01;03

О делении на две части сильнозаряженной капли при нелинейных колебаниях

© С.О. Ширяева, А.И. Григорьев, Д.Ф. Белоножко

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

Поступило в Редакцию 23 марта 2000 г.

В нелинейном анализе показано, что при достаточно большой амплитуде начальной виртуальной деформации четной моды капли, имеющей заряд, чуть меньший критического, капля проявляет тенденцию к делению на две равные части.

Исследование закономерностей деления сильно заряженной капли при реализации ее неустойчивости по отношению к собственному заряду проводилось неоднократно, и экспериментально, и теоретически (см., например, [1–3] и указанную там литературу). Как известно [1–5], в зависимости от вязкости капли ее распад может идти по разным каналам: путем сброса большого количества дочерних сильно заряженных капелек при малой вязкости и делением на две–три части сравнимых размеров при большой вязкости. Первый канал распада достаточно подробно исследован и экспериментально, и теоретически, чего нельзя сказать о втором канале (о делении капли на части сравнимых размеров). Так, не смотря на очевидную симметрию задачи о делении вязкой заряженной капли на две части при симметричной же виртуальной деформации, когда естественно ожидать, что дочерние капли будут иметь одинаковые размеры и заряды, теоретические работы [4,5], выполненные в линейной постановке, приводят к асимметричному распределению массы и заряда между дочерними каплями. В этой связи в настоящей работе проводится нелинейный анализ возможных тенденций к делению капель на две части. Отметим, что в [6,7] при нелинейном анализе капиллярных колебаний заряженной капли (аналитическом в [6] и численном в [7]) получены косвенные указания на возможность симметричного деления.

Пусть капля идеальной, идеально проводящей жидкости с плотностью ρ и коэффициентом поверхностного натяжения γ несет заряд Q. Примем, что в начальный момент времени отклонение формы капли от сферической определяется малым возмущением ε амплитуды n-й моды линейных капиллярных колебаний, а поле скоростей — нулевое. Объем исходной капли равен объему сферы радиуса R. Будем решать методом многих масштабов в квадратичном приближении по амплитуде начального возмущения равновесной сферической поверхности задачу о расчете формы осесимметричных капиллярных колебаний такой капли в безразмерных переменных, в которых $R = \rho = \gamma = 1$. Математическая формулировка задачи идентична использованной в [8].

В ходе рутинной, громоздкой процедуры определяются выражения, описывающие во втором порядке малости по параметру ε форму капли в любой момент времени при различных видах начального возмущения равновесной сферической формы (когда возмущение $\sim \varepsilon$ получают основная ($n = 2$), третья ($n = 3$), четвертая ($n = 4$) и пятая ($n = 5$) моды):

$$\begin{aligned} r = 1 &- \frac{\varepsilon^2}{5}\cos^2(\omega_2 t) + \varepsilon\cos(\omega_2 t)P_2(\mu) \\ &+ \frac{\varepsilon^2}{\omega_2^2}\Big(\chi_1 - (\chi_1 + \chi_2)\cos(\omega_2 t) + \chi_2\cos(2\omega_2 t)\Big)P_2(\mu) \\ &+ \frac{18}{35}\varepsilon^2\Big(\chi_3 - (\chi_3 + \chi_4)\cos(\omega_4 t) + \chi_4\cos(2\omega_2 t)\Big)P_4(\mu); \end{aligned} \qquad (1)$$

$$\begin{aligned} r = 1 &- \frac{\varepsilon^2}{7}\cos^2(\omega_3 t) + \varepsilon\cos(\omega_3 t)\cdot P_3(\mu) \\ &+ \frac{\varepsilon^2}{21\omega_2^2}\Big(\chi_5 + \chi_6\cos(\omega_2 t) - \chi_7\cos(2\omega_3 t)\Big)\cdot P_2(\mu) \\ &+ \frac{\varepsilon^2}{77\omega_4^2}\Big(\chi_8 + \chi_9\cos(\omega_4 t) + \chi_{10}\cos(2\omega_3 t)\Big)P_4(\mu) \\ &+ \frac{5\varepsilon^2}{231\omega_6^2}\Big(\chi_{11} + \chi_{12}\cos(\omega_6 t) + \chi_{13}\cos(2\omega_3 t)\Big)P_6(\mu); \end{aligned} \qquad (2)$$

