

01;03

Асимметрия нелинейного резонансного взаимодействия мод капиллярных осцилляций заряженной капли

© С.О. Ширяева

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
E-mail:shir@uniar.ac.ru

Поступило в Редакцию 22 мая 2000 г.

Получено аналитическое выражение, описывающее осцилляции заряженной капли, когда начальная деформация определена суперпозицией двух мод. Показано, что обмен энергией между четвертой и шестой модами в условиях внутреннего резонанса во втором порядке малости по амплитуде деформации происходит асимметричным образом.

1. Изучение нелинейного взаимодействия мод в заряженной капле представляет интерес в связи с многочисленными академическими и практическими приложениями этого объекта. При исследовании нелинейных капиллярных колебаний заряженной капли выяснилось [1], что во втором порядке малости по амплитудам мод в капле, когда ее заряд меньше критического в смысле устойчивости по отношению к собственному заряду, при $\omega_6^2 = 4 \cdot \omega_4^2$ имеет место внутренний нелинейный резонанс между четвертой и шестой модами. Наличие такого резонанса может привести к снижению критических условий реализации неустойчивости капли по сравнению с предсказаниями линейной теории. В этой связи его детальное изучение представляется актуальным.

2. Примем, что капля идеальной, идеально проводящей жидкости с плотностью ρ и коэффициентом поверхностного натяжения σ несет заряд Q . В начальный момент времени отклонение формы капли от сферической определяется суперпозицией двух мод линейных капиллярных колебаний, характеризуется амплитудой ε и нулевой начальной скоростью. В сферической системе координат с началом в центре капли математическая запись начальной деформации в безразмерных переменных, в которых $\rho = \sigma = R = 1$, в квадратичном по ε

приближении имеет вид:

$$t = 0 : \quad r = 1 + \xi_0 + \varepsilon[h_k \cdot P_k(\mu) + h_m \cdot P_m(\mu)]; \quad (1)$$

$$\xi_0 \approx -\varepsilon^2 \left[\frac{h_k^2}{(2k+1)} + \frac{h_m^2}{(2l+1)} \right] + O(\varepsilon^3); \quad h_k + h_m = 1; \quad \mu = \cos \theta.$$

Объем исходной капли равен объему сферической капли радиуса R .

Решение задачи о нелинейных капиллярных колебаниях такой капли в постановке, эквивалентной использованной в [2], но выполненное не прямым разложением, а методом многих масштабов, с начальным условием (1) и определяющее форму капли в любой момент времени с точностью до слагаемых второго порядков малости по ε имеет вид:

$$\begin{aligned} r(\mu, t) = & 1 + \varepsilon \left\{ h_k \cdot \cos(\omega_k t) P_k(\mu) + h_m \cdot \cos(\omega_m t) P_m(\mu) \right\} \\ & - \varepsilon^2 \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{h_k^2}{(2k+1)} (1 + \cos(2\omega_k t)) + \frac{h_m^2}{(2m+1)} (1 + \cos(2\omega_m t)) \right] \right. \\ & \left. + \sum_{n=1}^{\infty} [N_n(t=0) \cdot \cos(\omega_n t) - N_n(t)] P_n(\mu) \right\} + O(\varepsilon^3 t); \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_n(t) = & \frac{1}{2} \left\{ h_k^2 \cdot [\lambda_{kkn}^{(-)} + \lambda_{kkn}^{(+)} \cos(2\omega_k t)] + h_k h_m \left[\lambda_{kmm}^{(+)} + \lambda_{mkn}^{(+)} \right] \right. \\ & \left. \times \cos((\omega_k + \omega_m)t) + [\lambda_{kmm}^{(-)} + \lambda_{mkn}^{(-)}] \cdot \cos((\omega_k - \omega_m)t) \right. \\ & \left. + h_m^2 [\lambda_{mmm}^{(-)} + \lambda_{mmm}^{(+)} \cos(2\omega_m t)] \right\}; \end{aligned}$$

$$\lambda_{m,j,n}^{(\pm)} \equiv \frac{\gamma_{m,j,n} \pm \omega_m \cdot \omega_j \cdot \eta_{m,j,n}}{\omega_n^2 - (\omega_m^{\pm} \omega_j)^2};$$

$$\gamma_{m,j,n} \equiv k_{m,j,n} \cdot \left[\omega_m^2 (n - m + 1) + 2n[j(j+1) - 1] \right]$$

$$+ n[j(m+1) - m(2m-2n+7) + 3]W \Big] + \alpha_{m,j,n} \left[\frac{1}{m} \omega_m^2 + nW \right];$$

$$\eta_{m,j,n} \equiv k_{m,j,n} \cdot \left(\frac{n}{2} - m + 1\right) + \alpha_{m,j,n} \frac{1}{m} \left(1 + \frac{n}{2j}\right);$$

