

## О скорости движения $4\pi$ -кинка под действием тока

© А.С. Малишевский, В.П. Силин, С.А. Урюпин

Физический институт им. П.Н. Лебедева Российской академии наук,  
117924 Москва, Россия

E-mail: malish@sci.lebedev.ru

(Поступила в Редакцию 3 мая 2000 г.)

В приближении слабонелокальной джозефсоновской электродинамики установлена зависимость плотности тока закортки через переход от скорости равномерно движущегося вихря, несущего два кванта потока магнитного поля. Показано, как обусловленное черенковским взаимодействием с волнами Свихарта квантование скоростей свободного движения вихря приводит к появлению дискретного семейства кривых на плоскости скорость–ток.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 00-02-16076), Научного совета по сверхпроводимости (задание "Вихри Абрикосова–Джозефсона") и Государственной поддержке ведущих научных школ (проект № 00-15-96720).

Экспериментальная работа [1] поставила перед вихревой джозефсоновской электродинамикой задачу о формулировке такого подхода, который позволил бы построить описание когерентных структур в длинных джозефсоновских переходах, которые в отсутствие диссипации могли бы равномерно двигаться, перенося несколько квантов магнитного потока. Таким когерентные вихревые структуры получили название  $2\pi n$ -кинков, поскольку один обычный джозефсоновский вихрь, несущий один квант магнитного потока, отвечает изменению разности фаз  $\varphi(z, t)$  на величину  $2\pi$  при изменении координаты  $z$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Первое аналитическое решение, описывающее подобную когерентную структуру в бездиссипативном джозефсоновском переходе между двумя массивными сверхпроводниками, было получено в 1993 году [2,3]. Оно отвечало  $4\pi$ -кинку. Это решение было получено в нелокальной электродинамике, отвечающей настолько большим критическим плотностям тока Джозефсона, что джозефсоновская длина  $\lambda_j$  оказывается меньше лондоновской длины  $\lambda$ . В аналогичных условиях, но для перехода в геометрии сэндвича, в работе [4] было получено аналитическое описание  $4\pi$ -кинка. Это решение позволило наконец в работе [5] построить описание  $4\pi$ -кинка, отвечающего переходам с небольшой критической плотностью тока Джозефсона, когда

$$\lambda \ll \lambda_j. \quad (1)$$

Помимо аналитических подходов работ [2–5] развивался численный подход к исследованию нелокальных обобщений уравнения синус-Гордона. При этом в обобщении, отвечающем нелокальной электродинамике, было дано численное описание  $4\pi$ -кинка [6,7]. Важным шагом, сделанным в работе [6], было использование слабонелокального приближения, когда в уравнении, обобщающем уравнение синус-Гордона, наряду со вторыми пространственными производными учитывались и четвертые. Как теперь ясно, такое приближение реализуется в случае выполнения неравенства (1) и когда скорость движения вихря близка к  $v_s$  — скорости Свихарта, являющейся

предельной для свободного движения обычного  $2\pi$ -кинка уравнения синус-Гордона. Именно в таком приближении было получено аналитическое описание  $4\pi$ -кинка [5]. Для всех полученных при этом численных и аналитических  $4\pi$ -кинков было характерно то, что они свободно двигались с одной вполне определенной для каждой модели скоростью свободного движения. Важным численным результатом работы [7] было обнаружение наряду с  $4\pi$ -кинком с монотонной пространственной зависимостью также  $4\pi$ -кинка с немонотонной зависимостью от координаты. При этом монотонный и немонотонный  $4\pi$ -кинки оказались движущимися с разными скоростями. Следует подчеркнуть, что это в определенной мере схоже с известными численными результатами работы [8] для дискретной модели джозефсоновских переходов.

Все указанные выше результаты описания  $4\pi$ -кинков были получены для обычной синусной нелинейной зависимости сверхпроводящего тока через переход от разности фаз  $\varphi$  волновых функций куперовских пар. С другой стороны, известна другая модель, предложенная в работах [9,10] для описания дислокаций, а в работах [11,12] — для джозефсоновских переходов. Эта модель Обри–Волкова [9–12] использует пилообразную периодическую зависимость плотности сверхпроводящего тока от разности фаз  $\varphi$ , которая для нелинейных бегущих волн позволяет получить большое количество аналитических результатов. В работе [13] с помощью такой модели было получено счетное множество  $4\pi$ -кинков. Было показано, что  $4\pi$ -кинки, благодаря резонансному черенковскому взаимодействию с волнами Свихарта, захватывают волны в промежутки между  $2\pi$ -кинками. При этом в возникающих когерентных структурах волны играют роль клея, склеивающего вихри [14]. Черенковский захват волн вихрями приводит к тому, что когерентные структуры  $4\pi$ -кинков оказываются характеризующимися дискретными числами, отвечающими числу волн, укладывающихся в области склеивания вихрей. При этом скорости собственного движения вихрей оказываются

дискретно (квантованно) отличающимися для различных вихрей.

Следует отметить, что помимо модели Обри–Волкова имеется еще одна точно решаемая модель [15], в которой синус моделируется чередой равнобедренных треугольников. Учет диссипации в такой модели проводится обычным образом с помощью добавления к дифференциальному оператору Даламбера двух дифференциальных слагаемых. Слагаемое с первой производной по времени описывает омические потери в веществе, разделяющем сверхпроводники, а слагаемое со смешанной третьей производной разности фаз волновых функций куперовских пар (первая производная по времени и вторая производная по пространственной переменной) описывает так называемые поверхностные потери, обусловленные нормальными электронами в сверхпроводниках. В такой модели при достаточно сильных поверхностных потерях, как это показано в работе [15], возможно существование  $4\pi$ -кинка, который приводится в движение током закоротки. Подчеркнем, что свободное движение такого  $4\pi$ -кинка, существующего благодаря сильной диссипации, невозможно. Это качественно различает  $4\pi$ -кинки работы [15] и работ [13,14].

