элементарных возбуждений в различных системах, что дает новую полезную информацию о спектрах возбуждения и механизмах релаксации.

Ряд теоретических и экспериментальных работ посвящен исследованию экситонов Ванье–Мотта в объемных кристаллах и полупроводниковых квантовых ям (КЯ) с помощью метода TRS (Time Resolved Scattering), поскольку именно существование дискретных энергетических уровней обуславливает наиболее интересные результаты, полученные методом TRS. Хорошо известно, что пара близко расположенных друг к другу уровней энергии приводит к новому эффекту — синусоидальным биениям в отраженном и прошедшем импульсах на частоте, соответствующей энергетическому зазору между уровнями (см., например, [1]).

Настоящая работа посвящена теоретическому изучению отражения и поглощения световых импульсов от полупроводниковых КЯ, помещенных в сильное магнитное поле (СМП). В том случае, когда магнитное поле направлено перпендикулярно плоскости КЯ xy (а именно такой случай и будет рассматриваться), возбуждения в яме можно характеризовать квазиимпульсом \mathbf{K}_\perp в

плоскости xy , поскольку в этой плоскости система однородна. Если движение вдоль оси z финитно, то остальные индексы, присущие возбуждениям, дискретны. Если возбуждения в квантовой яме рождаются в результате облучения светом, то выполняется условие $\mathbf{K}_\perp = \varkappa_\perp$, где \varkappa_\perp — проекция волнового вектора световой волны на плоскость xy . Будем исследовать случай нормального облучения КЯ, при котором $\mathbf{K}_\perp = \varkappa_\perp = 0$. При этом условии и для финитного движения вдоль z спектр возбуждений всегда дискретен [5].

Если несущая частота ω_l возбуждающего светового импульса немного превышает ширину E_g запрещенной зоны полупроводника, который является материалом ямы, то рождаемые светом возбуждения представляют собой ЭДП, которые можно характеризовать индексами

$$n_e = n_h = n, l_e, l_h,$$

где $n_e(n_h)$ — квантовые числа Ландау электронов (дырок), $l_e(l_h)$ — квантовые числа размерного квантования электронов (дырок) вдоль оси z . В случае КЯ бесконечной глубины рождаются только пары, для которых $l_e = l_h$, но не будем ограничивать себя этим приближением. Энергия возбуждения, отсчитанная от основного состояния, равна

$$E_{\xi_0} = E_g + \varepsilon_{l_e}^e + \varepsilon_{l_h}^h + \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\Omega_\mu, \quad (1)$$

где ξ_0 — набор индексов $\mathbf{K}_\perp = 0$, n , l_e , l_h , $\varepsilon_{l_e}^e$ ($\varepsilon_{l_h}^h$) — энергия электрона (дырки) на уровне l размер-

ного квантования (см., например, [6]), $\Omega_\mu = |e|H/\mu c$, $\mu = m_e m_h / (m_e + m_h)$, $m_e(m_h)$ — эффективная масса электрона (дырки). Из (1) следует, что при фиксированных числах l_e и l_h уровни энергии возбуждений эквидистантны. Эквидистантность уровней, вообще говоря, нарушается, если учесть влияние кулоновского взаимодействия между электроном и дыркой, т.е. влияние экситонного эффекта. Но в [7] было показано, что кулоновское взаимодействие является слабым возмущением, если выполняются условия

$$d \ll a, \quad a_H \ll a,$$

(где d — ширина КЯ, a — радиус экситона Ванье–Мотта при нулевом магнитном поле, $a_H = (c\hbar/|e|H)^{1/2}$ — магнитная длина) и приводит лишь к малым сдвигам энергетических уровней (1). Будем считать, что КЯ достаточно узки и магнитные поля достаточно сильны для того, чтобы экситонными эффектами можно было пренебречь. Нарушение эквидистантности может быть также обусловлено непараболичностью зон в полупроводнике, но мы будем считать непараболичность зон слабо выраженной в интересующей нас области энергии электронов и дырок вблизи экстремумов зоны проводимости и валентной зоны.

Предположим, что КЯ с системой эквидистантных (не обязательно) энергетических уровней возбуждений облучается световым импульсом с несущей частотой ω_l . Пусть несущая частота ω_l находится вблизи резонанса с одним из энергетических уровней. Тогда возможны два варианта: или влиянием всех остальных уровней можно пренебречь, или необходимо учесть влияние некоторого количества соседних уровней. Выбор между этими двумя вариантами зависит от формы и продолжительности импульса, т.е. частотного спектра, соответствующего импульсу. В [8,9] была предсказана лестничная структура отраженного и проходящего импульсов при облучении КЯ, помещенной в СМП, резко несимметричным импульсом с крутым фронтом, что соответствует второму варианту из двух упомянутых выше. Первый вариант может осуществляться, например, в случае импульса симметричной формы при условии $\gamma_l \ll \Delta\omega$, где $\Delta\omega$ — расстояние между соседними уровнями, γ_l^{-1} — характерная продолжительность импульса, γ_l — разброс по частотам.

Большое количество теоретических работ посвящено исследованию отклика электронной системы КЯ в случае одного или двух возбужденных уровней. Следует подчеркнуть, что в случае квазидвумерных систем разрушение трансляционной инвариантности в направлении, перпендикулярном плоскости КЯ, приводит к радиационному уширению γ_r энергетических уровней [10,11]. В случае КЯ высокого качества радиационное уширение может быть сравнимо и даже превосходить по величине вклады других релаксационных механизмов. Эта физическая ситуация требует адекватного теоретического описания, в котором необходим учет высоких порядков взаимодействия электронов с электромагнитным полем [8–21].

В этих работах рассматривается КЯ с одним или двумя возбужденными уровнями, которые обеспечивают поглощение и отражение света КЯ. В случае когда

$$\gamma_r \ll \gamma, \quad (2)$$

где γ — нерadiационное обратное время жизни электронных возбуждений, при исследовании отклика на монохроматическое или импульсное облучение применима теория возмущений¹ и достаточен учет только низшего порядка по взаимодействию электронов с электромагнитным полем.

При условии (2) наведенные поля слева и справа от КЯ малы по сравнению с возбуждающими полями, в случае монохроматического облучения коэффициенты отражения (\mathcal{R}) и поглощения (\mathcal{A}) света малы по сравнению с единицей, а проходящий импульс мало отличается по форме от возбуждающего. Правда, и в этой ситуации получены интересные экспериментальные результаты: в проходящем свете наблюдается "затягивание" короткого импульса на времена порядка γ^{-1} и в случае двух близко расположенных уровней — синусоидальные биения на частотах $\Delta E\hbar$, где ΔE — расстояние между уровнями (см., например, [1]).

