

01;07

Нарушение вероятностной симметрии при быстрой бифуркации удвоения периода

© Б.П. Безручко, Р.Н. Иванов

Институт радиотехники и электроники РАН, Саратовское отделение
E-mail: bezrg@ire.san.ru

Поступило в Редакцию 23 мая 2000 г.

На примере квадратичных одномерных отображений с шумами моделируется феномен нарушения равенства вероятностей вариантов постбифуркационной эволюции системы в случае быстрого изменения управляющего параметра. Рассматривается бифуркация удвоения периода, после которой в системе может существовать один из двух видов колебаний, отличающихся лишь фазой. Обсуждаются механизм явления и его закономерности.

1. В нелинейном мире достаточно широко представлены бифуркационные ситуации, когда при изменении управляющего параметра исходное состояние (движение) теряет устойчивость, а взамен появляются два равноценных варианта дальнейшего существования и эволюции. Так, в результате бифуркации удвоения периода в окрестности потерявшего устойчивость цикла рождается цикл удвоенного периода, которому соответствуют два равноправных варианта движения, отличающихся лишь фазой (сдвигом во времени на период движения, ставшего неустойчивым). Возникает задача: какой из вариантов "постбифуркационного будущего" будет выбран, если управляющий параметр r меняется с некоторой конечной скоростью S в присутствии шумов с дисперсией σ^2 ? Интерес к ней проявляется в связи с фундаментальными проблемами физики и биологии (см., например, обзоры [1,2]), а также и ее практической важностью.

При очень медленном (адиабатическом) изменении параметра после бифуркации удвоения система остается вблизи потерявшего устойчивость цикла, а выбор того или иного конечного состояния определяется шумом. Если распределение вероятностей шума симметрично, то вероятно симметричны и конечные состояния: $p_1 = p_2 = 1/2$. В другом

пределе — бесконечно малого шума ($\sigma^2 \rightarrow 0$) — в зависимости от задания начальных условий при любом S с вероятностью, равной 1, реализуются или первое ($p_1 = 1, p_2 = 0$), или второе ($p_1 = 0, p_2 = 1$) конечные состояния, т.е. имеет место полная предсказуемость. Перечисленные предельные варианты бифуркационного перехода получили названия соответственно ”стохастического” и ”динамического” [3,4]. При достаточно быстром изменении управляющего параметра и наличии шумов реализуется нечто промежуточное — конечные состояния могут быть предсказаны лишь с вероятностью, меньшей 1, а их вероятностная симметрия нарушается ($p_1 \neq p_2$). В этой ситуации выделяют условную границу между стохастическим и динамическим переходами по признаку установления определенного конечного состояния с заданной вероятностью, например $p_1 = 0.75, p_2 = 0.25$. В [3] на основании численного исследования логистического отображения (2) с аддитивно добавленным нормальным шумом установлено, что уровень шума и скорость изменения управляющего параметра, соответствующие этой границе, связаны универсальным степенным законом:

$$\sigma_c^2 = CS^\alpha. \quad (1)$$

Причем показатель степени α и множитель C зависят от начальных условий, а α максимален при задании x_0 вблизи границ ”областей притяжения”¹ конечных состояний [4].

Целями данной работы являются выделение механизма нарушения вероятностной симметрии конечных состояний в системах с удвоением периода при быстром изменении параметра, определение места универсальной закономерности (1), расширение представлений о быстрых переходах. Они достигаются за счет анализа большего по сравнению с работами предшественников числа моделей и существенного увеличения статистики.

2. Классической моделью системы с бифуркацией удвоения периода является одномерное отображение $x_{n+1} = f(x_n)$, функция $f(x_n)$ которого имеет квадратичный максимум; x — динамическая переменная, $n = 0, 1, 2, \dots$ — дискретное время. Исследовались пять отображений

¹ ”Областью притяжения” будем называть часть бассейна притяжения цикла удвоенного периода, из которой система попадает в одно из конечных колебательных состояний, отличающихся фазой.