В настоящем сообщении в модели Обри–Волкова рассматривается вынужденное движение  $4\pi$ -кинка под воздействием плотности тока закоротки  $j$ . Полученная зависимость  $j$  от скорости  $v$  движения  $4\pi$ -кинка представляет собой аналог вольт-амперной характеристики (ВАХ). Далее показано, что каждое собственное значение  $v_n$  скорости свободного движения  $4\pi$ -кинка является началом пары кривых  $j(v)$ . Это приводит к тому, что в плоскости  $(v, j)$  возникает полоса ВАХ.

## 1. Основные уравнения

В качестве исходного для нашего анализа используем уравнение [6,16]

$$\frac{1}{\omega_j^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \lambda_j^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{\lambda^2 \lambda_j^2}{2} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4} + F[\varphi] = -\pi J - \frac{\beta}{\omega_j^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\eta \lambda_j^2}{\pi \omega_j^2} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial t \partial z^2}. \quad (2)$$

Здесь  $\omega_j$  — джозефсоновская частота,  $j_c$  — критическая плотность тока Джозефсона,  $J \equiv j/j_c$ ,  $\beta$  характеризует диссипацию в переходе, разделяющем сверхпроводники,  $\eta$  характеризует так называемую поверхностную диссипацию, определяющуюся нормальными электронами сверхпроводников. Отличие дифференциального оператора левой части уравнения (2) от оператора, используемого обычно в так называемой локальной теории, определяется третьим слагаемым, содержащим четвертую пространственную производную. Такое приближение уравнения связывают с приближением слабой пространственной нелокальности. Оно является продуктивным, в частности тогда, когда скорость движения вихрей

близка к скорости Свихарта  $v_s \equiv \lambda_j \omega_j$ . Последнее слагаемое левой части уравнения (2) в модели Обри–Волкова равно

$$F[\varphi] = \varphi - 2\pi I \left[ \frac{\varphi}{2\pi} + \frac{1}{2} \right], \quad (3)$$

где  $I[x]$  — целая часть числа  $x$ . В соответствии с (3) и, следуя работе [4], будем использовать обозначения

$$\omega_j \equiv 4\sqrt{|e|j_c d/\hbar\epsilon}, \quad \lambda_j \equiv c\sqrt{\hbar/\lambda|e|j_c/4},$$

где  $e$  — заряд электрона,  $c$  — скорость света,  $2d$  — ширина слоя, разделяющего сверхпроводники, а  $\epsilon$  — диэлектрическая постоянная такого слоя.

Дальнейшее рассмотрение посвящено вихрям, движущимся с постоянной скоростью  $v$ , когда

$$\varphi = \varphi(\zeta), \quad \zeta \equiv z - vt,$$

а уравнение (2) принимает следующий вид:

$$\left(1 - \frac{v^2}{v_s^2}\right) \lambda_j^2 \frac{d^2 \varphi}{d\zeta^2} + \frac{\lambda^2 \lambda_j^2}{2} \frac{d^4 \varphi}{d\zeta^4} - F[\varphi] = \pi J - \frac{\beta v}{\omega_j^2} \frac{d\varphi}{d\zeta} + \frac{\eta \lambda_j^2 v}{\pi \omega_j^2} \frac{d^3 \varphi}{d\zeta^3}. \quad (4)$$

В исследуемой ниже области параметров характерным масштабом пространственного изменения  $4\pi$ -кинка является

$$\lambda'_j \equiv \lambda_j \sqrt{1 - (v/v_s)^2}. \quad (5)$$

Соответственно этому, используя безразмерную переменную  $\xi \equiv \zeta/\lambda'_j$  для функции  $\psi(\xi) = \varphi(\lambda'_j \xi)$  согласно (4) можно записать

$$\epsilon^2 \frac{d^4 \psi}{d\xi^4} + \frac{d^2 \psi}{d\xi^2} - F[\psi] = \pi J - \bar{\beta} \frac{d\psi}{d\xi} + \bar{\eta} \frac{d^3 \psi}{d\xi^3}. \quad (6)$$

Здесь и далее использованы обозначения

$$\begin{aligned} \epsilon^2 &= \epsilon^2(v) \equiv \frac{\lambda^2}{2\lambda_j^2 [1 - (v/v_s)^2]^2}, \\ \bar{\beta} &= \bar{\beta} \equiv \frac{\beta}{\omega_j} \frac{v/v_s}{\sqrt{1 - (v/v_s)^2}}, \\ \bar{\eta} &= \bar{\eta}(v) \equiv \frac{\eta}{\pi \omega_j} \frac{v/v_s}{[1 - (v/v_s)^2]^{3/2}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Для того чтобы не загромождать изложение, далее ограничимся рассмотрением такого случая, когда

$$\lambda^2/2\lambda_j^2 \ll \epsilon^2 \ll 1. \quad (8)$$

При этом уравнение (6) является дифференциальным уравнением с малым параметром при старшей производной.

## 2. Разность фаз в переходе без омических потерь

В этом разделе рассмотрим такой предел уравнения (6), в котором пренебрегается обычными диссипативными эффектами, когда  $\beta = \eta = 0$  и когда единственным диссипативным эффектом являются потери на черенковское излучение. Тогда имеем

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 \psi}{d\xi^4} + \frac{d^2 \psi}{d\xi^2} - F[\psi] = \pi J. \quad (9)$$

Построим непрерывное решение этого уравнения, удовлетворяющее условиям:  $-\pi < \psi < \pi$  при  $\xi < -\xi_j$ ;  $\psi(-\xi_j) = \pi$ ;  $\pi < \psi < 3\pi$  при  $-\xi_j < \xi < \xi_j$ ;  $\psi(\xi_j) = 3\pi$ ;  $3\pi < \psi < 5\pi$  при  $\xi > \xi_j$ .