В противоположном случае

$$\gamma_r \geq \gamma \quad (3)$$

наведенные поля сравнимы по величине с возбуждающими, коэффициент \mathcal{R} может быть близок к единице, коэффициент \mathcal{A} — к 1/2. Результаты облучения КЯ монохроматическим светом при условии (3) в случае одного возбужденного уровня получены в [10–13,18], в случае двух возбужденных уровней — в [19]. В [17,21] определена форма отраженного и прошедшего импульсов вблизи резонанса несущей частоты с единственным уровнем в КЯ. Показано, что при условии (3) форма проходящего импульса может сильно отличаться от формы импульса возбужденного. В [8,19] вычислены радиационные времена жизни электронно-дырочных пар (ЭДП) в КЯ, помещенной в СМП.

В настоящей работе исследован отклик многоуровневой системы возбуждений в КЯ, помещенной в СМП, при облучении импульсом симметричной формы и проведено сопоставление с результатами, полученными для случая несимметричного импульса с крутым фронтом.

1. Электрические поля справа и слева от квантовой ямы при импульсном облучении

Допустим, что слева на одиночную КЯ перпендикулярно ее плоскости падает ограниченный во времени световой импульс, которому соответствует

¹ В случае импульсного облучения низшее приближение по взаимодействию электронов с электромагнитным полем при условии (2) допустимо только на временах $t \ll \gamma_r^{-1}$, так как при $t \geq \gamma_r^{-1}$ интенсивность прошедшего и отраженного света затухает по закону $\exp(-\gamma_r t)$.

электрическое поле

$$\mathbf{E}_0(z, t) = E_0 \mathbf{e}_l e^{-i\omega_l t} \left\{ \Theta(p) e^{-\gamma_{l1} p/2} + [1 - \Theta(p)] e^{\gamma_{l2} p/2} \right\} + \text{c. c.}, \quad (4)$$

где E_0 — вещественная амплитуда, \mathbf{e}_l — вектор поляризации, ω_l — несущая частота,

$$p = t - zn/c, \quad (5)$$

n — коэффициент преломления среды вне КЯ, $\Theta(p)$ — функция Хевисайда. Импульсу (4) соответствует вектор Пойнтинга

$$\mathbf{S}(z, t) = \mathbf{S}_0 P(p), \quad (6)$$

$$\mathbf{S}_0 = \frac{\mathbf{e}_z}{2\pi n} E_0^2,$$

$$P(p) = \Theta(p) e^{-\gamma_{l1} p} + [1 - \Theta(p)] e^{\gamma_{l2} p}, \quad (7)$$

\mathbf{e}_z — единичный вектор вдоль оси z . Произведем Фурье-преобразование (4), записав

$$\mathbf{E}_0(z, t) = E_0 \mathbf{e}_l \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega p} D_0(\omega) + \text{c. c.}, \quad (8)$$

$$D_0(\omega) = \frac{i}{2\pi} \left[\left(\omega - \omega_l + \frac{i\gamma_{l1}}{2} \right)^{-1} - \left(\omega - \omega_l - \frac{i\gamma_{l2}}{2} \right)^{-1} \right]. \quad (9)$$

При

$$\gamma_{l1} = \gamma_{l2} = \gamma_l \quad (10)$$

импульс симметричен. При $\gamma_l \rightarrow 0$ он переходит в монохроматическую световую волну с частотой ω_l , а функция $D_0(\omega)$ — в функцию Дирака $\delta(\omega - \omega_l)$.

В [8,9,17] использован сильно несимметричный импульс с крутым фронтом, в случае которого $\gamma_{l2} \rightarrow \infty$ и обращается в нуль второй член в фигурной скобке из (4) и второй член в квадратной скобке из (9).

Импульс вида (4) удобен для вычислений. Его недостаток — острая форма пика при $t - zn/c = 0$, т.е. разрыв производной функции $P(p)$ при $p = 0$, однако все качественные выводы теории, полученные далее, не меняются при переходе к импульсам сглаженной формы.

Будем считать, что падающие волны имеют круговую поляризацию, т.е.

$$\mathbf{e}_l = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_x \pm i\mathbf{e}_y), \quad (11)$$

где $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ — единичные векторы вдоль осей x, y .

Рассмотрим случай КЯ, ширина которых d много меньше длины световых волн $c/n\omega_l$. Тогда электрические поля $\mathbf{E}_{l(r)}$ слева (справа) от КЯ определяются выражениями [17]

$$\mathbf{E}_{l(r)}(z, t) = \mathbf{E}_0(z, t) + \Delta \mathbf{E}_{l(r)}(z, t), \quad (12)$$

$$\Delta \mathbf{E}_{l(r)}(z, t) = E_0 \mathbf{e}_l \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega(t \pm zn/c)} D(\omega) + \text{c. c.}, \quad (13)$$

где верхний (нижний) знак относится к индексу $l(r)$.

Распределение $D(\omega)$ по частотам определяется как

$$D(\omega) = -\frac{4\pi\chi(\omega)D_0(\omega)}{1 + 4\pi\chi(\omega)}, \quad (14)$$

$$\chi(\omega) = \frac{i}{4\pi} \sum_{\rho} \frac{\gamma_{r\rho}}{2} \left[(\omega - \omega_{\rho} + i\gamma_{\rho}/2)^{-1} + (\omega + \omega_{\rho} + i\gamma_{\rho}/2)^{-1} \right] + \frac{Q(\omega)}{4\pi} - i\frac{I(\omega)}{4\pi}, \quad (15)$$

где индекс ρ обозначает номер возбужденного состояния, $\hbar\omega_{\rho}$ — энергия возбуждения, отсчитанная от энергии основного состояния, $\gamma_{r\rho}(\gamma_{\rho})$ — радиационное (нерадиационное) обратное время жизни возбуждения с индексом ρ , $Q(\omega)$ и $I(\omega)$ определяют вклады в реальную и мнимую части величины $\chi(\omega)$, обусловленные неучтенными электронными возбуждениями (например, возбуждениями с более глубоких, чем валентная зона, уровней) и решеточными возбуждениями. Предположим по аналогии с [8–21], что поглощение и отражение света в КЯ обусловлено конечным числом дискретных уровней, т.е.