$$\begin{aligned} r = 1 &- \frac{\varepsilon^2}{9}\cos^2(\omega_4 t) + \varepsilon\cos(\omega_4 t)\cdot P_4(\mu) \\ &+ \frac{25\varepsilon^2}{2772\omega_2^2}\Big(\chi_{14} + \chi_{15}\cos(\omega_2 t) - \chi_{16}\cos(2\omega_4 t)\Big)\cdot P_2(\mu) \end{aligned}$$

$$+\frac{108\varepsilon^2}{1001\omega_4^2}\Big(-\chi_{17}+\chi_{18}\cos(\omega_4 t)+\chi_{19}\cos(2\omega_4 t)\Big)P_4(\mu)$$

$$+\frac{15\varepsilon^2}{198\omega_6^2}\Big(\chi_{20}+\chi_{21}\cos(\omega_6 t)-\chi_{22}\cos(2\omega_4 t)\Big)P_6(\mu)$$

$$+\frac{35\varepsilon^2}{2574\omega_8^2}\Big(-\chi_{23}+\chi_{24}\cos(\omega_8 t)+\chi_{25}\cos(2\omega_4 t)\Big)P_8(\mu); \qquad (3)$$

$$r=1-\frac{\varepsilon^2}{11}\cos^2(\omega_7 t)+\varepsilon\cos(\omega_5 t)\cdot P_5(\mu)$$

$$+\frac{5\varepsilon^2}{2574\omega_2^2}\Big(\chi_{26}+\chi_{27}\cos(\omega_2 t)-\chi_{28}\cos(2\omega_5 t)\Big)P_2(\mu)$$

$$+\frac{6\varepsilon^2}{143\omega_4^2}\Big(\chi_{29}+\chi_{30}\cos(\omega_4 t)-\chi_{31}\cos(2\omega_5 t)\Big)P_4(\mu)$$

$$+\frac{4\varepsilon}{2805\omega_6^2}\Big(\chi_{32}+\chi_{33}\cos(\omega_6 t)-\chi_{34}\cos(2\omega_5 t)\Big)P_6(\mu)$$

$$+\frac{7\varepsilon^2}{8151\omega_8^2}\Big(\chi_{35}+\chi_{36}\cos(\omega_8 t)+\chi_{37}\cos(2\omega_5 t)\Big)P_8(\mu)$$

$$+\frac{441\varepsilon^2}{46189\omega_{10}^2}\Big(\chi_{38}+\chi_{39}\cos(\omega_{10} t)-\chi_{40}\cos(2\omega_5 t)\Big)P_{10}(\mu); \qquad (4)$$

$$\mu\equiv\cos(\theta);\quad W\equiv\frac{Q^2}{4\pi};\quad \omega_n^2\equiv n(n-1)[(n+2)-W];$$

$$\chi_1\equiv\frac{44-5W}{14};\quad \chi_2\equiv\frac{23W-116}{42};\quad \chi_3\equiv\frac{36-5W}{\omega_4^2};$$

$$\chi_4\equiv\frac{12+W}{4(10-W)};\quad \chi_5\equiv 2(44-3W);\quad \chi_6\equiv 4\frac{(3W^2+136W-784)}{(56-11W)};$$

$$\chi_7\equiv w_2^2\cdot\frac{(224-39W)}{(56-11W)};\quad \chi_8\equiv 12(101-4W);$$

$$\chi_9\equiv 24(251-59W+5W^2)\omega_2^{-2};\quad \chi_{10}\equiv 2(151-14W)\omega_2^{-2};$$