$$k_{m,j,n} \equiv [C_{m,j,n}^{0,0,0}]^2; \quad \alpha_{m,j,n} \equiv -[m(m+1)j(j+1)]^{1/2} \cdot C_{m,j,n}^{0,0,0} \cdot C_{m,j,n}^{-1,1,0};$$

$$C_{m,j,n}^{0,0,0} \equiv \begin{cases} 0, & \text{при } (m+j+n) = (2g+1), \quad g \text{ — целое число;} \\ \frac{(-1)^{g-n} \cdot g! \cdot (2n+1)^{1/2}}{(g-m)! \cdot (g-j)! \cdot (g-n)!} \left[\frac{(2g-2m)! \cdot (2g-2j)! \cdot (2g-2n)!}{(2g+1)!} \right]^{1/2}, & \\ \text{при } (m+j+n) = 2g, \quad g \text{ — целое число;} \end{cases}$$

$$C_{m,j,n}^{-1,1,0} \equiv (2n+1)^{1/2} \cdot n!$$

$$\times \left[\frac{(m+j-n)! \cdot m(m+1)}{(n+m-j)! \cdot (n-m+j)! \cdot (n+m+j+1)! \cdot j(j+1)} \right]^{1/2}$$

$$\times \sum_p \frac{(-1)^{m+1+p} \cdot (m+p-1)! \cdot (n+j-p+1)!}{p! \cdot (m-p+1)! \cdot (n-p)! \cdot (j-n+p-1)!};$$

$$W \equiv \frac{Q^2}{8\pi}; \quad \omega_n^2 \equiv n(n-1)[(n+2) - W].$$

В последнем выражении суммирование ведется по всем целым значениям p , для которых все выражения под знаком факториала неотрицательны. Коэффициенты $C_{m,j,n}^{0,0,0}$ и $C_{m,j,n}^{-1,1,0}$ есть коэффициенты Клебша–Гордана [3], отличные от нуля при условии, что нижние индексы удовлетворяют соотношениям: $|m-j| \leq n \leq (m+j)$; $(m+j+n) = 2g$; где g — целое.

3. Коэффициенты $\lambda_{kkn}^{(\pm)}$ и $\lambda_{mnn}^{(\pm)}$ отличны от нуля лишь для четных значений n , принадлежащих диапазонам $[0, 2k]$ и $[0, 2m]$ соответственно, а $\lambda_{knn}^{(\pm)}$ и $\lambda_{mkn}^{(\pm)}$ — для значений n из диапазона $[|k-m|, (k+m)]$,

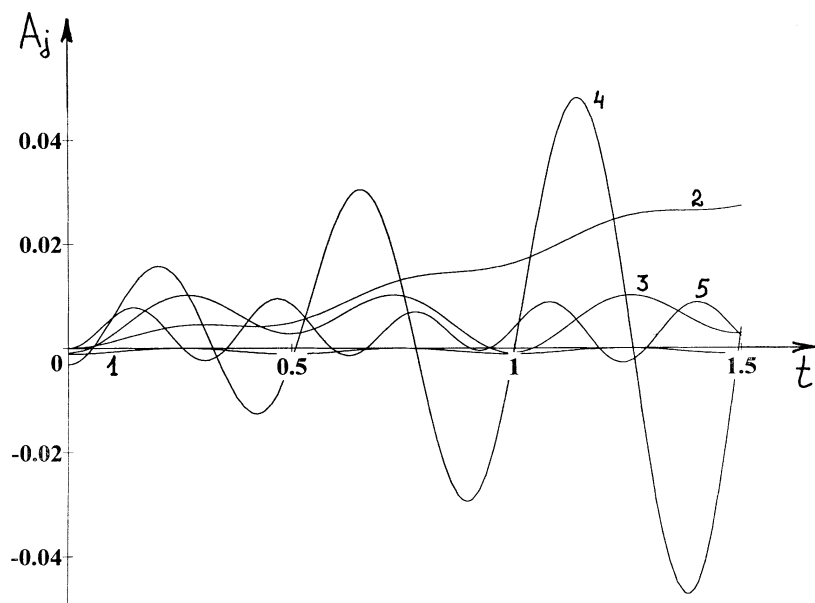


Рис. 1. Временные зависимости амплитуд мод, возбуждаемых во втором порядке малости при $\varepsilon = 0.1$, в окрестности резонанса (когда $\omega_0^2 = 4 \cdot \omega_4^2$). Кривая 1 соответствует нулевой моде; 2 — второй моде; 3 — четвертой моде; 4 — шестой моде; 5 — восьмой моде; 6 — десятой моде; 7 — двенадцатой моде. Начальная деформация задана в виде виртуального возмущения. Резонансная раскачка только шестой моды с амплитудой ε .