$$Q(\omega) \simeq 0, \quad I(\omega) \simeq 0, \quad (16)$$

а также отбросим второй нерезонансный член в квадратной скобке в (15).² Итак, мы полагаем

$$\chi(\omega) \simeq \frac{i}{4\pi} \sum_{\rho} \frac{\gamma_{r\rho}}{2} (\omega - \omega_{\rho} + i\gamma_{\rho}/2)^{-1}. \quad (17)$$

Подставив (17) в (14), получаем

$$D(\omega) = -\frac{i \sum_{\rho} (\gamma_{r\rho}/2) (\omega - \omega_{\rho} + i\gamma_{\rho}/2)^{-1} D_0(\omega)}{1 + i \sum_{\rho} (\gamma_{r\rho}/2) (\omega - \omega_{\rho} + i\gamma_{\rho}/2)^{-1}}. \quad (18)$$

Подставляя (18) в (13), можем представить величину наведенного поля в виде суммы двух членов

$$\Delta \mathbf{E}_r(z, t) = \Delta \mathbf{E}_1(p) + \Delta \mathbf{E}_2(p). \quad (19)$$

Первый член является вкладом полюсов функции $D_0(\omega)$. Используя (9) и (13), легко показать, что он равен

$$\Delta \mathbf{E}_1(p) = -iE_0 \mathbf{e}_l e^{-i\omega_l p} \left\{ \Theta(p) e^{-\gamma_{l1} p/2} \times \frac{\sum_{\rho} \gamma_{r\rho} [\omega_l - \omega_{\rho} + i(\gamma_{\rho} - \gamma_{l1})/2]^{-1}}{2 + \sum_{\rho} \gamma_{r\rho} [\omega_l - \omega_{\rho} + i(\gamma_{\rho} - \gamma_{l1})/2]^{-1}} + [1 - \Theta(p)] e^{\gamma_{l2} p/2} \times \frac{\sum_{\rho} \gamma_{r\rho} [\omega_l - \omega_{\rho} + i(\gamma_{\rho} - \gamma_{l2})/2]^{-1}}{2 + \sum_{\rho} \gamma_{r\rho} [\omega_l - \omega_{\rho} + i(\gamma_{\rho} - \gamma_{l2})/2]^{-1}} \right\} + \text{c. c.} \quad (20)$$

² Выражения (13)–(15) при $Q(\omega) \simeq 0, I(\omega) \simeq 0$ применимы, если каждая из двух круговых поляризаций соответствует возбуждению из основного состояния одного из двух типов ЭДП, энергия которых одинакова.

Второй член $\Delta \mathbf{E}_2(p)$ является вкладом полюсов функции

$$\frac{i \sum_{\rho} \gamma_{r\rho} (\omega - \omega_{\rho} + i\gamma_{\rho}/2)^{-1}}{2 + i \sum_{\rho} \gamma_{r\rho} (\omega - \omega_{\rho} + i\gamma_{\rho}/2)^{-1}}.$$

В случае одного возбужденного уровня имеем один полюс $\omega_0 - i(\gamma + \gamma_r)/2$, в случае двух уровней — два полюса, положение которых легко определить. Однако уже в случае трех уровней определение полюсов затруднительно, так как необходимо решить уравнение третьего порядка. Поэтому в случае большого количества уровней в КЯ при вычислении $\Delta \mathbf{E}_2(p)$ приходится пользоваться приближением, применимым только при малых величинах $\gamma_{r\rho}$. Ограничиваясь вкладом низшего порядка по взаимодействию электронов со светом и полагая

$$D(\omega) \simeq 4\pi\chi(\omega)D_0(\omega), \quad (21)$$

для члена $\Delta \mathbf{E}_2(p)$ получаем приближенный результат

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{E}_2(p) \simeq & -iE_0 \mathbf{e}_l \Theta(p) \sum_{\rho} \frac{\gamma_{r\rho}}{2} \exp(-i\omega_{\rho} p - \gamma_{\rho} p/2) \\ & \times \left\{ [\omega_l - \omega_{\rho} + i(\gamma_{\rho} - \gamma_{l1})/2]^{-1} \right. \\ & \left. - [\omega_l - \omega_{\rho} + i(\gamma_{\rho} + \gamma_{l2})/2]^{-1} \right\} + \text{c. c.} \quad (22) \end{aligned}$$

В выражение (20) входят суммы вида

$$S = \sum_{\rho} \frac{\gamma_{r\rho}}{2} (\omega_l - \omega_{\rho} + i\bar{\gamma}_{\rho}/2)^{-1},$$

где $\bar{\gamma}_{\rho} = \gamma_{\rho} - \gamma_{l1}$ или $\gamma_{\rho} + \gamma_{l2}$. Вещественные части этих сумм расходятся, если считать величины $\gamma_{r\rho}$, не зависящими от индекса ρ . В случае эквидистантных уровней эта расходимость логарифмическая. Реально эта расходимость безусловно обрезается, но механизм обрезания трудно определить. Поэтому поступим следующим образом: сумму S запишем в виде

$$S = \sum'_{\rho} \frac{\gamma_{r\rho}}{2} (\omega_l - \omega_{\rho} + i\bar{\gamma}_{\rho}/2)^{-1} - J(\omega_l), \quad (23)$$

где знак ' у суммы по ρ означает суммирование по ограниченному числу уровней. Безразмерная величина $J(\omega_l)$ слабо зависит от ω_l , если набор частот, определяемых выражением (9), находится в резонансе с группой уровней, содержащихся в первом члене в (23). Выражение (23) следует сопоставить с (15). Величина $J(\omega_l) \simeq J$ складывается с константой $I(\omega) \simeq I$. Итак, величина J нам неизвестна, но в любом случае $J \ll 1$ или ≥ 1 вклад $\Delta \mathbf{E}_1(p)$ в наведенное электрическое поле затухает на временах порядка γ_l^{-1} , как следует из (20).

Вопрос о расходимостях, которые могут возникнуть в (22), будет рассмотрен в разделе 5. Мы увидим, что расходимости не возникают в случае симметричного возбуждающего импульса. Выражение для наведенного поля $\Delta \mathbf{E}_1(z, t)$ слева от КЯ отличается от (19)–(22) только заменой переменной $p = t - zn/c$ на переменную $s = t + zn/c$.