Описание процесса решения уравнения начнем с передней части вихря, когда  $\xi > \xi_j$ . Считая, что впереди вихря нет волн, примем, что все производные функции  $\psi$  равны нулю при  $\xi \rightarrow +\infty$ . Тогда в соответствии с уравнением (9) и в предположении

$$J < 1, \quad (10)$$

для разности фаз 4π-кинка при  $\xi \rightarrow +\infty$  имеем

$$\psi(+\infty) = 4\pi - \pi J.$$

Из (3) и (9) для передней части вихря имеем уравнение

$$\varepsilon^2 \frac{d^4 \psi}{d\xi^4} + \frac{d^2 \psi}{d\xi^2} - \psi = -4\pi + \pi J, \quad \xi > \xi_j. \quad (11)$$

Поскольку  $\psi(\xi_j) = 3\pi$ , то решение (11) описывается выражением

$$\begin{aligned} \psi(\xi) &= \psi_h(\xi) = 4\pi - \pi J - \pi(1 - J) \exp[-k_1(\xi - \xi_j)] \\ &\equiv 3\pi + \pi(1 - J) \{1 - \exp[-k_1(\xi - \xi_j)]\}, \end{aligned} \quad (12)$$

где в единицах (5) размер области выхода решения на постоянное значение  $4\pi - \pi J$  определяется числом

$$k_1 = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \sqrt{\sqrt{1 + 4\varepsilon^2} - 1} \simeq 1 - \frac{\varepsilon^2}{2}. \quad (13)$$

Для средней области вихря, где  $\pi < \psi < 3\pi$ , из (3) и (9) имеем

$$\varepsilon^2 \frac{d^4 \psi}{d\xi^4} + \frac{d^2 \psi}{d\xi^2} - \psi = -2\pi + \pi J, \quad -\xi_j < \xi < \xi_j.$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее условиям сшивки самого решения и его первых трех производных с решением (12) и его производными, есть

$$\begin{aligned} \psi(\xi) &= \psi_b(\xi) = 2\pi - \pi J [1 - e^{-k_1(\xi - \xi_j)}] \\ &+ \frac{\pi}{k_0^2 + k_1^2} \{2k_1^2 \cos[k_0(\xi - \xi_j)] \\ &+ k_0^2 e^{k_1(\xi - \xi_j)} - k_1^2 e^{-k_1(\xi - \xi_j)}\}, \end{aligned} \quad (14)$$

где волновое число

$$k_0 = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \sqrt{\sqrt{1 + 4\varepsilon^2} + 1} \simeq \frac{1}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2} \quad (15)$$

определяет длину волны  $\lambda_0 = 2\pi/k_0$  волн Свихарта излучаемых движущимся вихрем. Приравнявая (14) в точке  $\xi = -\xi_j$  числу  $\pi$ , получим условие

$$\begin{aligned} 1 - J(1 - e^{2k_1\xi_j}) + (k_0^2 + k_1^2)^{-1} \{2k_1^2 \cos(2k_0\xi_j) \\ + k_0^2 \exp(-2k_1\xi_j) - k_1^2 \exp(2k_1\xi_j)\} = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

которое связывает между собой величины  $J$ ,  $\xi_j$  и  $v$ . Далее оно будет использовано для получения зависимости  $J(v)$ .

Обратимся теперь к описанию хвостовой части вихря, где  $\psi < \pi$  и уравнение (9) принимает вид

$$\varepsilon^2 \frac{d^4 \psi}{d\xi^4} + \frac{d^2 \psi}{d\xi^2} - \psi = \pi J, \quad \xi < -\xi_j. \quad (17)$$

Решение уравнения (17) можно представить как

$$\begin{aligned} \psi(\xi) &= \psi_t(\xi) = -\pi J + A_t \cos k_0 \xi \\ &+ B_t \sin k_0 \xi + C_t \exp[k_1(\xi + \xi_j)]. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь  $C_t$  описывает величину пространственно-монотонной зависимости вихря,  $A_t$  и  $B_t$  характеризуют обусловленное ускоряющим воздействием тока на вихрь поле черенковского излучения свихартовских волн в хвосте вихря. Сшивка решений (14) и (18) и их первых трех производных дает

$$A_t = \frac{4\pi k_1^2}{k_0^2 + k_1^2} \cos k_0 \xi_j, \quad B_t = 0,$$

$$C_t = \frac{\pi}{k_0^2 + k_1^2} (k_0^2 e^{-2k_1\xi_j} + k_1^2 e^{2k_1\xi_j}) - \pi J e^{2k_1\xi_j}$$

и еще одно дополнительное к (16) условие связи величин  $J$ ,  $\xi_j$  и  $v$ ,

$$J = (k_0^2 + k_1^2)^{-1} (k_1^2 - k_0^2 e^{-2k_1\xi_j}). \quad (19)$$

Тем самым распределение разности фаз 4π-кинка во всем пространстве описывается функциями  $\psi_h(\xi)$  (12),  $\psi_b(\xi)$  (14) и  $\psi_t(\xi)$  (18). В передней части вихря разность фаз экспоненциально убывает от  $4\pi - \pi J$  до  $3\pi$ . В середине вихря, помимо описывающих монотонную зависимость  $\psi$  слагаемых, появляются периодические тригонометрические функции, отвечающие волнам Свихарта. Хвостовая часть вихря описывается одной тригонометрической функцией, отвечающей волнам Свихарта, излученным вихрем, и содержит монотонное слагаемое, убывающее до значения  $-\pi J$ ,  $J < 1$ .

Описание структуры вихря становится еще более прозрачным, если представить решение (12), (14), (18) в виде, естественно возникающем при построении решения с помощью преобразования Фурье на всей оси  $\xi$ .