$$\chi_{11}\equiv 30(104-9W);\quad \chi_{12}\equiv 60\frac{(23W^2-68W-1120)}{(20-W)};$$

$$\chi_{13} \equiv 5\omega_6^2 \frac{(11W - 4)}{(20 - W)}; \quad \chi_{14} \equiv 26(22 - W); \quad \chi_{15} \equiv \frac{32}{(140 - 23W)};$$

$$\chi_{16} \equiv \omega_2^2 \cdot \frac{(2194 - 331W)}{(140 - 23W)}; \quad \chi_{17} \equiv 0.25(1236 + 3W); \quad \chi_{18} \equiv (4 + 17W);$$

$$\chi_{19} \equiv 0.25(602 - 65W); \quad \chi_{20} \equiv (610 - 11W);$$

$$\chi_{21} \equiv 240 \frac{(1010 - 37W - 3W^2)}{(8 - 3W)}; \quad \chi_{22} \equiv \omega_6^2 \frac{(526 + 3W)}{6(8 - 3W)};$$

$$\chi_{23} \equiv 56(220 - 13W); \quad \chi_{24} \equiv 28 \frac{(2620 + 796W - 95W^2)}{(34 - W)};$$

$$\chi_{25} \equiv \omega_8^2 \frac{7(32 - 29W)}{(34 - W)}; \quad \chi_{26} \equiv 6(524 - 17W);$$

$$\chi_{27} \equiv 20 \frac{(-12304 + 1688W + 5W^2)}{(92 - 13W)}; \quad \chi_{28} \equiv \omega_2^2 \frac{(5396 - 713W)}{(92 - 13W)};$$

$$\chi_{29} \equiv 12(36 + W); \quad \chi_{30} \equiv \frac{2(-738 - 151W + 34W^2)}{(122 - 17W)};$$

$$\chi_{31} \equiv \omega_4^2 \frac{36(162 - 17W)}{(122 - 17W)}; \quad \chi_{32} \equiv 30(1028 + 21W);$$

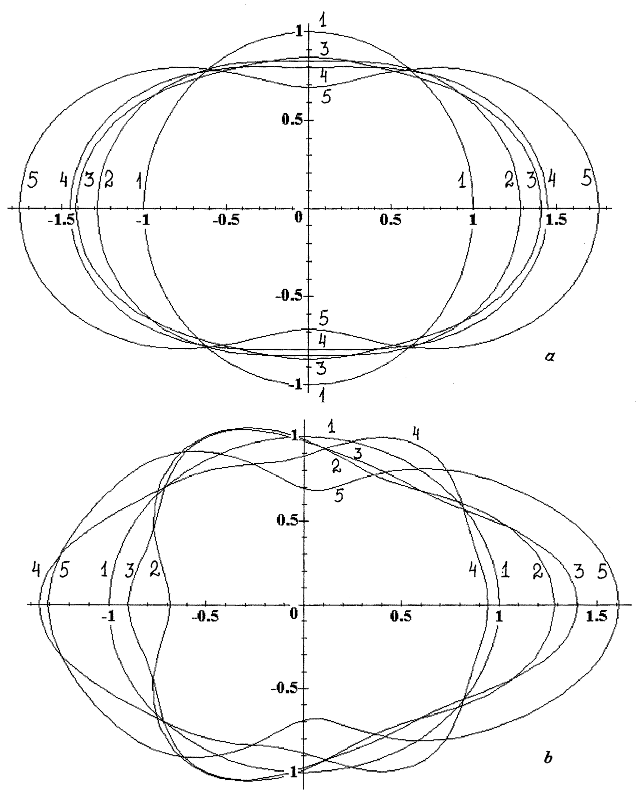
$$\chi_{33} \equiv \frac{60(6416 - 1876W + 209W^2)}{(32 - 5W)}; \quad \chi_{34} \equiv \omega_6^2 \frac{(5716 - 313W)}{(32 - 5W)};$$

$$\chi_{35} \equiv 56(724 - 7W); \quad \chi_{36} \equiv \frac{560(-2422 - 304W + 35W^2)}{W};$$