2. Вычисление проходящего, отраженного и поглощенного потоков энергии

Векторы Пойнтинга будем для краткости называть потоками энергии. Проходящий поток, т. е. поток справа от ямы, равен

$$\mathbf{S}_r(z, t) = \frac{e_z c}{4\pi n} |\mathbf{E}_r(z, t)|^2, \quad (24)$$

поток слева от ямы равен

$$\mathbf{S}_l(z, t) = \mathbf{S}(z, t) + \mathbf{S}_{\text{ref}}(z, t), \quad (25)$$

где $\mathbf{S}(z, t)$ — поток возбуждающего импульса, определенный в (6), $\mathbf{S}_{\text{ref}}(z, t)$ — отраженный поток, который равен

$$\mathbf{S}_{\text{ref}}(z, t) = -\frac{e_z c}{4\pi n} |\Delta \mathbf{E}_l(z, t)|^2. \quad (26)$$

Поглощенный поток энергии определяется как

$$\mathbf{S}_{\text{abs}}(t) = \mathbf{S}_l(z=0, t) - \mathbf{S}_r(z=0, t) \quad (27)$$

и равен

$$\mathbf{S}_{\text{abs}} = -\frac{e_z c}{2\pi n} \mathbf{E}_r(z=0, t) \Delta \mathbf{E}(z=0, t), \quad (28)$$

где

$$\Delta \mathbf{E}(z=0, t) = \Delta \mathbf{E}_l(z=0, t) = \Delta \mathbf{E}_r(z=0, t). \quad (29)$$

Введем безразмерные функции $\mathcal{R}(t)$, $\mathcal{A}(t)$ и $\mathcal{T}(t)$, определив их с помощью соотношений

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{\text{ref}}(z, t) &= -\mathbf{S}_0 \mathcal{R}(s), \\ \mathbf{S}_{\text{abs}}(t) &= \mathbf{S}_0 \mathcal{A}(t), \\ \mathbf{S}_r(z, t) &= \mathbf{S}_0 \mathcal{T}(p), \end{aligned} \quad (30)$$

причем из (27) следует, что всегда выполняется соотношение

$$\mathcal{R}(t) + \mathcal{A}(t) + \mathcal{T}(t) = P(t). \quad (31)$$

Величины $\mathcal{R}(t)$ и $\mathcal{T}(t)$ всегда положительны, поглощение $\mathcal{A}(t)$ может быть как положительным, так и отрицательным.

Рассмотрим систему с произвольным числом уровней под воздействием импульса (4). При вычислении (22) уже использовалось условие, согласно которому параметры $\gamma_{r\rho}$ — наименьшие из всех встречающихся в задаче, и рассматриваются времена $p \ll \gamma_{r\rho}^{-1}$, $s \ll \gamma_{r\rho}^{-1}$. Теперь используем дополнительное условие короткого импульса

$$\gamma_{\rho} \ll \gamma_l \quad (32)$$

и будем рассматривать времена

$$p \gg \gamma_l^{-1}, \quad s \gg \gamma_l^{-1}. \quad (33)$$

Очевидно, что при этом в (19) сохраняется только вклад $\Delta E_2(p)$, содержащий, согласно (22), $\exp(-\gamma_\rho p/2)$, а вклад $\Delta E_1(p)$, определенный в (20), и возбуждающее поле $\mathbf{E}_0(z, t)$ экспоненциально малы по величине, так как содержат множитель $\exp(-\gamma_l p/2)$. Таким образом, получаем при условиях (32) и (33)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_r(z, t) &\simeq \Delta \mathbf{E}_2(p), \\ \mathbf{E}_l(z, t) &\simeq \Delta \mathbf{E}_2(s), \end{aligned} \quad (34)$$

откуда следует, что проходящий и отраженный потоки равны по абсолютной величине, т.е.

$$\mathcal{R}(t) \simeq \mathcal{T}(t). \quad (35)$$

Поскольку на временах (33) возбуждающий поток

$$P(t) \simeq 0,$$

из (31) получаем

$$A(t) = -2\mathcal{R}(t). \quad (36)$$

Отрицательное поглощение, по модулю равное удвоенному отражению, означает, что КЯ отдает накопленную энергию, излучая ее симметрично, т.е. двумя потоками направо и налево. Энергия была накоплена за время прохождения импульса в виде рожденных светом возбуждений.

3. Отклик в случае эквидистантной системы уровней в КЯ, помещенной в СМП

При условиях (32) и (33) в случае симметричного импульса из (34) и (22) получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_r^s(z, t) &\simeq iE_0 \mathbf{e}_l \Theta(s) \sum_\rho \frac{\gamma_{r\rho}}{2} \exp(-i\omega_\rho p - \gamma_\rho p/2) \\ &\times \left\{ [\omega_l - \omega_\rho + i(\gamma_\rho - \gamma_l)/2]^{-1} \right. \\ &\times \left. [\omega_l - \omega_\rho + i(\gamma_\rho + \gamma_l)/2]^{-1} \right\}, \end{aligned} \quad (37)$$

а в случае асимметричного импульса с крутым фронтом [8,9,17] — результат (37), в котором отсутствует второй член в фигурных скобках. Легко видеть, что сумма по ρ в (37) не расходится при больших значениях ρ ни при каких величинах переменной p . Но эта расходимость может возникнуть в случае асимметричного импульса.

Упростим выражение (37), полагая, что обратные времена жизни $\gamma_{r\rho}$ и γ_ρ одинаковы для всех уровней, т.е.

$$\gamma_{r\rho} \simeq \gamma_r, \quad \gamma_\rho \simeq \gamma, \quad (38)$$

и пренебрегая малыми величинами γ по сравнению с γ_l в квадратных скобках. Тогда с помощью (26) для отра-

женного потока и симметричного импульса получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^s(s) &\simeq \frac{\gamma_r^2 \gamma_l^2}{4} e^{-\gamma s} \sum_{\rho, \rho'} \left[(\omega_l - \omega_\rho)^2 + \frac{\gamma_l^2}{4} \right]^{-1} \\ &\times \left[(\omega_l - \omega_{\rho'})^2 + \frac{\gamma_l^2}{4} \right]^{-1} \cos[(\omega_\rho - \omega_{\rho'})s]. \end{aligned} \quad (39)$$

Аналогичный результат для асимметричного импульса имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{as}(s) &\simeq \frac{\gamma_r^2}{4} e^{-\gamma s} \sum_{\rho, \rho'} \left[(\omega_l - \omega_\rho)^2 + \frac{\gamma_l^2}{4} \right]^{-1} \\ &\times \left[(\omega_l - \omega_{\rho'})^2 + \frac{\gamma_l^2}{4} \right]^{-1} \left\{ \frac{\gamma_l}{2} (\omega_\rho - \omega_{\rho'}) \sin[(\omega_\rho - \omega_{\rho'})s] \right. \\ &\left. + \left[(\omega_l - \omega_\rho)(\omega_l - \omega_{\rho'}) + \frac{\gamma_l^2}{4} \right] \cos[(\omega_\rho - \omega_{\rho'})s] \right\}. \end{aligned} \quad (40)$$

