

01;05.3

## Самоорганизация критического состояния и $1/f$ -флуктуации при взаимодействии фазовых переходов в распределенной системе

© В.Н. Скоков, В.П. Коверда

Институт теплофизики УрО РАН, Екатеринбург  
E-mail: skok@itp.e-burg.su

Поступило в Редакцию 5 мая 2000 г.

Предложена математическая модель возникновения флуктуаций со спектральной плотностью, обратно пропорциональной частоте, при пересечении фазовых переходов в пространственно неоднородной системе. Модель представляет собой систему двух нелинейных стохастических дифференциальных уравнений с взаимодействующими параметрами порядка. Показано, что случайные блуждания в модельном потенциале, соответствующем пересекающимся докритическому и закритическому фазовым переходам, могут приводить к самоорганизации критического состояния и флуктуациям с  $1/f$ -спектром.

Флуктуационные процессы, спектр мощности которых изменяется обратно пропорционально частоте (фликкер- или  $1/f$ -шум), наблюдаются в процессах различной природы [1–3]. Несмотря на многолетние усилия, до сих пор отсутствует общепринятая картина данного явления, и зачастую не ясны механизмы, приводящие к флуктуациям с  $1/f$ -спектром. Поэтому актуальными остаются вопросы о поиске новых систем с фликкер-шумом и построение новых моделей этого явления.

Интерес к случайным процессам с расходящимися спектральными характеристиками резко возрос в последнее время в связи с открытием явления самоорганизованной критичности [4]. При самоорганизованной критичности система приходит к критическому поведению в процессе своей эволюции и не нуждается в тонкой подстройке управляющих параметров.

Низкочастотная расходимость спектральной плотности флуктуаций свидетельствует об отсутствии характерного временного масштаба процесса с фликкерным спектром. Это позволяет предположить, что

система находится в окрестности критического фазового перехода. В работах [5–7] нами были экспериментально обнаружены флуктуации с  $1/f$ -спектром при смене режимов кипения азота на поверхности тонких пленок высокотемпературных сверхпроводников в условиях джоулева саморазогрева. В работе [8] были экспериментально обнаружены термические флуктуации с  $1/f$ - и  $1/f^2$ -спектрами при пленочном кипении воды на вертикально ориентированном проволочном нагревателе, отмечено сходство исследованного процесса с явлением самоорганизованной критичности. Для объяснения экспериментальных результатов была предложена математическая модель [6,7], описывающая неравновесные фазовые переходы в сосредоточенной системе, которая представляет собой систему двух нелинейных стохастических уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{\phi} &= -\phi\psi^2 + \psi + \Gamma_1(t), \\ \dot{\psi} &= -\psi\phi^2 + \gamma\phi + \Gamma_2(t),\end{aligned}\quad (1)$$

где  $\phi$  и  $\psi$  — взаимодействующие параметры порядка,  $\Gamma_1(t)$ ,  $\Gamma_2(t)$  — гауссовские  $\delta$ -коррелированные шумы.

Особенностью данной модели является то, что стохастические уравнения, описывающие процесс, содержат непотенциальные слагаемые ( $\gamma > 1$ ), учитывающие наличие внешних потоков. Данная система преобразует белый шум в два стохастических процесса со спектральными плотностями, пропорциональными  $1/f$  и  $1/f^2$ . В [9] предложена потенциальная точечная система, дающая схожие результаты. В настоящей работе рассматривается возникновение флуктуаций параметров порядка с  $1/f$ -спектром в пространственно распределенных потенциальных системах.