Действительно, используя соотношение (19) и вводя обозначения

$$\begin{aligned} C &\equiv k_1^2 / (k_0^2 + k_1^2), \\ f(\xi) &\equiv k_0^2 (k_0^2 + k_1^2)^{-1} \exp(-k_1 |\xi|), \\ \psi_{2\pi, m}(\xi) &\equiv \pi + \pi [1 - f(\xi)] \text{sign} \xi, \\ \psi_{2\pi, \omega}(\xi) &\equiv 2\pi C \theta(-\xi) \cos(k_0 \xi), \end{aligned} \quad (20)$$

где  $\theta(\xi)$  — ступенчатая функция Хевисайда,  $\text{sign} \xi \equiv 2\theta(\xi) - 1$  — знаковая функция, для разности фаз  $4\pi$ -кинка имеем

$$\begin{aligned} \psi(\xi) &= -\pi J + \psi_{2n, m}(\xi + \xi_j) + \psi_{2\pi, m}(\xi - \xi_j) \\ &+ \psi_{2\pi, m}(\xi + \xi_j) + \psi_{2\pi, \omega}(\xi - \xi_j). \end{aligned} \quad (21)$$

Согласно (21), в пределе (10) малых токов  $4\pi$ -кинк состоит из суммы двух  $2\pi$ -кинков, локализованных вблизи точек  $-\xi_j$  и  $\xi_j$ . Каждый из  $2\pi$ -кинков испускает волны Свихарта (см. (20)), которые при  $\xi < -\xi_j$  интерферируют между собой. В том случае, когда тока нет ( $J = 0$ ), волны, испускаемые  $2\pi$ -кинками, отсутствуют в хвостовой части вихря. Остаются лишь колебания, локализованные во внутренней области вихря, которые обеспечивают склеивание двух  $2\pi$ -кинков в единый  $4\pi$ -кинк. Если же ток отличен от нуля, то в хвосте вихря возникает поле черенковского излучения. Иными словами, в случае ускорения  $4\pi$ -кинка током, волны Свихарта не заперты в ограниченной области между  $2\pi$ -кинками, а оставляют осциллирующий след в хвосте вихря. Тем самым хвостовая часть  $4\pi$ -кинка оказывается периодически промодулированной излучаемыми вихрем волнами Свихарта.

### 3. Связь тока со скоростью вихря

Связывающие ток  $J$ , координату  $\xi_j$  и скорость вихря  $v$  соотношения (16) и (19) позволяют установить вид функции  $J(v)$ . Перепишем эти соотношения в виде

$$(1 + \delta^2)J = 2\delta^2 \cos^2(k_0 \xi_j), \quad (22)$$

$$(1 + \delta^2)J = \delta^2 - \exp(-2k_1 \xi_j), \quad (23)$$

где обозначено  $\delta \equiv k_1/k_0$ , а числа  $k_0$  (15) и  $k_1$  (13) зависят от скорости вихря через малый параметр  $\varepsilon$  (7). Поскольку  $\varepsilon \ll 1$ , то

$$\delta \simeq \varepsilon - \varepsilon^3 \ll 1. \quad (24)$$

С учетом малости параметра  $\varepsilon$  из (23) и (24) находим размер внутренней части вихря

$$2\xi_j = \ln \left( \frac{1}{\varepsilon^2 - J} \right). \quad (25)$$

Решение (25) имеет смысл, если при заданной скорости вихря плотность тока не превосходит величины

$$J_0(v) \equiv \varepsilon^2(v). \quad (26)$$

Принимая во внимание связь (25), из (22) и (24) получаем уравнение для  $J(v)$

$$J = 2\varepsilon^2 \cos^2 \left[ \frac{1}{2\varepsilon} \ln \left( \frac{1}{\varepsilon^2 - J} \right) \right]. \quad (27)$$

С целью определения функции  $J(v)$  перепишем (27) как

$$\begin{aligned} \left( 1 - \frac{J}{J_0} \right) \exp \left[ \mp \varepsilon \arccos \left( 1 - \frac{J}{J_0} \right) \right] \\ = \exp \left[ 2 \ln \frac{1}{\varepsilon} - \pi \varepsilon (2n + 1) \right]. \end{aligned} \quad (28)$$

В (28) целое число  $n$  нумерует дискретный набор функций  $J(v)$ , связывающих скорость вихря с током. Отвечающие различным значениям  $n$  функции  $J(v)$  описывают порождаемое током движение вихрей с различной внутренней структурой, характеризуемой числом длин волн Свихарта, укладываемых на размерах вихря.

В отсутствие тока из (28) находим, что параметр  $\varepsilon$ , а тем самым и скорость свободно движущегося  $4\pi$ -кинка принимают нумеруемые числом  $n$  дискретные значения

$$\frac{1}{\varepsilon_n} \ln \frac{1}{\varepsilon_n} = \pi \left( n + \frac{1}{2} \right). \quad (29)$$

Учитывая неравенства (8), находим, что число  $n$  должно лежать в диапазоне

$$1 \ll n \ll \frac{2\sqrt{2} \lambda_j}{\pi} \frac{\lambda_j}{\lambda} \ln \left( \frac{\lambda_j}{\lambda} \right). \quad (30)$$

Для таких значений  $n$  из (29) находим

$$\varepsilon_n \simeq \left[ \pi \left( n + \frac{1}{2} \right) \right]^{-1} \ln \left[ \pi \left( n + \frac{1}{2} \right) \right] \simeq \frac{\ln(\pi n)}{\pi n} \ll 1. \quad (31)$$

При наличии тока закортки ситуация изменяется. Теперь для каждого номера  $n$  из интервала (30) уравнение (28) описывает связь тока  $J$  со скоростью вихря  $v$ . Из-за наличия в экспоненте левой части (28) двух знаков перед  $\arccos$  для каждого  $n$  существует две кривые  $J(v)$ . На плоскости скорость–ток началом таких кривых является точка  $v = v_n, J = 0$ , где

$$\frac{v_n}{v_s} \simeq 1 - \frac{\lambda}{2\sqrt{2}\lambda_j \varepsilon_n} \simeq 1 - \frac{\pi n \lambda}{2\sqrt{2}\lambda_j \ln(\pi n)}$$