Применим выражения (39) и (40) к случаю эквидистантных уровней Ландау, соответствующих формуле (1) для энергии ЭДП при фиксированных числах l_e и l_h размерного квантования электронов и дырок. Частоты ω_ρ и ω_l , входящие в (39) и (40), будем отсчитывать от уровня

$$\frac{E_g}{\hbar} + \varepsilon_{l_e}^e + \varepsilon_{l_h}^h + \frac{\Omega_\mu}{2}.$$

Тогда

$$\omega_\rho = n\Omega_\mu, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (41)$$

Обоснуем предположение (38) для ЭДП в КЯ, помещенной в СМП. В [19] вычислено радиационное время жизни ЭДП для модели зон, которая применима к случаю тяжелых дырок в GaAs. Имеются два сорта пар, которые обозначены индексами I и II. Сорта пар отличаются величинами p_{cv} межзонного матричного элемента импульса, которые равны

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{cv}^I &= \frac{1}{\sqrt{2}} p_{cv} (\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y), \\ \mathbf{p}_{cv}^{II} &= \frac{1}{\sqrt{2}} p_{cv} (\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y). \end{aligned} \quad (42)$$

При использовании круговых поляризаций (11) каждая поляризация жестко связана с сортом ЭДП I или II, поскольку взаимодействие пары со светом пропорционально скалярному произведению $\mathbf{e}_\rho \mathbf{p}_{cv}$ (см. примечание 2). В [19] показано, что обратное радиационное время жизни пары любого из сортов I или II при $\mathbf{K}_\perp = 0$ равно

$$\gamma_{r\xi_0} = 2 \frac{e^2 \Omega_0}{c\hbar} \frac{p_{cv}^2}{n m_0 E_{\xi_0}} \pi_{l_e, l_h}^2, \quad (43)$$

где $\Omega_0 = |e|H/m_0c$ — циклотронная частота с массой m_0 свободного электрона, энергия E_{ξ_0} определена в (1),

n — коэффициент преломления,

$$\pi_{l_e, l_h} = \int_{-\infty}^{\infty} dz \varphi_{cl_e}(z) \varphi_{vl_h}(z), \quad (44)$$

$\varphi_{cl}(z)$, $\varphi_{vl}(z)$ — вещественные функции, соответствующие квантовому числу l размерного квантования, для КЯ конечной глубины (см., например, [6]), $c(v)$ — индекс зоны проводимости (валентной зоны).

Из (43) следует, что обратное время $\gamma_{r\xi_0}$ пропорционально величине H магнитного поля. Зависимость от индекса n и от величины H , обусловленная множителем E_{ξ_0} в знаменателе, очень слаба, поскольку в (1) ширина запрещенной зоны много больше энергии $(n + 1/2)\hbar\Omega_{\mu}$.

Относительно величин γ_{ρ} можно только сказать, что, по-видимому, нет причин, которые обусловили их сильную зависимость от целого числа n .

Для отраженного потока с помощью (39) получаем

$$\mathcal{R}^s(s) = 4 \left(\frac{\gamma_r}{\gamma_l} \right)^2 e^{-\gamma^s} Y_{\Omega_l, G_l}^s(S), \quad (45)$$

где

$$Y_{\Omega_l, G_l}^s(S) = \frac{G_l^4}{16} \left\{ \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nS)}{(\Omega_l - n)^2 + G_l^2/4} \right]^2 + \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nS)}{(\Omega_l - n)^2 + G_l^2/4} \right]^2 \right\} \quad (46)$$

и введена безразмерная переменная $S = \Omega_{\mu}s$ и безразмерные величины

$$\Omega_l = \frac{\omega_l}{\Omega_{\mu}}, \quad G_l = \frac{\gamma_l}{\Omega_{\mu}}. \quad (47)$$

Функция (46) периодична с периодом 2π и симметрична относительно замены S на $2\pi - S$.

В случае облучения асимметричным импульсом вместо (46) получаем выражение, которое удобно записать в форме

$$Y_{\Omega_l, G_l}^{\text{as}}(S) = \frac{G_l^2}{16} [(\sigma_{c0}\Omega_l - \sigma_{c1})^2 + (\sigma_{s0}\Omega_l - \sigma_{s1})^2] + \frac{G_l^3}{16} (\sigma_{s1}\sigma_{c0} - \sigma_{s0}\sigma_{c1}) + \frac{G_l^4}{64} (\sigma_{c0}^2 + \sigma_{s0}^2), \quad (48)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_{c0} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nS)}{(\Omega_l - n)^2 + G_l^2/4}, \\ \sigma_{c1} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \cos(nS)}{(\Omega_l - n)^2 + G_l^2/4}, \\ \sigma_{s0} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(nS)}{(\Omega_l - n)^2 + G_l^2/4}, \\ \sigma_{s1} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \sin(nS)}{(\Omega_l - n)^2 + G_l^2/4}. \end{aligned} \quad (49)$$

4. Потоки энергии в случае симметричного возбуждающего импульса. Эхо от возбуждающего импульса в проходящем и отраженном потоках

В случае резонанса частоты ω_l с одним из уровней Ландау, т.е. при

$$\Omega_l = n_0, \quad n_0 = 0, 1, 2, \dots, \quad (50)$$

из (46) получаем

$$Y^s(S) = \frac{G_l^4}{16} \left\{ \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nS)}{n^2 + G_l^2/4} + \sum_{n=1}^{n_0} \frac{\cos(nS)}{n^2 + G_l^2/4} \right]^2 + \left[\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{\sin(nS)}{n^2 + G_l^2/4} \right]^2 \right\}. \quad (51)$$

В предельном случае

$$\Omega_l = n_0, \quad G_l \ll 1 \quad (52)$$

из (51) получаем

$$Y^s(S) \simeq 1 + \frac{G_l^2}{2} \left[F_s(S) + \sum_{n=1}^{n_0} \frac{\cos(nS)}{n^2} \right], \quad (53)$$

где

$$F_s(S) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nS)}{n^2} = \frac{(\pi - S)^2}{4} - \frac{\pi^2}{16} \quad (54)$$

определена в пределах от 0 до 2π . При $G_l \rightarrow 0$ получаем

$$Y^s = 1,$$

и, согласно (45),

$$\mathcal{R}^s(s) \simeq \left(\frac{2\gamma_r}{\gamma_l} \right)^2 e^{-\gamma^s},$$

что соответствует вкладу только одного уровня Ландау, в резонансе с которым находится частота ω_l .

