

01

О возможности наблюдения эффекта Ааронова–Бома при нестационарных потенциалах

© А.Г. Чирков, А.Н. Агеев

С.-Петербургский государственный технический университет
Физико-технический институт РАН им. А.Ф. Иоффе, С.-Петербург

Поступило в Редакцию 26 февраля 2000 г.

Рассмотрено нестационарное возбуждение соленоида; впервые показано, что при этом в пространстве вне соленоида имеются векторные потенциалы, на которых, вообще говоря, можно наблюдать эффект Ааронова–Бома.

Со времени описания эффекта Ааронова–Бома (ЭАБ) [1–3] многочисленные теоретические и экспериментальные усилия были затрачены на выяснение природы этого явления (см., например, [4,5]). Первоначальная идея по наблюдению эффекта, не связанного со взаимодействием электронов ни с магнитным, ни с электрическим полем, относилась к ситуации, когда электроны движутся в области, где отсутствуют электрическое и магнитное поля. Такой режим наиболее просто осуществляется в стационарном случае, в котором и проводились исследования до начала 1990-х годов. При настоящем уровне развития технологии эксперименты Тономуры с сотрудниками [6] во многом исчерпали экспериментальные подходы к исследованию эффекта в этом режиме. В результате исследователи обратились к выяснению возможности наблюдения ЭАБ в случае нестационарных полей [7–10]. Это расширение области деятельности обещает большие перспективы для экспериментальных исследований, которые могут привести к более глубокому пониманию природы эффекта. С другой стороны, интерпретация ЭАБ при этом становится более сложной.

Для более глубокого понимания природы эффекта полезно представить полные электромагнитные потенциалы в виде двух слагаемых:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^f + \mathbf{A}^0 \quad \text{и} \quad \varphi = \varphi^f + \varphi^0, \quad (1)$$

где индекс f обозначает потенциалы, описывающие ненулевые электромагнитные поля ("полевые потенциалы"), а индекс 0 относится к потенциалам, которые необходимы для решения уравнений Максвелла с граничными условиями, но сами по себе напрямую электромагнитных полей не создают (потенциалы "нулевых полей" или "избыточные"). Следует заметить, что в математической физике аналог потенциалов нулевых полей используется давно. Так, векторный потенциал нулевого поля появляется при восстановлении вектора по заданным ротору и дивергенции в конечной области и определяется единственным образом [11].

Потенциалы нулевого поля, как известно [12], могут быть представлены в следующем виде:

$$\mathbf{A}^0 = \text{grad } \chi, \quad \varphi^0 = -\frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t}, \quad (2)$$

где χ — дифференцируемая функция.

Отметим, что именно потенциалы нулевых полей ответственны за ЭАБ во всех опубликованных до сих пор работах, рассматривающих стационарный случай. Это связано в первую очередь с тем, что в этом случае ЭАБ имеет место в чистом виде: сдвиг интерференционных полос определяется только потенциалами, но не полями [13,14]. При переходе к нестационарному режиму встает вопрос: можно ли в этом случае найти такую ситуацию, когда в определенных областях пространства имеются потенциалы нулевых полей? Поэтому на первое место при анализе вопроса о возможности наблюдения ЭАБ при нестационарных потенциалах встает вопрос о потенциалах нулевого поля в этом случае. Эта проблема в известных нам работах не обсуждалась. Как видно из соотношений, определяющих поля через потенциалы:

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -c^{-1} \partial \mathbf{A} / \partial t - \text{grad } \varphi, \quad (3)$$

для этого необходимо иметь $\varphi^0 \neq 0$, т.е. нельзя использовать кулоновскую (радиационную) калибровку.

Рассмотрим уравнения Максвелла–Лоренца, описывающие электромагнитное поле в вакууме в общепринятых обозначениях:

$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad \text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (4)$$

Подставляя (1), (3) в систему (4), получим уравнения для потенциалов:

$$\square \varphi^f + \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda^f}{\partial t} + \square \varphi^0 + \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda^0}{\partial t} = -4\pi\rho, \quad (5a)$$

$$\square \mathbf{A}^f - \text{grad } \Lambda^f + \square \mathbf{A}^0 - \text{grad } \Lambda^0 = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (5b)$$

где

$$\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

$$\Lambda^f = \text{div } \mathbf{A}^f + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi^f}{\partial t}.$$

В качестве частей потенциалов \mathbf{A}^f и φ^f выберем решения неоднородных уравнений:

$$\square \varphi^f = -4\pi\rho, \quad (6a)$$

$$\square \mathbf{A}^f = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (6b)$$

Слагаемые, содержащие потенциалы нулевых полей, в силу (2) обращаются в тождественный нуль, а уравнения Максвелла сводятся к требованию выполнения условия Лоренца:

$$\text{div } \mathbf{A}^f + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi^f}{\partial t} = 0, \quad (7)$$

не для полных потенциалов, а только для их частей, определяющих поля. При этом излишним становится условие Стрэттона:

$$\text{div } \mathbf{A}^0 + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi^0}{\partial t} \equiv \Delta \chi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0.$$

Таким образом, условие (7) не является в данной схеме решения уравнений Максвелла–Лоренца математическим удобством, облегчающим решение, а необходимо для решения этих уравнений. В том случае, когда решения неоднородных уравнений (6) выражаются запаздывающими потенциалами, условие Лоренца (7) является тождеством [15], а оставшаяся часть системы (5) удовлетворяется потенциалами нулевого поля. Итак, для описания ненулевого поля необходимы потенциалы, удовлетворяющие уравнениям (6). При этом они необходимым образом удовлетворяют условию (7).