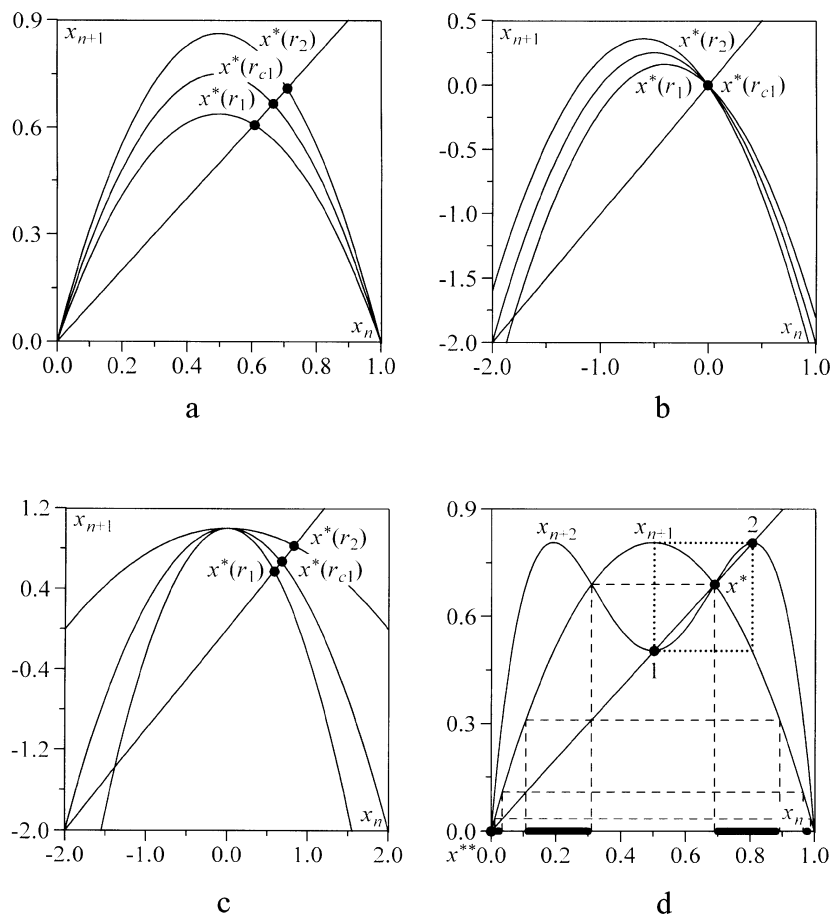


Рис. 1. Вид отображений при различных значениях параметра: *a* — отображение (2), *b* — отображение (4), *c* — отображение (6), *d* — структура областей притяжения конечных состояний 1 (тонкая линия) и 2 (жирная линия) на примере отображения (2) и его второй итерации $x_{n+2} = f(f(x_n))$.

этого класса:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n), \quad x_{n+1} = r - x_n^2, \quad (2), (3)$$

$$x_{n+1} = -(x_n/r)(r + x_n), \quad x_{n+1} = r(1 - r^3 x_n^2), \quad x_{n+1} = 1 - rx_n^2. \quad (4), (5), (6)$$

Заменой переменных они могут быть переведены друг в друга, но отличаются характером зависимости от параметра r стационарного решения x^* (точки равновесия, цикла периода 1), которому на графиках рис. 1 соответствуют пересечения с диагональю² $x_n = x_{n+1}$. Для отображения (4) производная $\gamma = dx^*/dr = 0$, т.е. точка x^* не меняет своего положения в одномерном фазовом пространстве (рис. 1, *b*). Для других — $\gamma \neq 0$, имеет различные знаки и величины, в них при изменении параметра смещается и точка x^* (рис. 1, *a, c*).

Управляющий параметр изменялся во времени по кусочно-линейному закону:

$$r(n) = \begin{cases} r_1 + Sn, & n \leq N, \\ r_1 + SN = r_2, & n > N', \end{cases} \quad (7)$$

где r_1 и r_2 — начальное и конечное значения параметра, S — скорость изменения параметра ($S = \Delta r/N$, где $\Delta r = r_2 - r_1$ — величина изменения параметра, N — число итераций, за которое произошло изменение). Бифуркационное значение r_c располагалось в середине интервала изменения: $r_1 < r_c < r_2$. При $r = r_c$ мультипликатор $|(dx_{n+1}/dx_n)|_{x^*} = 1$ и точка x^* теряет устойчивость, а в ее окрестности рождается цикл периода 2. На графике второй итерации $x_{n+2} = f(f(x_n))$, представленном для примера на рис. 1, *d* вместе с отображением (2), удвоенному циклу соответствуют точки равновесия 1 и 2. Для динамической системы $x_{n+2} = f(f(x_n))$ это — аттракторы, бассейны притяжения которых выделены цветом на оси абсцисс. Применительно к системе (2) раскрашенные по-разному участки оси абсцисс — ”области притяжения” конечных состояний.

В отображении аддитивно вводилась шумовая добавка $x_n \rightarrow x_n + \xi_n$, где ξ_n — случайная последовательность с законом распределения, близким к нормальному, и нулевым средним. При расчетах в качестве начального условия выбиралось $x_0 = x^*(r_1)$ (рис. 1, *a-c*), которое определялось из (2)–(6) аналитически. Затем проводилось итерирование, а через достаточно большое количество шагов ($n \gg N$) после

² Другое пересечение с диагональю соответствует неустойчивому равновесию, эта точка (x^{**}) разделяет область конечных и бесконечных решений.