Будем считать, что пространственно-временная эволюция процесса описывается двумя одномерными стохастическими уравнениями диффузионного типа:

$$\begin{aligned}\partial\phi/\partial t &= D_1\partial^2\phi/\partial x^2 + Q_1(\phi, \psi) + \Gamma_1(x, t), \\ \partial\psi/\partial t &= D_2\partial^2\psi/\partial x^2 + Q_2(\phi, \psi) + \Gamma_2(x, t),\end{aligned}\quad (2)$$

где  $D_1$ ,  $D_2$  — коэффициенты диффузии,  $\Gamma_1(x, t)$ ,  $\Gamma_2(x, t)$  —  $\delta$ -корреляционные случайные силы. Система (2) является достаточно общей и описывает неравновесные фазовые переходы во многих физических и

химических системах. Рассмотрим случай, когда характерные пространственные масштабы изменения параметров порядка сильно различаются, т.е.  $D_1/D_2 \gg 1$ . Аппроксимируем функции источника, характеризующие взаимодействие параметров порядка, как и в [6,7], выражениями:  $Q_1(\phi, \psi) = -\phi\psi^2 + \psi$ ,  $Q_2(\phi, \psi) = -\psi\phi^2 + \phi$ . В этом случае система стохастических уравнений принимает вид:

$$\begin{aligned} \partial\phi/\partial t &= D_1\partial^2\phi/\partial x^2 - \phi\psi^2 + \psi + \Gamma_1(x, t), \\ \partial\psi/\partial t &= -\psi\phi^2 + \phi + \Gamma_2(x, t). \end{aligned} \quad (3)$$

Система (3) описывает случайные блуждания в потенциале:

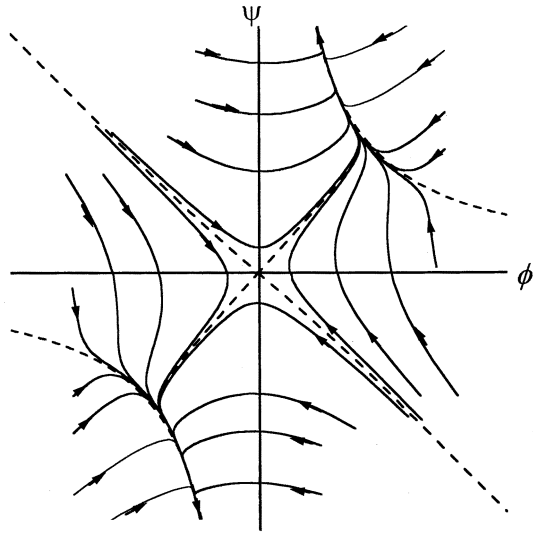
$$\Phi = \Phi_0 + \int \left\{ \frac{1}{2}\phi^2\psi^2 - \phi\psi + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 \right\} dx. \quad (4)$$

Функция  $\Phi(\phi, \psi)$  в нуле имеет седловую точку. В отсутствие неоднородности ( $\nabla\phi = 0$ ) имеются также линии стационарных точек, определяемые условием  $\phi\psi = 1$ . При появлении неоднородности параметра  $\phi$ , гиперболы  $\phi\psi = 1$  наклоняются в сторону увеличения параметра  $\psi$ . На рис. 1 приведен фазовый портрет системы, полученный численным интегрированием системы (3) без случайных источников ( $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 0$ ). Пунктирными линиями на рис. 1 показаны сепаратрисы. Данная система имеет асимптотическое решение в виде степенных зависимостей:  $\phi \rightarrow t^{-1/4}$  и  $\psi \rightarrow t^{1/4}$  при  $t \rightarrow \infty$  (в отличие от точечной непотенциальной системы (1), которая дает асимптотики:  $\phi \rightarrow t^{-1/2}$  и  $\psi \rightarrow t^{1/2}$  при  $t \rightarrow \infty$ ).

Физический смысл потенциала (4) легко раскрыть, если провести линейное преобразование к новым переменным:  $\theta = (\psi - \phi)/\sqrt{2}$ ,  $\eta = (\phi + \psi)/\sqrt{2}$ , которое соответствует повороту фазовой плоскости на угол  $\pi/4$  и не меняет типа потенциальной поверхности. В новых переменных выражение для потенциала примет вид:

$$\begin{aligned} \Phi(\theta, \eta) &= \int \left\{ \frac{1}{8}\theta^4 + \frac{1}{8}\eta^4 + \frac{1}{2}\theta^2 - \frac{1}{2}\eta^2 + \frac{1}{2}(\nabla\theta)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}(\nabla\eta)^2 - \frac{1}{4}\theta^2\eta^2 - \nabla\theta\nabla\eta \right\} dx. \end{aligned} \quad (5)$$

Из структуры выражения (5) видно, что потенциал  $\Phi(\theta, \eta)$  соответствует пересечению двух фазовых переходов с параметрами порядка  $\theta$  и  $\eta$ .