Рассмотрим далее случай, когда частота ω_l находится в резонансе с одним из высоких уровней Ландау n_0 , т.е.

$$\Omega_l = n_0, \quad n_0 \gg 1, \quad (55)$$

а величина G_l произвольна. Тогда из (51) немедленно получим

$$Y^s(S) \simeq \frac{G_l^4}{16} \left(\frac{4}{G_l^2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nS)}{n^2 + G_l^2/4} \right)^2. \quad (56)$$

Сумма в (56) вычисляется точно, что дает

$$Y^s(S) \simeq \frac{G_l^2}{4} \pi^2 \text{ch}^2 \left[(\pi - S) \frac{G_l}{2} \right] \text{cosech}^2 \left(\frac{\pi G_l}{2} \right). \quad (57)$$

При условии $G_l \ll 1$ из (57) получаем

$$Y^s(S) \simeq 1 + G_l^2 F_s(S), \quad (58)$$

что согласуется с (53) в пределе $n_0 \rightarrow \infty$.

При условии

$$G_l \gg 1 \quad (59)$$

из (57) следует

$$Y^s(S) \simeq \frac{\pi^2 G_l^2}{4} \begin{cases} \exp(-SG_l), & S \ll 1, \\ \exp[-(2\pi - S)G_l], & 2\pi - S \ll 1. \end{cases} \quad (60)$$

На рис. 1–4 изображены кривые, соответствующие формуле (46), при различных значениях параметров Ω_l и G_l . Функции $Y_{\Omega_l, G_l}^s(S)$ периодичны с периодом 2π , изображен один период.

Рис. 1 соответствует малому значению $G_l = 0.1$ и значениям $\Omega_l = 0, 0.05, 0.1$. При $\Omega_l = 0$ частота ω_l находится в резонансе с нижним уровнем Ландау для ЭДП, величины $\Omega_l = 0.05$ и 0.1 соответствуют малому отклонению от этого резонанса. Кривые *a* рассчитаны по точной формуле (46), кривая *b* — по приближенной формуле (53). Из рис. 1 можно заключить, что в случае точного резонанса частоты ω_l с одним из уровней Ландау при малых значениях G_l периодические колебания отраженного и прошедшего потоков энергии очень малы по амплитуде и приближенная формула (53) дает результат, очень близкий к точному. Малое отклонение частоты ω_l от резонанса приводит к резкому падению величин потоков энергии.

На рис. 2 изображено то же, что на рис. 1, но при большем значении $G_l = 0.5$. По сравнению с рис. 1 амплитуда периодических биений сильно возрастает, приближенная формула (53) работает хуже, малые отклонения частоты ω_l от резонанса не приводят к столь резкому уменьшению величин потоков энергии.

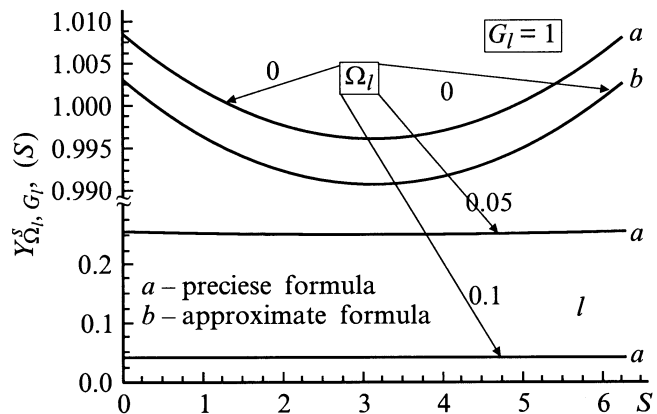


Рис. 1. Функция $Y_{\Omega_l, G_l}^s(S)$, соответствующая периодическому множителю в величине отраженного потока энергии при облучении КЯ симметричным возбуждающим импульсом. Величины параметров указаны на рисунке. Рисунок соответствует продолжительности γ_l^{-1} импульса, превосходящей на порядок время Ω_μ^{-1} .

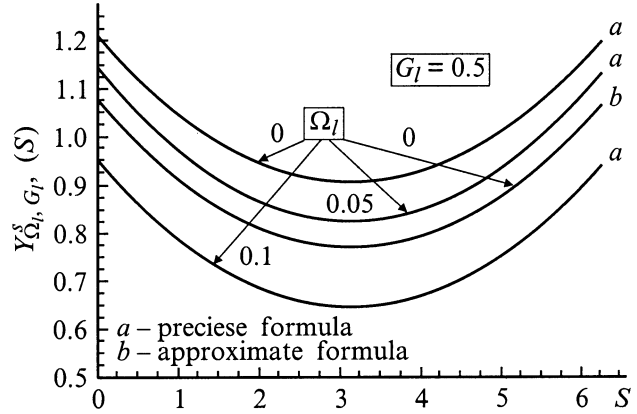


Рис. 2. То же, что на рис. 1, продолжительность импульса γ_l^{-1} в 2 раза больше, чем Ω_μ^{-1} .

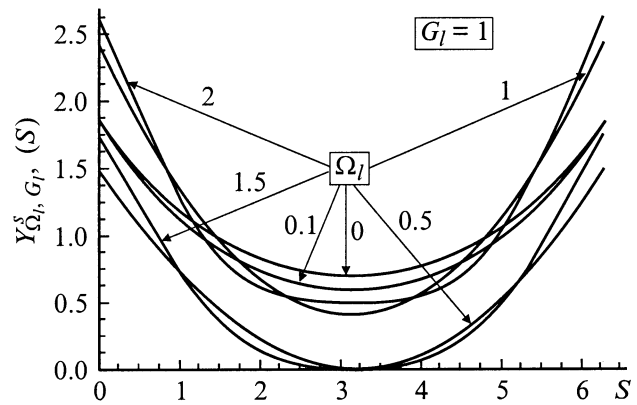


Рис. 3. То же, что на рис. 1, для продолжительности импульса $\gamma_l^{-1} = \Omega_\mu^{-1}$.

Рис. 3 соответствует параметру $G_l = 1$ и набору значений: $\Omega_l = 0, 0.1, 0.5, 1, 1.5, 2$. На этом рисунке амплитуда периодических колебаний безразмерного множителя $Y^s(S)$ достигает значений 1.5–2.0. При $\Omega_l = 0.5$ и 1.5 , т.е. в случаях расположения частоты ω_l между уровнями Ландау $n = 0$ и 1 и между уровнями $n = 1$ и 2 соответственно, в точке $S = \pi$ кривые касаются оси абсцисс, т.е. величины потоков стремятся к нулю.

