

01;04

Моделирование дрейфового резонанса и запираания частиц в тороидальной магнитной ловушке на основе уравнения движения Ньютона–Лоренца и системы дрейфовых уравнений

© Э.И. Полуновский

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина

Поступило в Редакцию 20 января 2000 г.

Исследованы дрейфовый резонанс заряженной частицы, которая движется в тороидальном винтовом магнитном поле, с магнитным возмущением и явление запираания частицы на неоднородности тороидального винтового магнитного поля. Проведено сравнение двух подходов: решения системы дрейфовых уравнений и точных уравнений Ньютона–Лоренца. Показано, что при описании дрейфового резонанса имеется хорошее количественное соответствие двух подходов; при описании движения запертой частицы имеется качественное согласие. Подход с использованием точных уравнений открывает ряд новых сторон явления запираания частицы, что может быть важно для построения коэффициентов неоклассического переноса.

1. Введение. Поведение заряженной частицы в изменяющихся пространственно-неоднородных магнитных и электрических полях можно анализировать с помощью аналитических и численных методов. Оба подхода имеют свои достоинства и недостатки. Аналитический подход к решению уравнений движения позволяет достичь общности понимания процесса, однако в случае сложной конфигурации полей эта общность

достигается за счет большого числа приближений. Таким образом, могут быть потеряны важные и интересные частные решения. Численный подход помогает рассматривать именно частные решения, а получаемые при этом эмпирические закономерности стимулируют аналитические исследования, т.е. оба подхода — аналитический и численный — дополняют друг друга.

Численные исследования базируются на теоретических моделях явления и численных методах. Модели и методы выбираются из расчета оптимальности соотношения экономичность вычислений — точность результатов. Применение различных моделей и методов позволяет сделать оценку достоверности получаемых результатов, что является очень важным при численных исследованиях.

В данной работе проводится сравнение численных решений уравнений движения заряженной частицы в тороидальном винтовом магнитном поле в различных приближениях и для разных частных случаев. Используются модели — уравнения движения Ньютона–Лоренца и дрейфовые уравнения движения [1]. Метод численного решения дифференциальных уравнений — конечно-разностный метод Адамса (схема РЕСЕ) [2].

2. Уравнение Ньютона–Лоренца и система дрейфовых уравнений. Поведение заряженной частицы в электромагнитном поле подчиняется уравнению Ньютона–Лоренца

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{V}\mathbf{B}], \quad (1)$$

которое вытекает из самых общих физических принципов и в рамках классической механики является точным [3].

В случае произвольной зависимости электрического и магнитного поля от времени и пространственных координат данное уравнение не удастся аналитически проинтегрировать, поэтому, для того чтобы получить обозримые результаты, приходится использовать различные приближения, например дрейфовое.

Дрейфовое приближение заключается в использовании метода усреднения точного уравнения движения (1), который был предложен Н.М. Крыловым и Н.Н. Боголюбовым [4] в предположении малости ларморовского радиуса по сравнению с масштабом неоднородности поля и малости частоты изменения поля по сравнению с ларморовской частотой, а также в предположении малости электрического поля [1]. Вследствие усреднения из рассмотрения исключаются быстрые лар-

морфовские осцилляции частицы, и уравнения движения при условии $[\nabla \mathbf{B}] = 0$ принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= V_{\parallel} \frac{\mathbf{B}}{B} + \frac{c}{B^2} [\mathbf{E}\mathbf{B}] + \frac{m_j c (2V_{\parallel}^2 + V_{\perp}^2)}{2eB^3} [\mathbf{B}\nabla B], \\ \frac{dW}{dt} &= e\mathbf{E} \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{m_j V_{\perp}^2}{2B} \frac{\partial B}{\partial t}, \\ \frac{d\mu}{dt} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор ведущего центра частицы, W — кинетическая энергия частицы, V_{\parallel} и V_{\perp} — параллельная и перпендикулярная к магнитному полю составляющие скорости частицы, m_j и e — масса и заряд частицы, μ — поперечный адиабатический инвариант.

Реализация численного решения системы (2) сложнее, чем уравнения (1), однако экономичность вычислений при использовании дрейфового приближения значительно выше. Последнее верно, так как в дрейфовом приближении нет необходимости учитывать ларморовское движение частицы, и, таким образом, шаг вычисления намного больше, чем в случае решения точных уравнений (рис. 1). Частица движется в винтовом магнитном поле тороидальной ловушки-торсатрона с $L = 3$ [5]. Мелкие витки на рисунке справа внизу соответствуют ларморовскому движению частицы. На верхних рисунках показана часть траектории пролетной частицы, часто именуемой серпантинном. На нижних рисунках приведены увеличенные фрагменты траектории частицы.