затухания переходных процессов определялся вид конечного состояния. По 250 исходам численного эксперимента определялась вероятность $p_{1,2}$ попадания в заданное конечное состояние удвоенного периода от дисперсии шума σ^2 при различных значениях S . По сглаженным зависимостям $p_{1,2}(\ln(S))$ производились оценки критического уровня шума σ_c^2 , при котором вероятность $p_{1,2}$ становилась равной 0.75 и 0.25, и строились зависимости $\ln(\sigma_c^2)$ от $\ln(S)$.

3. Анализ данных численных экспериментов показывает, что:

а) В общем случае (при произвольном Δr) зависимость σ_c^2 от S определяется видом отображения и отличается от степенной (1). Это иллюстрирует рис. 2, *a*, где зависимость $\ln(\sigma_c^2)(\ln(S))$ не только не аппроксимируется линейной функцией, но и зависит от четности–нечетности N . Она определяется и величиной Δr (рис. 2, *b*), где приведены зависимости лишь для нечетных N , а одинаковым S при разных Δr соответствуют различные σ_c^2 .

б) Степенная зависимость (1) имеет место лишь при малых интервалах изменения управляющего параметра Δr : на рис. 2, *b* становятся прямыми участки с большими номерами k , которым соответствуют малые значения Δr : $\Delta r_k = 2^{-3(k-1)} \cdot \Delta r_1$, где Δr_1 бралось равным по модулю разности значений параметра при первой и второй бифуркациях удвоения периода. Интересно, что точки, соответствующие на рис. 2, *b* малым N (на правых концах кривых $N = 1$, а на левых — 200), тоже расположены практически на одной прямой.

в) Перечисленные закономерности и само нарушение вероятностной симметрии конечных состояний в исследованных системах связано со смещением "центра тяжести" распределения значений переменной к концу быстрого перехода (величины $\langle x_N + \xi_N \rangle$, где $\langle \rangle$ — среднее по ансамблю) относительно границы раздела областей притяжения различных конечных состояний. Эти границы формируются неустойчивыми точками равновесия x^* и их прообразами, как это показано на рис. 1, *d* (подробнее см. [5]). С течением времени на интервале $n = 0 \div N$ (с изменением r от r_1 до r_2) значение x^* меняется монотонно, а величина x_n — колебательно с квазипериодом 2. Флуктуации на первой стадии перехода (при $r < r_c$) подавляются, а на второй — нарастают. Поэтому при малых N дисперсия $\langle ((x_N + \xi_N) - \langle x_N + \xi_N \rangle)^2 \rangle$ мала, а при больших N флуктуационная составляющая становится преобладающей. Так на рис. 2, *c* при N , меньших некоторого N_1 , в