Наконец, рис. 4 соответствует большому значению $G_l = 5$ и набору чисел: $\Omega_l = 0, 0.1, 0.5, 1$. Значения множителя $Y^s(S)$ в точках $S = 0$ и 2π резко увеличиваются по сравнению с соответствующими значениями на рис. 1–3, достигая 30, но становятся очень малыми в интервале $S \gg G_l^{-1}$, $(2\pi - S) \gg G_l^{-1}$. Таким образом, периодическая функция $Y^s(S)$ представляет собой ряд последовательных коротких импульсов, продолжительность каждого из которых порядка G_l^{-1} , расположенных с интервалом 2π . Используя выражение (45), находим, что при $\gamma_l \gg \Omega_\mu$ в отраженном потоке энергии наблюдается затухающее по закону $e^{-\gamma s}$ эхо возбуждающего импульса с интервалом $2\pi/\Omega_\mu$. Согласно (35), эхо долж-

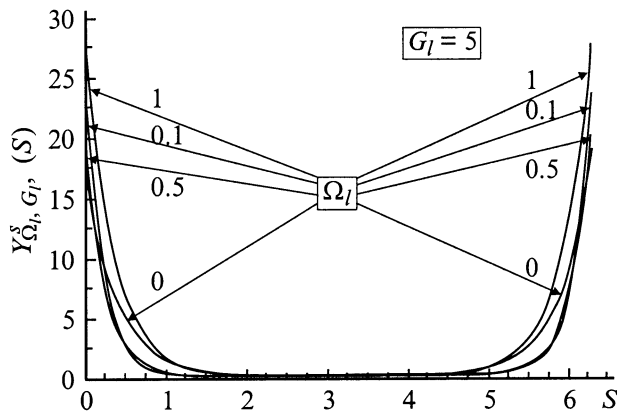


Рис. 4. То же, что на рис. 1, для очень малой величины γ_l^{-1} , когда наблюдается эхо возбуждающего импульса.

но наблюдаться также в проходящем потоке энергии. В области значений Ω_l от нуля до нескольких единиц, т.е. когда частота ω_l находится вблизи нижних уровней Ландау, в повторениях импульса его форма искажается. В случае резонанса частоты ω_l с одним из высоких уровней Ландау $n_0 \gg 1$, согласно (35) и (60), получаем, что форма повторяющихся импульсов (эхо) совпадает с формой возбуждающего импульса, но величина этих импульсов гораздо меньше, так как содержит малый множитель $\pi^2(\gamma_r/\Omega_\mu)^2 \exp(-\gamma s)$.

5. Случай асимметричного возбуждающего импульса

Рассматривая (48), находим, что эта функция обращается в бесконечность, в точках $S = 2\pi m$, поскольку расходится сумма σ_{c1} , определенная в (49). Это означает, что на рисунках типа рис. 1–4 в случае асимметричного возбуждающего импульса в точках $S = 0$ и 2π мы получили бы бесконечные значения $Y^{\text{as}}(S)$. Этот результат конечно неверен, поскольку величины \mathcal{R} , \mathcal{A} , \mathcal{T} , определенные в (30), не могут превышать единицу. В действительности бесконечные значения функций "зарезаются", но какой именно механизм резазания преобладает, определить трудно. Вблизи точек $S = 2\pi m$ неприменимо приближение, при котором, вычисляя $\Delta E_2(p)$ из (19), мы ограничиваемся вкладом низшего порядка по взаимодействию электронов со светом и используем (21).

Поэтому приведем здесь только результаты, относящиеся к случаю резонанса частоты ω_l с одним из высоких уровней Ландау, когда расходимости не возникают. При $\Omega_l = n_0$, $n_0 \gg 1$, из (48) получаем

$$Y^{\text{as}}(S) = \frac{G_l^2}{16} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n \sin(nS)}{n^2 + G_l^2/4} + \frac{G_l}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n \cos(nS)}{n^2 + G_l^2/4} \right]^2. \quad (61)$$

Входящие в (61) суммы точно вычисляются, и мы получаем

$$Y^{\text{as}}(S) = \frac{\pi^2 G_l^2}{16} \text{cosech}^2 \left(\frac{\pi G_l}{2} \right) \exp[(\pi - S)G_l]. \quad (62)$$

В случае $G_l \ll 1$ из (62) получается

$$Y^{\text{as}}(S) \simeq \frac{1}{4} [1 + 2G_l F(S)],$$

$$F(S) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nS)}{n} = \frac{\pi - S}{2}. \quad (63)$$

При $G_l = 0$ получаем результат

$$Y^{\text{as}}(S) \simeq \frac{1}{4}, \quad \mathcal{R}^{\text{as}}(s) = \left(\frac{\gamma_r}{\gamma_l} \right)^2 \exp(-\gamma s), \quad (64)$$

соответствующий резонансу частоты ω_l с единственным уровнем в КЯ. При $G_l \gg 1$ имеем

$$Y^{\text{as}}(S) \simeq \frac{\pi^2}{4} G_l^2 \exp(-SG_l). \quad (65)$$

Последний результат означает, что и в случае асимметричного импульса при условии $\gamma_l \gg \Omega_\mu$, т.е. очень коротких импульсах, возникает эхо возбуждающего импульса. При условии $n_0 \gg 1$ форма повторяющихся импульсов совпадает с формой возбуждающего импульса, но величина эхо-импульса содержит малый множитель $\pi^2(\gamma_r/\Omega_\mu)^2 \exp(-\gamma s)$, как и в случае симметричного импульса.

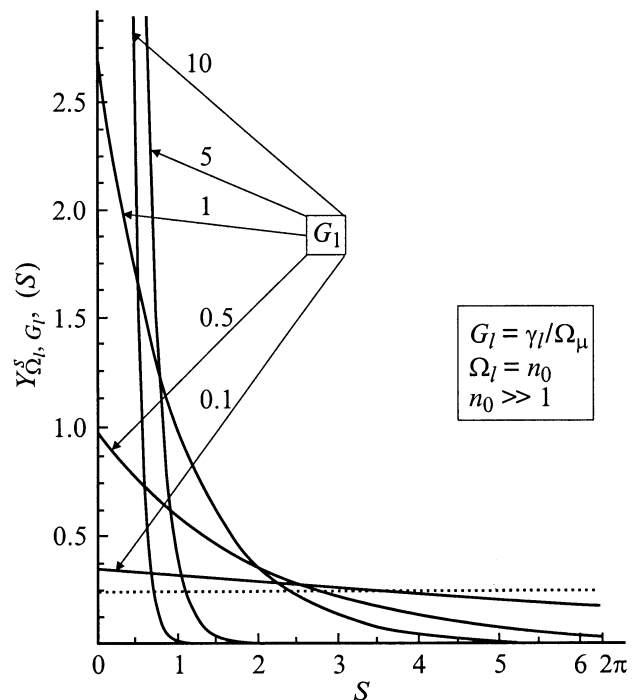


Рис. 5. Функция $Y^{\text{as}}(S)$ (формула (62)) в случае асимметричного возбуждающего импульса с крутым фронтом при резонансе частоты ω_l с одним из высоких уровней Ландау. Величины параметра $G_l = \gamma_l/\Omega_\mu$ указаны на рисунке.