Показана достоверность результатов, которые получены при решении системы дрейфовых уравнений (2), в сравнении с результатами численного решения точного уравнения (1).

Далее рассматриваются обе модели движения частицы в электромагнитном поле — точные уравнения и дрейфовые уравнения — в приложении к магнитным полям тороидальных термоядерных ловушек-торсатронов. Исследуются важные физические явления: дрейфовый резонанс заряженной частицы, которая движется в тороидальном винтовом магнитном поле, с магнитным возмущением [5] и явление запираения частицы на неоднородности тороидального винтового магнитного поля.

3. Дрейфовый резонанс. При рассмотрении движения заряженной частицы в тороидальном винтовом магнитном поле можно заметить,

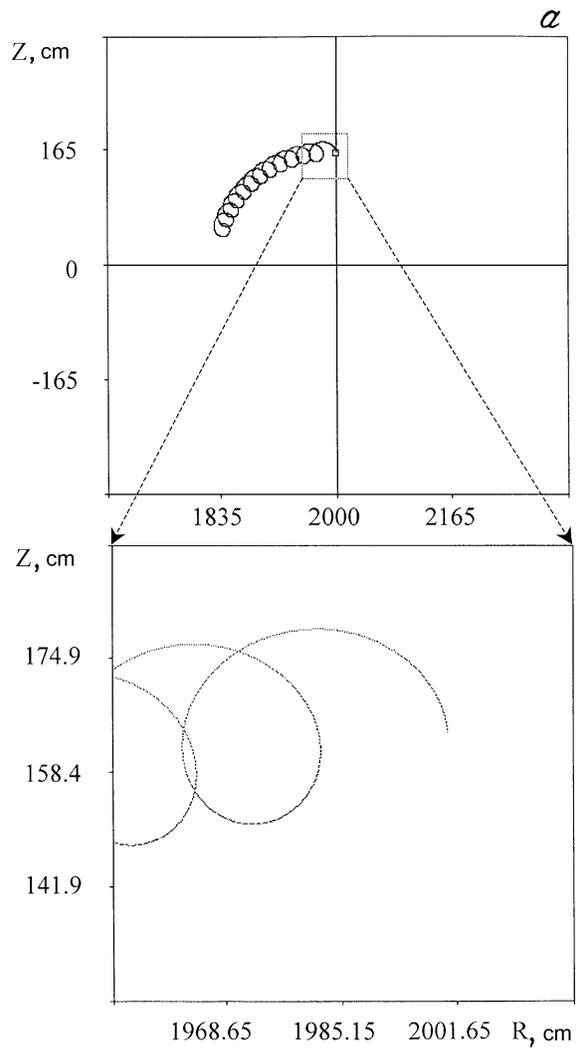


Рис. 1. Проекция траектории заряженной частицы на меридиональное сечение тора, которая получена при решении системы дрейфовых уравнений (*a*) и уравнения Ньютона–Лоренца (*b*).