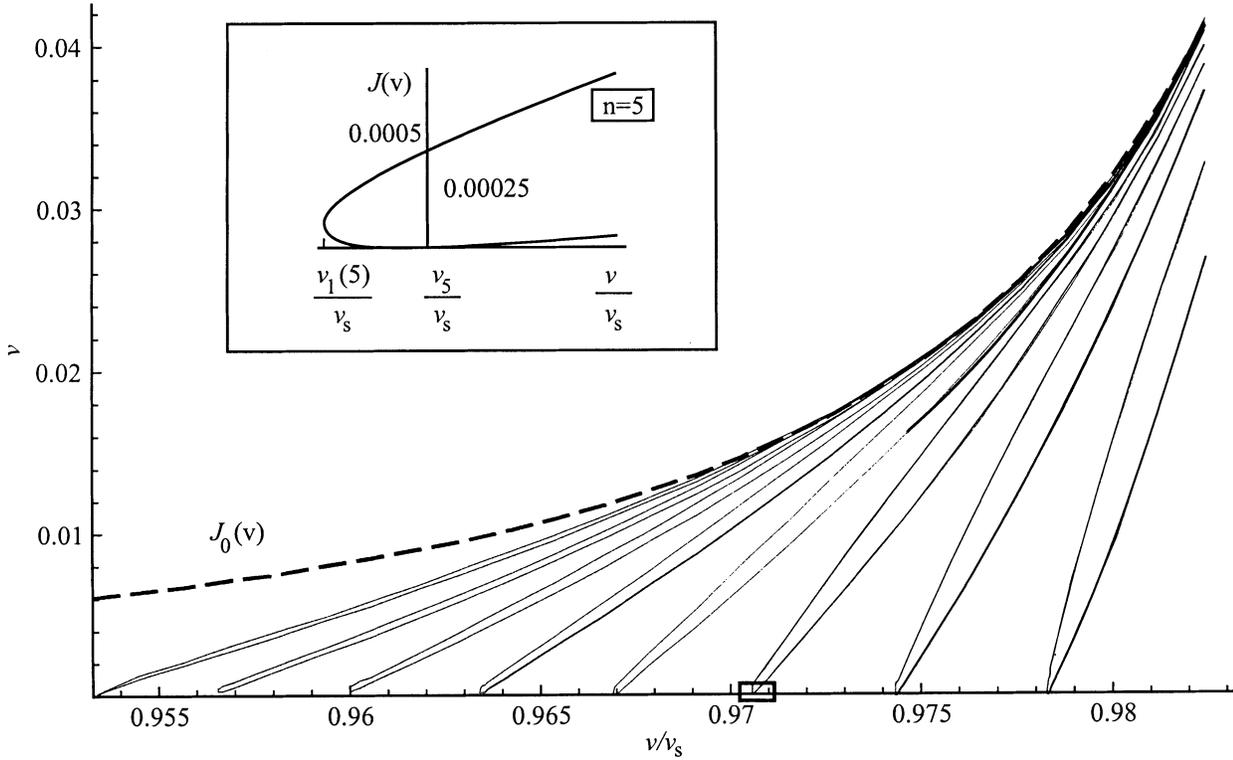
отвечает решению (31) уравнения (29).

Когда скорость вихря  $v$  близка к  $v_n$  настолько, что

$$\frac{1}{\varepsilon_n^2} \simeq \left( \frac{\pi n}{\ln \pi n} \right)^2 \gg 4\sqrt{2}\pi n \frac{\lambda_j}{\lambda} \frac{v - v_n}{v_s} \geq -\frac{1}{2}, \quad (32)$$

решение уравнения (28) имеет вид

$$\begin{aligned} J_{\pm} \simeq \varepsilon_n^4 \left\{ 1 + 4\sqrt{2}\pi n \frac{\lambda_j}{\lambda} \frac{v - v_n}{v_s} \right. \\ \left. \pm \sqrt{1 + 8\sqrt{2}\pi n \frac{\lambda_j}{\lambda} \frac{v - v_n}{v_s}} \right\} \ll \varepsilon_n^2. \end{aligned} \quad (33)$$



**Рис. 1.** Связь тока со скоростью  $4\pi$ -кинка при  $\lambda/\lambda_j = 10^{-2}$ . Начинающиеся на оси абсцисс пары кривых отвечают  $n = 3, 4, \dots, 10$ . Штриховая кривая отвечает предельной зависимости  $J_0(v)$ . На вставке к рисунку приведен участок кривой  $J(v)$  в окрестности  $v = v_5$ .

При небольшом отлчии  $v$  от  $v_n$ , когда

$$\frac{|v - v_n|}{v_s} \ll \frac{1}{8\sqrt{2\pi n}} \frac{\lambda}{\lambda_j}, \quad (34)$$

из (33) находим

$$J_+ \simeq 2\varepsilon_n^4, \quad J_- \simeq \left(4\pi n \frac{\lambda_j}{\lambda}\right)^2 \left(\frac{v - v_n}{v_s}\right)^2 \varepsilon_n^4.$$

При  $v = v_n$  функция  $J_-$  обращается в нуль. Внутри интервала (34) по мере удаления  $v$  от  $v_n$  функция  $J_-$  монотонно возрастает как при увеличении, так и при уменьшении скорости. Область значений скоростей, где  $dJ_-/dv < 0$ , является аналогом неустойчивой, имеющей отрицательное дифференциальное сопротивление ВАХ.

В точке

$$v = v_i(n) \simeq v_n - \frac{\lambda}{8\sqrt{2\pi n}\lambda_j} v_s \simeq v_s \left[1 - \frac{\lambda}{2\sqrt{2}\lambda} \left(\frac{\pi n}{\ln \pi n} + \frac{1}{4\pi n}\right)\right],$$

функции  $J_-$  и  $J_+$  равны, а их производные обращаются в бесконечность. При  $v < v_i(n)$  уравнение (28) не имеет решений для данного  $n$ .