На рис. 5 изображена функция $Y^{as}(S)$ для $\Omega_l = n_0$, $n_0 \gg 1$ (см. (62)) при значениях $G_l = 0.1, 0.5, 1, 5, 10$. При $G_l = 0.1$ получаем пилообразную линию, при $G_l = 10$ — повторение формы возбуждающего импульса.

Итак, в работе исследовалась зависимость от времени проходящего, отраженного и поглощенного потоков энергии, возникающих при нормальном облучении возбуждающим импульсом квантовой ямы, помещенной в сильное магнитное поле. Система электронных возбужденных уровней в КЯ предполагалась эквидистантной с интервалом $\hbar\Omega_\mu$. Получены результаты для симметричного и асимметричного возбуждающих импульсов. Выбраны следующие соотношения параметров:

$$\gamma_r \ll \gamma, \quad \gamma \ll \gamma_l, \quad \gamma \ll \Omega_\mu, \quad (66)$$

соотношение γ_l и Ω_μ — любое.

Рассмотрены потоки на временах

$$t \gg \gamma_l^{-1}, \quad t \ll \gamma_r^{-1}, \quad (67)$$

когда возбуждающий импульс уже затух, проходящий и отраженный потоки равны по абсолютной величине, а поглощаемый поток отрицателен и по модулю равен удвоенному проходящему (или отраженному) потокам.

Отраженный поток содержит множитель $\exp(-\gamma s)$, что определяет его затухание. Кроме того, присутствует множитель Y , периодичный по s , с периодом $2\pi\Omega_\mu^{-1}$. Эти осцилляции ни в каком случае не являются синусоидальными, что характерно только для случая двух близко расположенных уровней возбуждения. При условии $\gamma_l \ll \Omega_\mu$, т. е. для сравнительно длинных импульсов, продолжительность которых во времени превосходит величину Ω_μ^{-1} , амплитуда осцилляций мала. В пределе $\gamma_l/\Omega_\mu = 0$ в случае резонанса частоты ω_l с одним из уровней получены результаты, соответствующие существованию этого единственного уровня. При условии $\gamma_l \geq \Omega_\mu$ амплитуда осцилляций становится большой. Наконец, в случае, когда $\gamma_l \gg \Omega_\mu$, т. е. продолжительность импульса намного меньше, чем время Ω_μ^{-1} , наблюдается затухающее эхо возбуждающего импульса, возникающее через промежутки времени, равные $2\pi\Omega_\mu^{-1}$.

Авторы благодарны А. D'Amore за замечания.

Список литературы

- [1] H. Stolz. Time-Resolved Light Scattering from Excitons. Springer Tracts in Modern Physics. Springer, Berlin (1994).
- [2] J. Shah. Ultrafast Spectroscopy of Semiconductors and Semiconductor Nanostructures, Springer, Berlin (1996).
- [3] H. Häng, S.W. Koch. Quantum Theory of the Optical and Electronic Properties of Semiconductors. World Scientific (1993).
- [4] S. Mukamel. Principles of Nonlinear Optical Spectroscopy. Oxford University Press, N.Y.–Oxford (1995).
- [5] Л.И. Коровин, И.Г. Ланг, С.Т. Павлов. ЖЭТФ **118**, 2 (8) (2000); LANL archiv/cond-mat/0004373.

- [6] I.G. Lang, V.I. Belitsky, A. Cantarero, L.I. Korovin, S.T. Pavlov, M. Cardona. Phys. Rev. **B54** 24, 17 768 (1996).
- [7] И.В. Лернер, Ю.Е. Лозовик. ЖЭТФ **78**, 3, 1167 (1980).
- [8] I.G. Lang, V.I. Belitsky, M. Cardona. Phys. Stat. Sol. (a) **164**, 1, 307 (1997).
- [9] I.G. Lang, V.I. Belitsky. Phys. Lett. **A245**, 3–4, 329 (1998).
- [10] L.C. Andreani, F. Tassone, F. Bassani. Solid. State Commun. **77**, 11, 641 (1991).
- [11] L.C. Andreani. In: Confined Electrons and Photons/ Ed. by E. Burstein, C. Weisbuch. Plenum Press. N.Y. (1995). P. 57.
- [12] Е.Л. Ивченко. ФТТ **33**, 8, 2388 (1991).
- [13] F. Tassone, F. Bassani, L.C. Andreani. Phys. Rev. **B45**, 11, 6023 (1992).
- [14] T. Stroucken, A. Knorr, C. Anthony, P. Thomas, S.W. Koch, M. Koch, S.T. Gundiff, J. Feldman, E.O. Göbel. Phys. Rev. Lett. **74**, 13, 2391 (1995).
- [15] T. Stroucken, A. Knorr, P. Thomas, S.W. Koch. Phys. Rev. **B53**, 4, 2026 (1996).
- [16] M. Hübner, J. Kuhl, S. Haas, T. Stroucken, S.W. Koch, R. Hey, K. Ploog. Solid. State Commun. **105**, 2, 105 (1998).
- [17] I.G. Lang, V.I. Belitsky. Solid State Commun. **107**, 10, 577 (1998).
- [18] L.C. Andreani, G. Panzarini, A.V. Kavokin, M.R. Vladimirova. Phys. Rev. **B57**, 8, 4670 (1998).
- [19] I.G. Lang, L.I. Korovin, D.A. Contreras-Solorio, S.T. Pavlov. LANL archiv/cond-mat/0001248.
- [20] D.A. Contreras-Solorio, S.T. Pavlov, L.I. Korovin, I.G. Lang. LANL archiv/cond-mat/0002229.
- [21] L.I. Korovin, I.G. Lang, D.A. Contreras-Solorio, S.T. Pavlov. ФТТ **42**, 12, 119 (2000); LANL archiv/cond-mat/0006364.