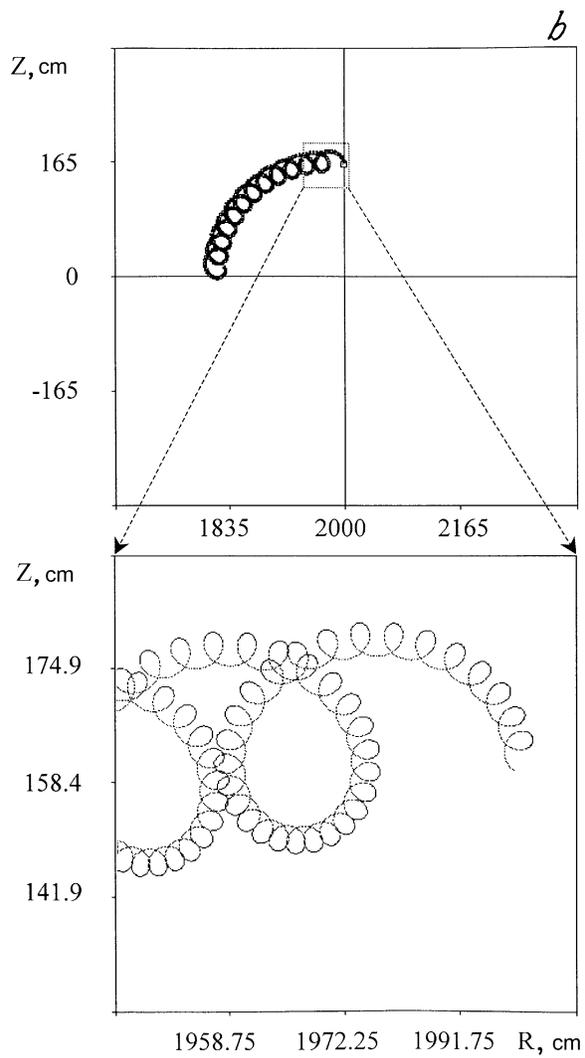


Рис. 1 (продолжение).

что в дрейфовом приближении уравнения движения представляют собой уравнения нелинейного осциллятора и роль собственной частоты играет дрейфовый угол прокручивания частицы на периоде тора. Причем траектория частицы заполняет некоторую тороидальную поверхность.

При наличии винтового магнитного возмущения, когда пространственная частота магнитного возмущения кратна собственной частоте нелинейного осциллятора, возникает резонанс. Он проявляется в возникновении винтовой трубки, которая образована траекторией частицы и лежит на тороидальной поверхности. В меридиональном сечении тора эта трубка видна как совокупность островов. Эти острова названы дрейфовыми.

Может возникнуть вопрос: проявляется ли резонанс при решении точного уравнения движения (1) или он возникает вследствие применения дрейфового приближения? Результаты численного моделирования движения частицы с использованием уравнения Ньютона–Лоренца свидетельствуют о том, что резонанс заряженной частицы, которая движется в винтовом магнитном поле, с винтовым возмущением действительно имеет место (рис. 2). С помощью численного решения уравнения (1) исследовано более тонкое явление — ”движение дрейфового острова” при изменении амплитуды винтового магнитного поля [5] и с учетом кулоновского взаимодействия частиц в термоядерной плазме (рис. 3) [6]. Кулоновское взаимодействие пробных частиц с частицами плазмы происходит при плотности и температуре плазмы в центре магнитной конфигурации 10^{14} cm^{-3} и 10 keV соответственно.

Исследование проводилось для различных значений и профилей плотности плазмы и при разных частотах изменения винтового магнитного поля. Получено хорошее согласие между результатами численного решения уравнения (1) и системы (2).

4. Запертые частицы. Частица с малым параметром отношения продольной к магнитному полю компоненты скорости к полной скорости частицы V_{\parallel}/V при движении вдоль тора испытывает отражения от областей сильного магнитного поля. Это так называемая запертая частица. По виду дрейфовой траектории различают частицы, запертые на тороидальной неоднородности и на винтовой неоднородности тороидального винтового магнитного поля.

Интересно провести сравнение траекторий запертой частицы, которые получены в результате решения точных уравнений (1) и приближенной системы (2) (рис. 4). На рис. 4, *b* (снизу) представлен