удовлетворяющих условию: $n + k + m$ — четное. Таким образом, при одновременном возбуждении четной и нечетной мод в результате их взаимодействия во втором порядке малости будет генерироваться возмущение всех четных мод из диапазона $[0; \max(2k, 2m)]$ и всех нечетных мод из диапазона $[|k - m|, (k+m)]$. При начальном возбуждении двух четных либо двух нечетных мод во втором порядке малости проявится возмущение только четных мод из диапазона $[0; \max(2k, 2m)]$. Так, при начальном возбуждении четвертой и шестой мод (резонанс которых

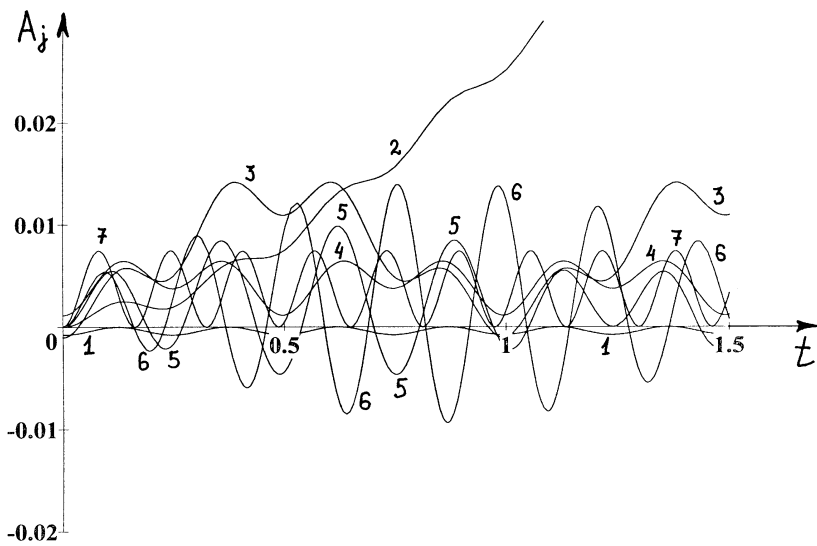


Рис. 2. Резонансная раскачка только четвертой моды с амплитудой ε . Обозначения, как на рис. 1.

будет исследоваться) выражение (2) имеет форму:

$$\begin{aligned}
 r = 1 + \varepsilon \cdot & \left[h_k \cos(\omega_4 t) \cdot P_4(\mu) + h_m \cos(\omega_6 t) \cdot P_6(\mu) \right] \\
 & + \varepsilon^2 \left[A_0(t) \cdot P_0(\mu) + A_2(t) \cdot P_2(\mu) + A_4(t) \cdot P_4(\mu) + A_6(t) \cdot P_6(\mu) \right. \\
 & \left. + A_8(t) \cdot P_8(\mu) + A_{10}(t) \cdot P_{10}(\mu) + A_{12}(t) \cdot P_{12}(\mu) \right].
 \end{aligned}$$

Из коэффициентов $A_j(t)$ ввиду их громоздкости приведем лишь выражения для $A_4(t)$ и $A_6(t)$, важные в контексте настоящего сообщения, остальные же, чтобы не загромождать текст, выписывать не будем (их

несложно получить из (2):

$$\begin{aligned}
 A_4(t) = & \frac{108}{1001\omega_4^2} \left(\frac{3}{4}(206 + W) - (4 + 17W) \cos(\omega_4 t) \right. \\
 & \left. - \frac{1}{4}(602 - 65W) \cos(2\omega_4 t) \right) h_4^2 + \frac{15}{286(8 - 3W)} \\
 & \times \left\{ \omega_6^{-1} [4(4W + 19) \cdot \omega_6 + (240 - W) \cdot \omega_4] \cos[(\omega_4 - \omega_6)t] \right. \\
 & - 8(4W + 19) \cdot \cos(\omega_4 t) + \omega_6^{-1} [4(4W + 19)\omega_6 \\
 & \left. - (240 - W)\omega_4] \cos[(\omega_4 + \omega_6)t] \right\} h_4 h_6 + \frac{7}{2431} \left\{ 12 \frac{23W + 572}{\omega_4^2} \right. \\
 & \left. + \frac{24(277W^2 - 1084W - 10568)}{\omega_4^2(74 - 9W)} \cos(\omega_4 t) \right. \\
 & \left. - \frac{(3532 - 347W)}{(74 - 9W)} \cos(2\omega_6 t) \right\} h_6^2; \quad (3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_6(t) = & \frac{15}{198\omega_6^2} \left\{ (610 - 11W) + 16 \frac{(1010 - 37W - 3W^2)}{(8 - 3W)} \cos(\omega_6 t) \right. \\
 & \left. - \omega_6^2 \frac{(526 + 3W)}{6(8 - 3W)} \cos(2\omega_4 t) \right\} h_4^2 - \frac{28}{1683(74 - 9W)} \\
 & \times \left\{ 3(56W - 121) \cdot \cos(\omega_6 t) - \omega_4^{-1} [1.5(56W - 121)\omega_4 \right. \\
 & \left. + 3(397 - 7W)\omega_6] \cos[(\omega_6 - \omega_4)t] - \omega_4^{-1} [1.5(56W - 121)\omega_4 \right. \\
 & \left. - 3(397 - 7W)\omega_6] \cos[(\omega_6 + \omega_4)t] \right\} h_4 h_6
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{100}{3553\omega_6^2} \left\{ -3(23W + 528) + 16(11W + 1) \cos(\omega_6 t) \right. \\
 & \left. + (1568 - 107W) \cos(2\omega_6 t) \right\} h_6^2. \quad (4)
 \end{aligned}$$