При удалении от  $v_n$  в сторону больших значений  $v$  настолько, что выполняется условие

$$\frac{1}{\varepsilon_n^2} \gg 4\sqrt{2\pi n} \frac{\lambda_j}{\lambda} \frac{v - v_n}{v_s} \gg 1,$$

из (33) находим

$$J_{\pm} \simeq 4\sqrt{2\pi n} \varepsilon_n^4 \frac{\lambda_j}{\lambda} \frac{v - v_n}{v_s} \left\{1 \pm \sqrt{\frac{1}{2\sqrt{2\pi n}} \frac{\lambda}{\lambda_j} \frac{v_s}{v - v_n}}\right\}. \quad (35)$$

Согласно (30) и (35), отличие функций  $J_-$  и  $J_+$  сравнительно мало.

Наконец, приведем решение уравнения (28) при  $v > v_n$  вне интервала (32), когда  $J_{\pm}$  экспоненциально близки к предельному значению  $J_0(v)$ ,

$$J_{\pm} \simeq \varepsilon^2 - \exp\{-\pi\varepsilon[4n + 2 \pm 1]/2\} \simeq J_0(v) = (\lambda^2/2\lambda_j^2)[1 - (v/v_s)^2]^{-2}. \quad (36)$$

Тем самым по мере удаления от точки  $v_n$  кривые  $J_-(v)$  и  $J_+(v)$  экспоненциально быстро асимптотически сближаются.

Отвечающие различным  $n$  кривые  $J(v)$  начинаются в точках  $v_n$ , которые отстоят друг от друга на величину

$$v_n - v_{n+1} \simeq \left|\frac{dv_n}{dn}\right| \simeq \frac{\pi\lambda}{2\sqrt{2}\lambda_j \ln \pi n} v_s.$$

В обсуждаемых условиях эта величина меньше размера

$$v - v_n \simeq \frac{\lambda}{4\sqrt{2}\lambda_j \varepsilon_n \ln \pi n} v_s \simeq \frac{1}{2\pi \varepsilon_n} \left| \frac{dv_n}{dn} \right| > \left| \frac{dv_n}{dn} \right|, \quad (37)$$

на котором сближаются отвечающие данному  $n$  кривые  $J_-(v)$  и  $J_+(v)$ . Тем самым до сближения кривых  $J_-(v)$  и  $J_+(v)$ , отвечающих номеру  $n$  на масштабе порядка (37), происходит рождение кривых с меньшими номерами  $n$ . В области сближения кривых с различными значениями  $n$ , они все экспоненциально близки к предельной кривой  $J_0(v)$  (36). Иллюстрирующий эти закономерности набор кривых с номерами  $n = 3, 4, \dots, 10$  приведен на рис. 1. Наличие дискретного набора близко отстоящих кривых  $J(v)$ , отвечающих определенному значению скорости свободно движущегося вихря  $v_n$ , позволяет говорить о ширине линии некоторой единой зависимости  $J(v)$ . Физической причиной такой ширины, как это следует из изложенного выше, является возможность реализации различных состояний  $4\pi$ -кинка, отличающихся структурой поля волн Свихарта как во внутренней области размером  $2\xi_j$ , так и в хвостовой области вихря  $\xi < -\xi_j$ . Число таких вихревых структур увеличивается с ростом скорости  $4\pi$ -кинка.

На вставке рис. 1 приведена зависимость  $J$  от  $v$  вблизи  $v = v_s$ . Эта зависимость во многом сходна с описываемой так называемый жесткий режим возбуждения нового стационарного состояния при потере устойчивости основного состояния гидродинамического течения [17]. Подобная зависимость характерна и для жесткого возбуждения радиочастотного генератора. Как обычно, участок кривой на вставке к рис. 1, на котором  $dJ/dv < 0$ , оказывается неустойчивым. С другой стороны, такая кривая отвечает гистерезисной зависимости, когда переход с нижней ветки кривой на верхнюю ветку может происходить скачком соответственно при различных значениях  $v$ .

#### 4. Связь тока со скоростью вихря при учете омических потерь

В этом разделе изложим результаты анализа, основанного на уравнении (6), которое учитывает не только черенковское взаимодействие джозефсоновского вихря с волнами Свихарта, но и обычные омические потери как в веществе, разделяющем сверхпроводники, так и в сверхпроводниках из-за наличия в них нормальных электронов. Для интересующего нас движения  $4\pi$ -кинок ограничимся случаем, когда плотность тока закоротки  $j$  невелика. При этом омическую диссипацию будем считать сравнительно слабой, когда

$$\Delta k_0 \equiv \frac{1}{2\sqrt{1+4\varepsilon^2}} (\bar{\beta} + k_0^2 \bar{\eta}) \ll k_0,$$

$$\Delta k_1 \equiv \frac{1}{2\sqrt{1+4\varepsilon^2}} (\bar{\beta} - k_1^2 \bar{\eta}) \ll k_1.$$