В качестве примера существования нестационарных потенциалов нулевого поля, обобщающего стационарный случай магнитоэлектростатического ЭАБ, рассмотрим задачу о нестационарном возбуждении цилиндрического соленоида бесконечной длины, с бесконечно тонкими стенками. Выбирая цилиндрическую систему координат (ρ, α, z) с осью z вдоль оси соленоида, представим объемное распределение тока в виде выражений:

$$j_\alpha(\rho, \alpha, z) = I_0 \delta(\rho - R) \exp i(-n\alpha + \omega t), \quad j_\rho = j_z = 0, \quad (8)$$

где R — радиус соленоида, а ω — круговая частота тока.

Отличные от нуля компоненты векторного потенциала A_ρ и A_α имеют вид [16] (гармоническую зависимость от времени далее не показываем):

$$A_\rho = \int_V j_\alpha(\rho') \sin(\alpha - \alpha') G(\rho, \rho') dV', \quad (9a)$$

$$A_\alpha = \int_V j_\alpha(\rho') \cos(\alpha - \alpha') G(\rho, \rho') dV', \quad (9b)$$

где $G(\rho, \rho') = -\frac{i\pi}{c} H_0^{(2)}(k|\rho - \rho'|)$ — функция Грина уравнения Гельмгольца [16], $H_0^{(2)}$ — функция Ханкеля, $k = \omega/c$.

Интегралы, входящие в (9), легко вычисляются с помощью формулы сложения для функций Ханкеля [16]:

$$\begin{aligned} & H_0^{(2)}\left(k\sqrt{\rho^2 + R^2 - 2\rho R \cos(\alpha - \alpha')}\right) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-im(\alpha - \alpha')} \begin{cases} H_m^{(2)}(kR) J_m(k\rho), & \rho < R, \\ J_m(kR) H_m^{(2)}(k\rho), & \rho > R. \end{cases} \end{aligned} \quad (10)$$

В результате получаем:

$$\begin{aligned} A_\alpha &= -\frac{i\pi^2 I_0 R}{c} e^{-in\alpha} \\ &\times \begin{cases} H_{n+1}^{(2)}(kR) J_{n+1}(k\rho) + H_{n-1}^{(2)}(kR) J_{n-1}(k\rho), & \rho < R, \\ J_{n+1}(kR) H_{n+1}^{(2)}(k\rho) + J_{n-1}(kR) H_{n-1}^{(2)}(k\rho), & \rho > R; \end{cases} \end{aligned} \quad (11a)$$

$$A_\rho = -\frac{\pi^2 I_0 R}{2c} e^{-in\alpha} \times \begin{cases} H_{n+1}^{(2)}(kR)J_{n+1}(k\rho) + H_{n-1}^{(2)}(kR)J_{n-1}(k\rho), & \rho < R, \\ J_{n+1}(kR)H_{n+1}^{(2)}(k\rho) - J_{n-1}(kR)H_{n-1}^{(2)}(k\rho), & \rho > R. \end{cases} \quad (116)$$

В случае $n = 0$, т.е. отсутствия модуляции по углу, из (11) получаем соотношения:

$$A_\alpha = -\frac{2i\pi^2 I_0 R}{c} \begin{cases} H_1^{(2)}(kR)J_1(k\rho), & \rho < R, \\ J_1(kR)H_1^{(2)}(k\rho), & \rho > R \end{cases} \quad \text{и} \quad A_\rho = 0, \quad (12)$$

которые в стационарном случае ($\omega \rightarrow 0$) приводят к известным соотношениям: $A_\alpha = J\rho/cR$ и $A_\alpha = JR/c\rho$ ($\rho > R$), где $J = 2\pi R I_0$ — ток в стенке соленоида на единицу длины.