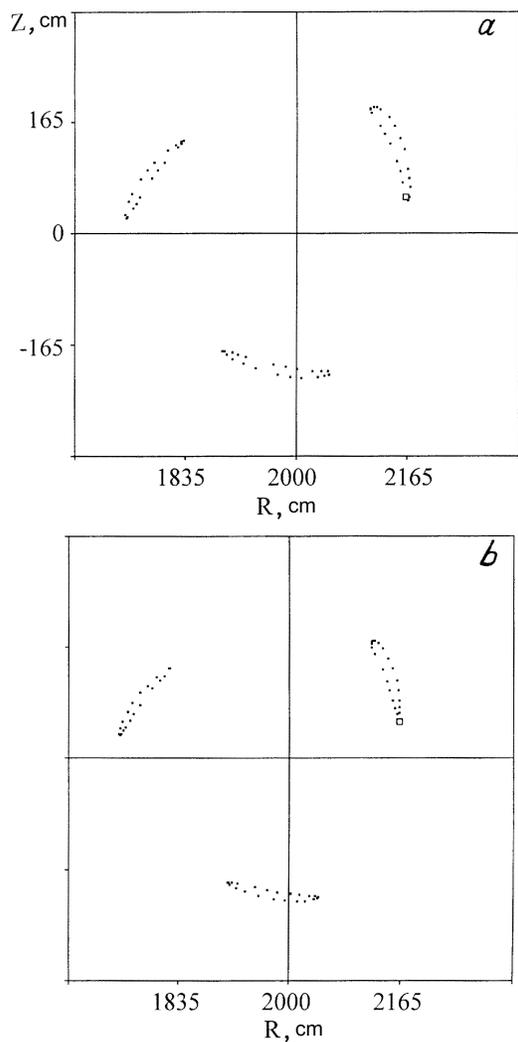


Рис. 2. Следы траектории заряженной частицы в меридиональном сечении тора — дрейфовые острова с дрейфовым углом прокручивания $l^* = 1/3$. Результат решения системы дрейфовых уравнений (*a*) и уравнения Ньютона–Лоренца (*b*).

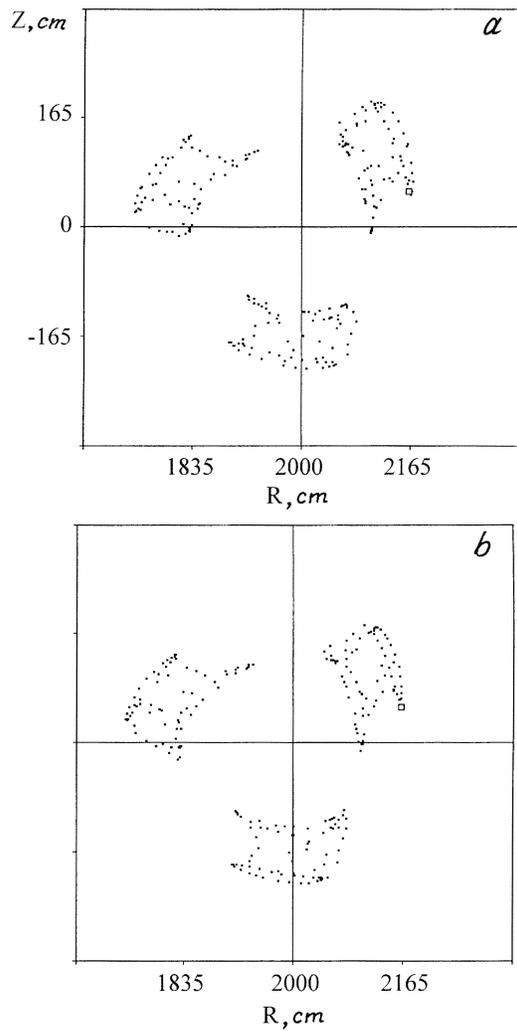


Рис. 3. Следы траектории заряженной частицы в меридиональном сечении тора — процесс “движения дрейфового острова” в винтовом тороидальном магнитном поле, амплитуда которого меняется во времени с частотой 950 Hz. Результат решения системы дрейфовых уравнений (a) и уравнения Ньютона–Лоренца (b).

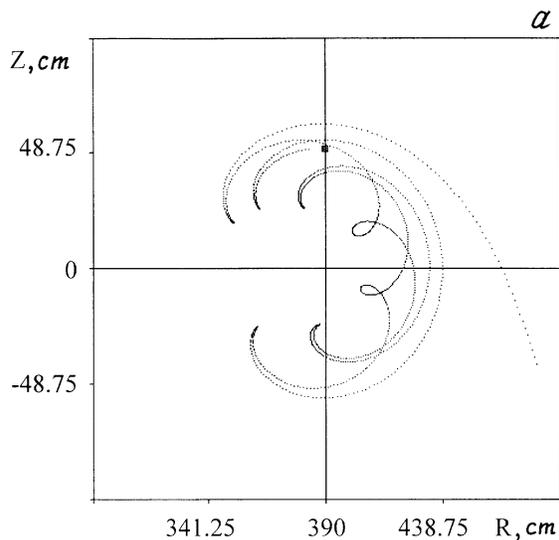


Рис. 4. Проекция траектории заряженной частицы, которая заперта на тороидальной неоднородности винтового магнитного поля, на меридиональное сечение тора. Результат получен при решении системы дрейфовых уравнений (а) и уравнения Ньютона–Лоренца (б). I — точки отражения (б).