Тогда, аналогично изложенному в разделе 2, можно записать следующие выражения, характеризующие пространственную зависимость  $\psi(\xi)$  для равномерно движущегося  $4\pi$ -кинка:

$$\psi_h(\xi) = 3\pi + \pi(1 - J) \times \{1 - \exp[-(k_1 + \Delta k_1)(\xi - \xi_j)]\}, \quad \xi > \xi_j,$$

$$\begin{aligned} \psi_b(\xi) &= 2\pi - \pi J - \pi(1 - \Delta_1)(1 + \delta^2)^{-1} \\ &\times \exp[-(k_1 + \Delta k_1)(\xi + \xi_j)] \\ &+ \pi(1 + \Delta_1)(1 + \delta^2)^{-1} \exp[(k_1 - \Delta k_1)(\xi - \xi_j)] \\ &+ 2\pi\delta^2(1 + \delta^2)^{-1} \exp[\Delta k_0(\xi - \xi_j)] \{ \cos k_0(\xi - \xi_j) \\ &- \Delta_0 \sin k_0(\xi - \xi_j) \}, \quad -\xi_j < \xi < \xi_j, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_l(\xi) &= -\pi J + 2\pi(1 + \Delta_1)(1 + \delta^2)^{-1} \\ &\times \operatorname{ch}[(k_1 - \Delta k_1)\xi_j] \exp[(k_1 - \Delta k_1)\xi] + 2\pi\delta^2(1 + \delta^2)^{-1} \\ &\times [\cos k_0(\xi - \xi_j) - \Delta_0 \sin k_0(\xi - \xi_j)] \exp[\Delta k_0(\xi - \xi_j)] \\ &+ 2\pi\delta^2(1 + \delta^2)^{-1} [\cos k_0(\xi + \xi_j) \\ &- \Delta_0 \sin k_0(\xi + \xi_j)] \exp[\Delta k_0(\xi + \xi_j)], \quad \xi < -\xi_j. \end{aligned}$$

Здесь использованы обозначения

$$\begin{aligned} \Delta_0 &\equiv \frac{1}{2k_0\sqrt{1+4\varepsilon^2}} [(3\sqrt{1+4\varepsilon^2} + 2)\bar{\beta} \\ &+ (\sqrt{1+4\varepsilon^2} + 2)k_0^2\bar{\eta}] \ll 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_1 &\equiv \frac{1}{2k_1\sqrt{1+4\varepsilon^2}} [(3\sqrt{1+4\varepsilon^2} - 2)\bar{\beta} \\ &+ (2 - \sqrt{1+4\varepsilon^2})k_1^2\bar{\eta}] \ll 1. \end{aligned}$$

Наконец, соотношения, обобщающие соотношения (22) и (23) учетом омической диссипации, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} (1 + \delta^2)J &= \delta^2 + \Delta_1 + (1 + \Delta_1) \exp[-2(k_1 - \Delta k_1)\xi_j] \\ &+ 2\delta^2 [\cos 2k_0\xi_j + \Delta_0 \sin 2k_0\xi_j] \exp[-2\Delta k_0\xi_j], \quad (38) \end{aligned}$$

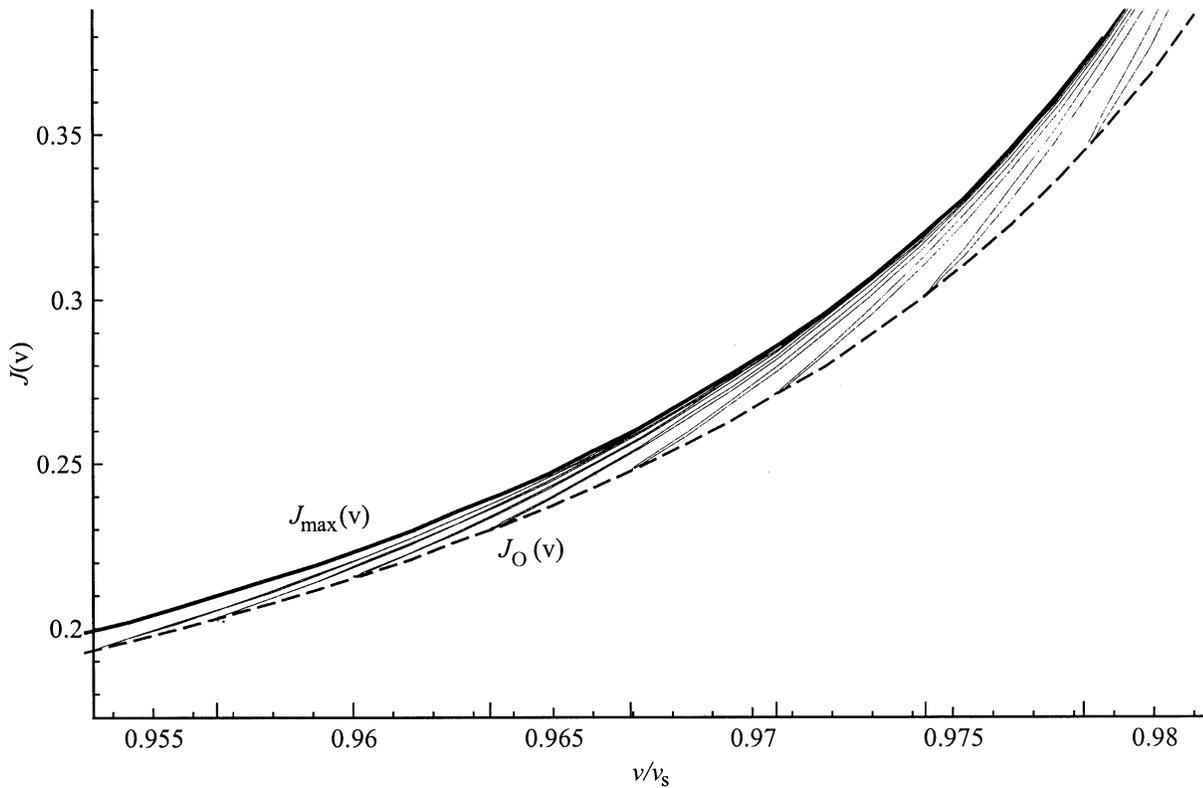
$$(1 + \delta^2)J = \delta^2 + \Delta_1 - (1 - \Delta_1) \exp[-2(k_1 + \Delta k_1)\xi_j]. \quad (39)$$

В пределе (8), а также в предположении малости затухания волн Свихарта во внутренней области вихря

$$2\xi_j \Delta k_0 \simeq \left( \bar{\beta} + \frac{1}{\varepsilon^2} \bar{\eta} \right) \xi_j \ll 1,$$

уравнения (38) и (39) дают, во-первых, следующее соотношение:

$$2\xi_j \simeq \ln \frac{1}{\varepsilon^2 - J + (\bar{\beta} + \bar{\eta})/2} \simeq 2\pi n \varepsilon,$$



**Рис. 2.** Зависимость тока от скорости вихря в переходе с омическими потерями при  $\beta/\omega_j = 0.1$ ,  $\eta/\pi\omega_j = 0.002$ ,  $\lambda/\lambda_j = 0.01$ . Внутри полосы приведены пары кривых, отвечающие  $n = 3, 4, \dots, 10$ .