Внутренний нелинейный резонанс между четвертой и шестой модами связан с появлением в амплитудах мод слагаемых, содержащих множители $\sim (8 - 3W)^{-1}$. Из соотношений (2)–(4) видно, что амплитуды $A_4(t)$ и $A_6(t)$ являются квадратичными формами начальных амплитуд εh_4 и εh_6 . Причем в амплитуду $A_4(t)$ резонансный множитель $(8 - 3W)^{-1}$ входит в слагаемое $\sim h_4 h_6$, что означает наличие резонансного роста $A_4(t)$ только при начальном возбуждении и четвертой, и шестой мод. В амплитуду же $A_6(t)$ резонансный множитель входит в слагаемое $\sim h_4^2$, т.е. резонансный рост $A_6(t)$ обеспечивается начальным возбуждением

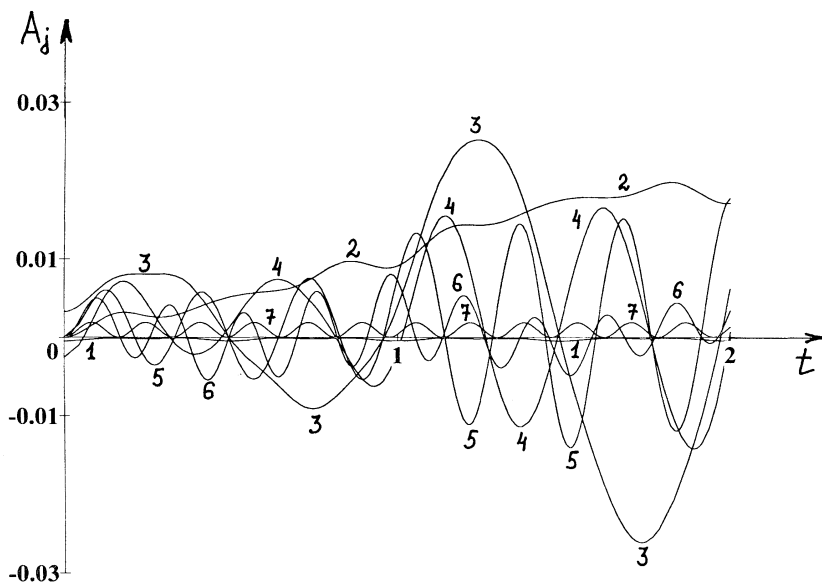


Рис. 3. Резонансная раскачка и четвертой, и шестой мод с амплитудами 0.5ε каждая. Обозначения, как на рис. 1.

одной четвертой моды ($h_6 = 0$). При начальном возбуждении только шестой моды ($h_4 = 0$) резонансное взаимодействие четвертой и шестой мод места не имеет. Сказанное иллюстрируется рис. 1–3, где приведены рассчитанные по (2) графики зависимости от безразмерного времени t безразмерных амплитуд $A_j(t)$ мод, возбуждающихся в результате взаимодействия во втором порядке малости в окрестности резонанса четвертой и шестой мод (при $W = W_* = 2.67$). Видно, что в соответствии с вышесказанным резонансная раскачка шестой моды имеет место только при начальном возбуждении четвертой моды (одной либо в паре с шестой). Резонансная раскачка четвертой моды происходит только при начальном возбуждении и четвертой, и шестой мод.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ 00–15–9925.

Список литературы

- [1] Tsamopoulos J.A., Brown R.A. // J. Fluid Mech. 1984. V. 147. P. 373–395.
- [2] Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. // Письма в ЖТФ. 1999. Т. 25. В. 15. С. 41–45.
- [3] Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К. Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975. 439 с.