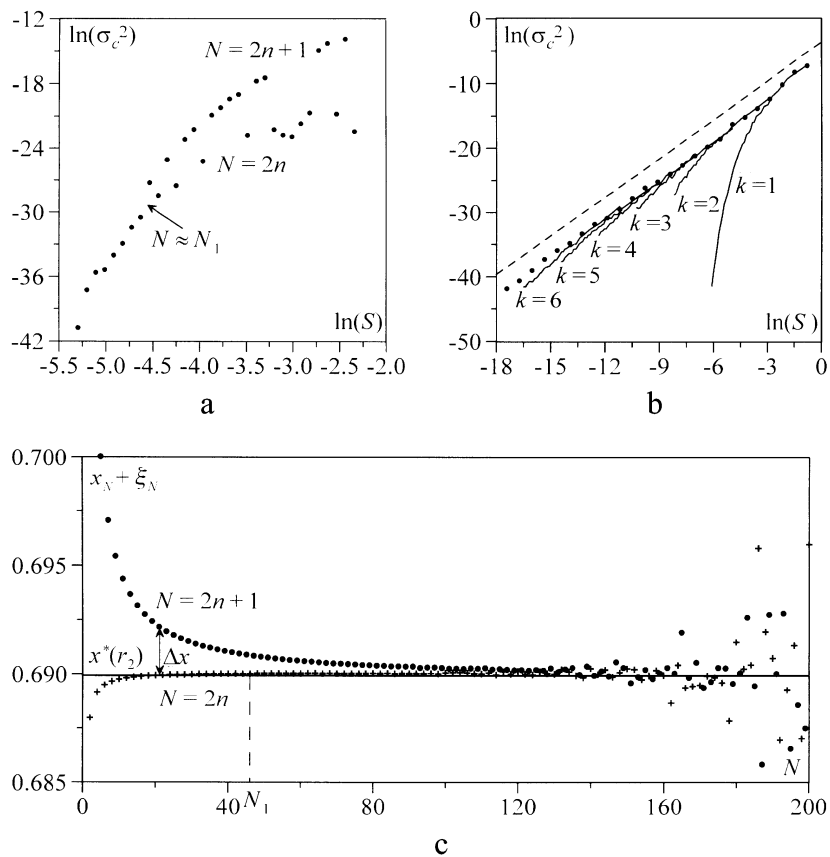


Рис. 2. Зависимости для отображения (2): *a* — логарифма критического уровня шума $\ln(\sigma_c^2)$ от логарифма скорости изменения управляющего параметра $\ln(S)$ при большом Δr ; *b* — логарифма критического уровня шума $\ln(\sigma_c^2)$ от логарифма скорости изменения управляющего параметра $\ln(S)$ при нечетных N для различных значений Δr , штриховая линия соответствует аналитической оценке (8); *c* — значений величин $(x_N + \xi_N)$ и x^* при $r = r_2$ от количества шагов N по параметру при фиксированном Δr .

соответствии с динамическими закономерностями величина $(x_N + \xi_N)$ на каждом следующем шаге итерации оказывается по разные стороны от границы x^* — становится более вероятным то одно, то другое конечное состояние (результат — разделение четных и нечетных точек в правой части рис. 2, *a*). При $N > N_1$, когда колеблющиеся значения $(x_N + \xi_N)$ оказываются по одну сторону от границы, четность N не влияет на зависимость $\sigma_c^2(S)$. При дальнейшем увеличении N развившиеся на второй стадии перехода флуктуации повышают роль случая — вероятность конечных состояний выравнивается.

Смещение $\langle x_N + \xi_N \rangle$ с границы в область притяжения одного из конечных состояний, делающее его более вероятным, определяется видом отображения и параметрами быстрого перехода. Так, в отображении (4) $\gamma = 0$ положение границы областей конечных состояний x^* не зависит от r , при $x_0 = x^*$ не меняется и $\langle x_N + \xi_N \rangle = x^*$. При этом симметрично распределенный шум равновероятно "подталкивает" систему к обоим возможным путям эволюции при любом N . В общем случае при $\gamma \neq 0$, которому соответствуют отображения (2), (3), (5), (6), смещение $\langle x_N + \xi_N \rangle$ присутствует и нарушение симметрии имеет место.

г) На рис. 2, *b* штриховой линией приведена оценка вида зависимости $\sigma_c^2(S)$, сделанная для малых Δr в предположении линейности $x^*(r)$ (т.е. $\gamma = \text{const}$). Для случая $N = 1$ величина смещения $\langle x_N + \xi_N \rangle - x^* = \Delta x = S\gamma$. Тогда вероятность "выпадения" заданного состояния в случае нормально распределенного шума с нулевым средним

$$p_1 = \int_{-\infty}^{\Delta x} \rho(\xi) d\xi = \frac{1}{2} \left[1 + \text{erf} \left(\frac{S\gamma}{\sigma\sqrt{2}} \right) \right], \quad (8)$$

где $\rho(\xi)$ — плотность распределения вероятности шума. Функция ошибок $\text{erf}(S\gamma/(\sigma_c 2^{1/2})) = 1/2$ при критическом для определения варианта перехода значении $p_1 = 0.75$, что соответствует $S\gamma/(\sigma_c 2^{1/2}) \approx 0.477$. Видно, что на рис. 2, *b* наклоны расчетных зависимостей $\ln(\sigma_c^2)(\ln(S))$, которым соответствуют малые значения Δr , и зависимость от $\ln(S)$ положения точек, соответствующих $N = 1$, близки к оценочной прямой.

4. Феномен нарушения вероятностной симметрии конечных состояний при быстрой бифуркации удвоения периода в исследованных дискретных моделях определяется "движением" границ областей при-

тяжения различных конечных состояний в фазовом пространстве при изменении управляющего параметра. При этом значения уровня шума, соответствующие условной границе разделения "динамического" и "стохастического" вариантов бифуркационного перехода, определяются свойствами модельного отображения, а предсказанная в [3] степенная зависимость от управляющего параметра в общем случае имеет место лишь в малой окрестности бифуркационного значения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 99-02-17735 и 00-02-17441.

Список литературы

- [1] Гольданский В.И., Кузьмин В.В. // УФН. 1989. Т. 157. В. 1. С. 3-50.
- [2] Желудев И.Н. // УФН. 1989. Т. 157. В. 4. С. 683-717.
- [3] Бутковский О.Я., Браш Дж.С., Кравцов Ю.А., Суровяткина Е.Д. // ЖЭТФ. 1996. Т. 109. В. 6. С. 2201-2207.
- [4] Бутковский О.Я., Кравцов Ю.А., Суровяткина Е.Д. // ЖЭТФ. 1997. Т. 112. В. 5. С. 1-12.
- [5] Астахов В.В., Безручко Б.П., Пудовочкин О.Б., Селезнев Е.П. // Радиотехника и электроника. 1993. Т. 38. № 2. С. 291-295.