**Рис. 1.** Фазовый портрет динамической системы, усредненной по пространственной переменной.

Различные знаки перед квадратами параметров порядка означают, что мы имеем дело с пересечением докритического и закритического фазовых переходов. Последние два слагаемых в (5) характеризуют взаимодействие параметров порядка. Отрицательность коэффициентов перед членом  $\theta^2 \eta^2$ , описывающим взаимодействие, соответствует отсутствию ненулевых стационарных решений в чисто динамической (бесшумовой) системе.

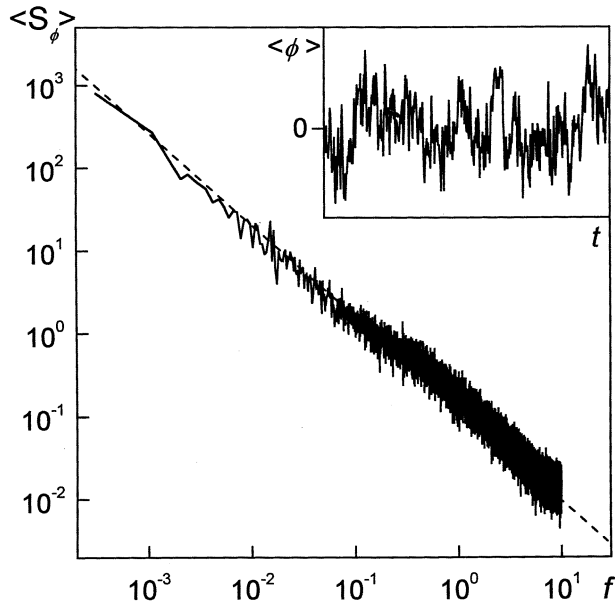
Для получения численных решений использовалась явная схема интегрирования. В качестве пространственно распределенного белого шума выбирались последовательности гауссовских случайных чисел. Управляющими параметрами служили интенсивности случайных источников и коэффициент диффузии. При небольшой интенсивности шума решения системы (3) имели вид слегка зашумленных релаксационных зависимостей  $\phi(t)$  и  $\psi(t)$ , т. е. система совершала случайные блуждания вдоль одной из долин потенциала  $\Phi(\phi, \psi)$  в зависимости от начальных условий. При этом процесс был нестационарен. С увеличением

интенсивности случайных источников начинались переброся из одной долины в другую. Процесс становился стационарным (по крайней мере, по первым двум моментам функции распределения параметра  $\phi$  и при конечных шагах интегрирования). Переход к стационарному процессу обусловлен тем, что внешние случайные силы не дают системе слишком далеко продвинуться вдоль сужающихся долин потенциала  $\Phi(\phi, \psi)$ . Функции распределения переменных  $\phi(t)$  и  $\psi(t)$  имели симметричную куполообразную форму и хорошо аппроксимировались гауссовским распределением.

По вычисленным реализациям переменных методом Фурье-преобразования были найдены спектральные плотности флуктуаций. Оказалось, что в достаточно широких интервалах изменения коэффициента диффузии  $D_1$  и интенсивности случайных источников спектральная плотность флуктуаций  $S_\phi$  параметра  $\phi$  изменялась обратно пропорционально частоте. Одновременно с этим, частотная зависимость спектра  $S_\psi$  была обратно пропорциональна квадрату частоты. На рис. 2 приведена частотная зависимость спектральной плотности  $S_\phi(f)$ , полученная усреднением спектров по пространству. Необходимо отметить, что спектры флуктуаций переменной  $\phi$  в каждой пространственной точке также имели характерный  $1/f$ -вид. На том же рис. 2 приведена соответствующая реализация, усредненная по пространству. Численные данные на рис. 2 получены на 65 540 временных и 32 пространственных шагах интегрирования, при  $dt = 0.05$ ,  $dx = 0.8$ , коэффициенте диффузии  $D_1 = 0.4$ , интенсивности случайных источников  $\sigma = 3$ , нулевых начальных и граничных условиях.