увеличенный фрагмент траектории (серпантина) и отмечены точки отражения частицы от областей сильного магнитного поля. Заметно, что траектории, которые получены с помощью решения (1) и (2), имеют лишь качественное сходство. Это является следствием, во-первых, дрейфового приближения, и, во-вторых, невозможности точного согласования начальных скоростей для задач (1) и (2) ($V_{\parallel}^0, V_{\perp}^0 \Rightarrow V_r^0, V_{\vartheta}^0, V_{\phi}^0$), т. е. дрейфовое приближение обобщает класс частных решений с различными направлениями поперечной компоненты начальной скорости \mathbf{V}_{\perp}^0 , а для случая запертых частиц такие частные решения различаются.

5. Заключение. Из проведенного исследования следуют такие выводы.

1. Дрейфовый резонанс заряженной частицы, которая движется в винтовом магнитном поле, с винтовым магнитным возмущением имеет место, когда для моделирования используются точные уравнения

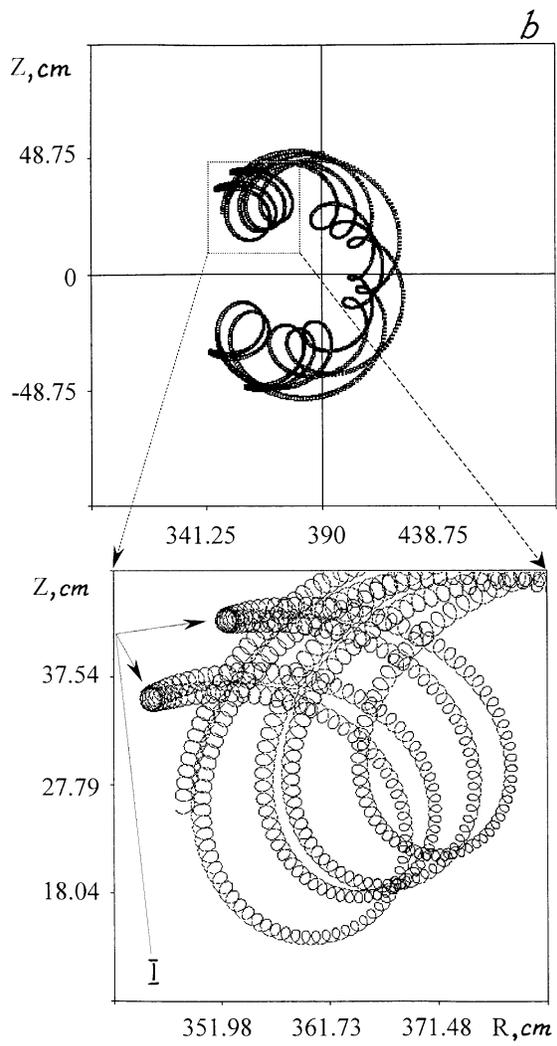


Рис. 4 (продолжение).

движения Ньютона–Лоренца. Таким образом, дрейфовый резонанс не является побочным следствием дрейфового приближения.

2. Дрейфовое приближение является достаточно хорошим для описания эффекта ”движение дрейфового острова” в изменяющемся винтовом магнитном поле с учетом кулоновского взаимодействия частиц в плазме термоядерной ловушки.

3. Получено качественное согласие результатов решения уравнения Ньютона–Лоренца и системы дрейфовых уравнений для случая запертой частицы. Для численного исследования движения запертых частиц предпочтительным является точное уравнение Ньютона–Лоренца, так как при его решении достигаются точные количественные результаты. Методическая ценность использования точного уравнения Ньютона–Лоренца для моделирования состоит в том, что по сравнению с дрейфовым приближением не теряются частные решения, которые могут быть важны. Полученные результаты указывают на необходимость уточнения коэффициентов неклассического переноса, вычисляемых с учетом отклонения орбит запертых частиц.

Список литературы

- [1] *Morozov A.I., Solov'ev L.S.* // *Reviews of Plasma Physics* / Ed. by acad. M.A. Leontovich. New York, 1966. V. 2. P. 201–297.
- [2] *Modern Numerical Methods of Ordinary Differential Equations* / Ed. by G. Holl, G. Watt. Oxford: Clarendon Press, 1976.
- [3] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. М.: Наука, 1988.
- [4] *Боголюбов Н.Н., Миропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматгиз, 1963.
- [5] *Шишкин А.А., Мотояма О., Полуновский Э.И.* // *Письма в ЖТФ*. 1999. Т. 25. В. 2. С. 5–13.
- [6] *Шишкин А.А., Мотояма О., Полуновский Э.И.* // *Письма в ЖТФ*. 1999. Т. 25. В. 18. С. 19–27.