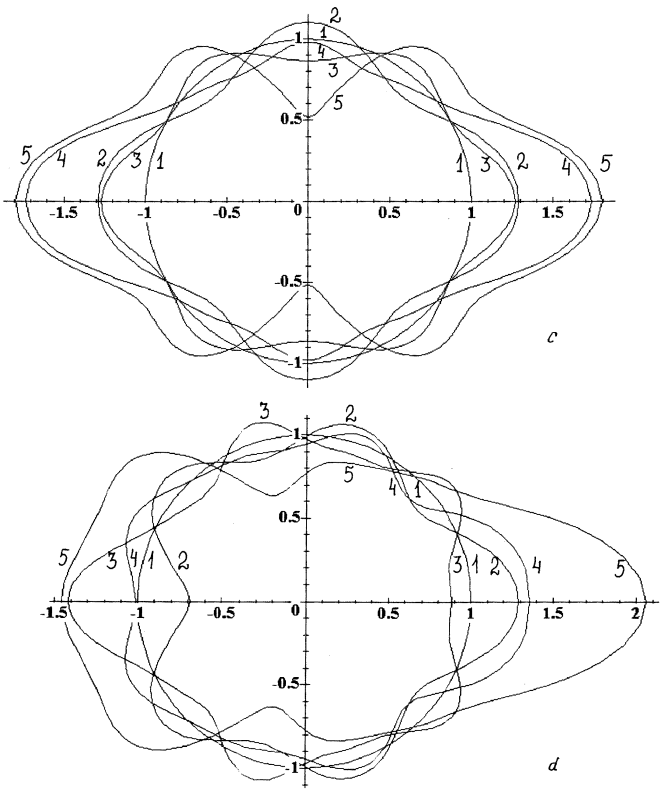
$$\chi_{37} \equiv \omega_8^2 \frac{7(346 + 47W)}{W}; \quad \chi_{38} \equiv 90(396 - 17W);$$

$$\chi_{39} \equiv \frac{180(-4464 - 2816W + 239W^2)}{(52 - W)}; \quad \chi_{40} \equiv \omega_{10}^2 \frac{9(108 - 55W)}{(52 - W)}.$$

На рисунке, a–d приведены рассчитанные по соотношениям (1)–(4) контуры форм капли (горизонтальная ось есть ось симметрии) в различные моменты безразмерного времени при значениях параметра Рэлея $W = Q^2/4\pi$, близких к критическому (критическое для начала неустойчивости сферической капли значение W определено как $W_* = 4$), когда начальное возмущение равновесной сферической формы задано



Контуры огибающей формы капли в различные моменты времени, когда начальное возмущение с амплитудой $\varepsilon = 0.3$ равновесной сферической формы задано в виде виртуального возмущения различных мод. Кривая *1* определяет равновесную сферическую форму; кривая *2* — форму в начальный момент времени (сферическую форму, деформированную возмущением вида $\varepsilon \cdot P_n(\cos\theta)$, $n = 2, 3, 4, 5$). *a* — $n = 2$; $W = 3.9$. Кривая *3* соответствует моменту времени $t = 0.14 \cdot \varepsilon^{-1}$; кривая *4* — моменту времени $t = 0.28 \cdot \varepsilon^{-1}$; кривая *5* — моменту времени $t = 0.56 \cdot \varepsilon^{-1}$. *b* — $n = 3$; $W = 3.8$. Кривая *3* соответствует моменту времени $t = 0.065 \cdot \varepsilon^{-1}$; кривая *4* — моменту времени $t = 0.26 \cdot \varepsilon^{-1}$; кривая *5* — моменту времени $t = 0.585 \cdot \varepsilon^{-1}$. *c* — $n = 4$; $W = 3.8$. Кривая *3* соответствует моменту времени $t = 0.24 \cdot \varepsilon^{-1}$; кривая *4* — моменту времени $t = 0.36 \cdot \varepsilon^{-1}$; кривая *5* — моменту времени $t = 0.57 \cdot \varepsilon^{-1}$. *d* — $n = 5$; $W = 3.8$. Кривая *3* соответствует моменту времени $t = 0.1 \cdot \varepsilon^{-1}$; кривая *4* — моменту времени $t = 0.2 \cdot \varepsilon^{-1}$; кривая *5* — моменту времени $t = 0.475 \cdot \varepsilon^{-1}$.