Из рис. 2 видно, что  $1/f$ -поведение прослеживается в частотном интервале более четырех десятичных порядков. Данный интервал можно увеличить и проследить дальше расходящуюся низкочастотную асимптотику, если с увеличением числа шагов интегрирования в  $n$  — уменьшить шаг интегрирования по времени с одновременным увеличением интенсивности случайных источников в  $\sqrt{n}$  раз. Спектр параметра  $\psi$  имел вид  $S_\psi(f) \sim 1/f^2$ .

Следует отметить, что описанные выше результаты соответствуют случаю, когда один из коэффициентов диффузии (в данном случае  $D_2$ ) равен нулю. Проведенный численный анализ показал, что с увеличением  $D_2$  от 0 до  $D_1$  в зависимостях  $S_\phi(f)$  и  $S_\psi(f)$  появляются горизонтальные полки в области низких частот, характерные для лоренцовских спектров. В случае равенства коэффициентов диффузии параметры  $\phi$  и  $\psi$



**Рис. 2.** Спектральная плотность флуктуаций параметра  $\phi$ , усредненная по пространству —  $\langle S_\phi \rangle$  и соответствующая усредненная реализация —  $\langle \phi \rangle$ . Пунктирная линия — зависимость  $\langle S_\phi \rangle \sim 1/f^{1.09}$ .

совпадают, и система (3) эквивалентна уравнению Гинзбурга–Ландау для фазового перехода первого рода с одним параметром порядка.

Расходимость спектральных характеристик флуктуаций, как и степенной характер релаксационных зависимостей, свидетельствуют о критическом поведении системы. Такое поведение наблюдается в широкой области управляющих параметров не нуждается в их тонкой подстройке. Система оказывается в критическом состоянии в результате пересечения и взаимодействия неравновесных докритического и закритического фазовых переходов. В этом смысле можно говорить о самоорганизации критического состояния.

Таким образом, случайные блуждания в двухдолинном потенциале с сильно различающимися коэффициентами диффузии приводят к возникновению флуктуаций с  $1/f$ -спектром. Пересечение и взаимодействие

двух неравновесных фазовых переходов, как и процессы, описываемые системой реакционно-диффузионных уравнений (2), являются достаточно распространенным явлением. По этой причине предложенная модель может быть использована для объяснения  $1/f$ -шума в широком классе процессов и дает новый взгляд на самоорганизованную критичность.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 00-02-16288).

## Список литературы

- [1] Коган Ш.М. // УФН. 1985. Т. 145. В. 2. С. 285–328.
- [2] Жигальский Г.П. // УФН. 1997. Т. 167. В. 6. С. 624–648.
- [3] Климонтович Ю.Л. Статистическая теория открытых систем. М.: Янус, 1995. 623 с.
- [4] Vak P., Tang C., Wiesenfeld K. // Phys. Rev. A. 1988. V. 38. N 1. P. 364–374.
- [5] Коверда В.П., Скоков В.Н., Скрипов В.П. // Письма в ЖЭТФ. 1996. Т. 63. В. 9. С. 739–742.
- [6] Коверда В.П., Скоков В.Н., Скрипов В.П. // ЖЭТФ. 1998. Т. 113. В. 5. С. 1748–1757.
- [7] Koverda V.P., Skokov V.N. // Physica A. 1999. V. 262. P. 376–382.
- [8] Скоков В.Н., Коверда В.П., Решетников А.В. // Письма в ЖЭТФ. 1999. Т. 69. В. 8. С. 590–593.
- [9] Скоков В.Н., Коверда В.П. // Письма в ЖТФ. 1999. Т. 25. В. 9. С. 9–14.