характеризующее размер внутренней области вихря, наполненной волнами Свихарта. Во-вторых, имеем

$$J - \frac{\bar{\beta} + \bar{\eta}}{2} = 2\varepsilon^2 \cos^2 \left[ \frac{1}{2\varepsilon} \ln \left( \frac{1}{\varepsilon^2 - J + (\bar{\beta} + \bar{\eta})/2} \right) \right] \quad (40)$$

— уравнение связывающее ток и скорость вихря. Из (40) с очевидностью следует, что в рассматриваемом приближении

$$J = J_0(v) + J_C(v), \quad (41)$$

где омический ток определяется соотношением

$$J_0 \equiv \frac{1}{2}(\bar{\beta} + \bar{\eta}) = \frac{v/v_s}{2\sqrt{1 - (v/v_s)^2}} \left\{ \frac{\beta}{\omega_j} + \frac{\eta}{\pi\omega_j} \frac{1}{1 - (v/v_s)^2} \right\}, \quad (42)$$

а черенковский ток  $J_C$  определяется решением уравнения (27). Рис. 2 иллюстрирует закон (41). Приведенные на рис. 2 кривые отвечают характеризующим джозефсоновский переход данным работы [18]:  $\beta/\omega_j = 0.1$ ,  $\eta/\pi\omega_j = 0.002$ ,  $\lambda/\lambda_j = 0.01$ . Штриховой кривой отвечает зависимость (42), а верхней сплошной кривой соответствует

$$J_{\max}(v) = J_0(v) + J_0(v),$$

где в соответствии с (7) и (26)

$$J_0(v) = \frac{\lambda^2}{2\lambda_j^2 [1 - (v/v_s)^2]^2}.$$

Изложенный выше материал, представляющий описание вынужденного под действием тока закоротки движения 4π-кинка — когерентной пары 2π-кинок, позволяет в простой аналитической форме усмотреть связь скорости равномерного движения такого вихря с вынуждающим током. Простые аналитические формулы получены в пределе (8), когда

$$\lambda^2/2\lambda_j^2 \ll J_0(v) \ll 1.$$

Возникающий в нашем рассмотрении обусловленный черенковской перестройкой структуры вихря набор зависимостей  $J(v)$  в области значений

$$J_0(v) \leq J(v) \leq J_{\max}(v) = J_0(v) + J_0(v)$$

может быть экспериментально различим при сравнительно небольших омических потерях. Особенно упрощается такое проявление при низких температурах, когда благодаря вымерзанию нормальных электронов можно пренебречь поверхностными омическими потерями. Тогда черенковские потери сравниваются или даже превышают

омические при

$$\frac{\lambda^2}{\lambda_j^2} > \frac{\beta}{\omega_j} \left(1 - \frac{v^2}{v_s^2}\right)^{3/2} \gg \frac{\beta}{\omega_j} \left(\frac{\lambda}{\lambda_j}\right)^{3/2}.$$

Последнее неравенство может быть выполнено в переходах с достаточно малыми омическими потерями, когда  $\beta^2/\omega_j^2 \ll \lambda/\lambda_j$ .

## Список литературы

- [1] B. Ducholm, O.A. Levring, J. Mygind, N.F. Pedersen, O.H. Soerensen, M. Cirillo. *Phys. Rev. Lett.* **46**, 19, 1299 (1981).
- [2] Yu.M. Aliev, V.P. Silin. *Phys. Lett.* **A177**, 259 (1993).
- [3] Ю.М. Алиев, В.П. Силин. *ЖЭТФ* **104**, 1, 2526 (1993).
- [4] В.П. Силин, С.А. Урюпин. *ЖЭТФ* **108**, 6, 2163 (1995).
- [5] V.P. Silin, A.V. Studenov. *Phys. Lett.* **A264**, 324 (1999).
- [6] G.L. Alfimov, V.M. Eleonsky, N.E. Kulagin, N.V. Mitzkevich. *Chaos* **3**, 405 (1993).
- [7] G.L. Alfimov, V.M. Eleonsky, L.M. Lerman. *Chaos* **8**, 257 (1998).
- [8] M. Peyrard, M.D. Kruskal. *Physica* **D14**, 88 (1984).
- [9] S. Aubry, P.J. Le Daeron. *Physica* **D7**, 240 (1983).
- [10] S. Aubry. *J. Phys.* **C16**, 13, 2497 (1983).
- [11] A.F. Volkov. *Physica* **C183**, 177 (1991).
- [12] A.F. Volkov. *Physica* **C192**, 306 (1992).
- [13] A.S. Malishevskii, V.P. Silin, S.A. Uryupin. *Phys. Lett.* **A253**, 333 (1999).
- [14] А.С. Малишевский, В.П. Силин, С.А. Урюпин. *ЖЭТФ* **117**, 4, 771 (2000).
- [15] S. Sakai. *Phys. Rev.* **B36**, 1, 812 (1987).
- [16] В.П. Силин, А.В. Студенов. *ЖЭТФ* (2000), в печати.
- [17] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Гидродинамика*. Наука, М. (1998). С. 140.
- [18] N. Martucciello, J. Mygind, V.P. Koshelets, A.V. Shchukin, L.V. Filippenko, R. Monaco. *Phys. Rev.* **B57**, 9, 5444 (1998).