(*Продолжение рисунка*).

в виде возмущения 2-й, 3-й, 4-й и 5-й мод соответственно. Следует отметить, что область равномерной пригодности соотношений (1)–(4) в соответствии с представлениями теории возмущений определена условием $t < \varepsilon^{-1}$. На самом деле выписанное ограничение по времени t еще более жесткое, что видно из приведенных иллюстраций. Кривые с номером *4* на всех рисунках построены уже на границе применимости равномерного разложения. Это следует из сравнения амплитуд результирующих отклонений поверхности капли (кривые *4*) от ее формы в начальный момент времени (кривые *2*) и проявляется в очевидном несохранении первоначального объема для капель с образующими, обозначенными номером 4. Тем не менее, несложно видеть, что когда начальное возмущение равновесной формы определено четными полиномами Лежандра (см. рисунок), то образующая формы капли в любой момент времени строится из четных же полиномов и имеет симметричный относительно начала координат вид. При достаточно большом t (лежащем на границе интервала равномерности решения по t) капля проявляет тенденцию к делению на две равные части. Если же начальное возмущение связано с нечетными полиномами Лежандра (см. рисунок), то форма капли в любой последующий момент времени асимметрична относительно начала координат, несмотря на то что за счет взаимодействия мод во втором порядке малости по ε возбуждаются только четные моды. При больших t такая капля проявляет тенденцию к асимметричному делению. Из общефизических соображений очевидно, что учет вязкости, не принимавшейся во внимание в проведенном рассмотрении, будет приводить к затуханию всех мод. Однако декремент затухания высоких мод больше, чем у низких, и на достаточно большом временном интервале амплитуда первоначально возмущенной высокой нечетной моды может уменьшиться до нуля быстрее, чем амплитуды возбужденных ею более низких четных мод. Тогда дальнейшие колебания капли и ее возможное деление на две части будут симметричны.

Заключение. Симметричное деление неустойчивой сильно заряженной капли на две равные по зарядом и массам части должно иметь место. Неудачи аналитических и численных анализов, не обнаруживающих такого канала деления, по-видимому, связаны с грубостью используемых моделей. Из (1)–(4) видно, что независимо от симметрии начального возмущения колебания происходят не в окрестности сферы, а в окрестности некой, близкой к сфероиду фигуры, определяемой не зависящими от времени слагаемыми уравнений (1)–(4).

Список литературы

[1] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // ЖТФ. 1991. Т. 61. В. 3. С. 19–28.
[2] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.
[3] *Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2000. Т. 70. В. 5. С. 22–27.
[4] *Коромыслов В.А., Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // ЖТФ. 1998. Т. 68. В. 8. С. 31–38.

[5] *Щукин С.И., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2000. Т. 70. В. 4. С. 1–7.
[6] *Tsamopoulos J.A., Akilas T.R., Brawn R.A.* // Proc. Roy. Soc. London. 1985. V. A401. P. 67–88.
[7] *Pelekasis, Tsamopoulos J.A., Manolis G.D.* // Phys. Fluids. 1990. V. A 2. N 8. P. 1328–1340.
[8] *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* // Письма в ЖТФ. 1999. Т. 25. В. 15. С. 41–45.