Единственная ненулевая компонента магнитного поля, соответствующая потенциалам (12), имеет вид:

а) в случае переменного тока

$$B_z = -\frac{2i\pi^2 I_0 R k}{c} \begin{cases} H_1^{(2)}(kR)J_0(k\rho), & \rho < R, \\ J_1(kR)H_0^{(2)}(k\rho), & \rho > R; \end{cases} \quad (13)$$

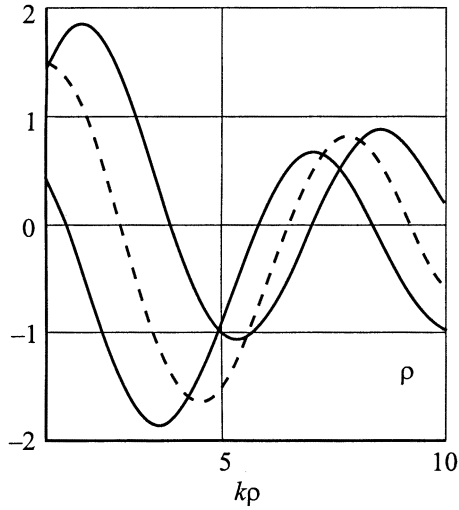
б) в стационарном случае

$$B_z = \frac{4\pi I_0}{c} (\rho < R), \quad B_z = 0 (\rho > R). \quad (14)$$

В соответствии с (1) разобьем полный векторный потенциал вне соленоида на две части. Для этого выделим в (12) слагаемое, ротор которого равен нулю. Это можно сделать следующим и единственным образом:

$$A_\alpha = -\frac{2i\pi^2 I_0 R}{c} J_1(kR)H_1^{(2)}(k\rho) + \frac{4\pi I_0 R}{kc} \frac{J_1(kR)}{\rho} \equiv A_\alpha^f + A_\alpha^0, \quad (15)$$

где A_α^f — компонента полевого потенциала, а A_α^0 — компонента потенциала нулевого поля и $H_1^{(2)}(k\rho) = H_1^{(2)}(k\rho) - 2i/\pi k\rho$.



Зависимость полевого потенциала от расстояния до соленоида $k\rho$ для трех моментов времени: $\omega t = \pi/2$ — сплошная линия — $\pi J_1(k\rho)$, $\omega t = \pi/4$ — пунктирная линия — $0.25\pi(\pi J_1(k\rho) - \pi Y_1(k\rho) - \frac{2}{k\rho})$, $\omega t = 0$ — штриховая линия — $-(\pi Y_1(k\rho) + \frac{2}{k\rho})$. Положено, что $kr = W = 1$.

Выделим реальные части компонент потенциалов в (15):

$$\operatorname{Re} A_\alpha^f = W \left\{ \pi J_1(k\rho) \sin \omega t - \left[\frac{2}{k\rho} + \pi Y_1(k\rho) \right] \cos \omega t \right\}, \quad (16a)$$

$$\operatorname{Re} A_\alpha^0 = W \frac{2}{k\rho} \cos \omega t, \quad (16б)$$

где

$$W = \frac{2\pi I_0 R J_1(kR)}{c},$$

Y_1 — функция Неймана.

На рис. 1 приведены зависимости A_α^f , полученные из (16), в различные моменты времени. Из анализа этих кривых можно видеть, что возможны ситуации, когда электроны, летящие по определенным траекториям и испускаемые в определенные моменты времени, подвергаются воздействию только потенциалов нулевых полей.

В стационарном случае $A_\alpha^f = 0$, $A_\alpha^0 = JR/c\rho$.

Из условия отсутствия электрического поля можно получить выражение для скалярного потенциала нулевого поля:

$$\varphi^0 = -\frac{4\pi i I_0 R}{c} J_1(kR)\alpha, \quad (17)$$

где α — азимутальный угол. В стационарном случае $\varphi^0 = 0$.

Можно отметить, что существует соотношение между радиусом соленоида и длиной волны электромагнитного поля, которое определяется корнями уравнения $J_1(kR) = 0$ и при котором, как видно из соотношения (15), поля вне соленоида отсутствуют. В этом нестационарном случае, однако, отсутствуют и потенциалы нулевого поля; это случай волновода закрытого типа. Потенциалы нулевого поля отсутствуют также и для всех $n \neq 0$.

В общем случае можно рассматривать три ситуации, когда возможен эффект Ааронова–Бома в нестационарном режиме. Во-первых, когда электронные волны де Бройля взаимодействуют с потенциалами нулевых полей. Во-вторых, когда они взаимодействуют с потенциалами нулевых полей и полевыми потенциалами. В третьем случае имеются только полевые потенциалы: эта ситуация рассматривалась в [7,17], но требует более глубокого изучения. Иногда ЭАБ в случаях взаимодействия волн де Бройля с полевыми потенциалами называют квазиэффектом Ааронова–Бома.

Таким образом, в настоящей статье показано существование потенциалов нулевых полей при нестационарном возбуждении соленоида, что является необходимым, но, вообще говоря, недостаточным условием для наблюдения эффекта Ааронова–Бома.

Список литературы

- [1] Franz W. // Deutsche physik. Ges. 1939. V. 20. P. 65–66.
- [2] Ehrenberg W., Siday R.E. // Proc. Phys. Soc. London Sect. 1949. B. 62. P. 8.
- [3] Aharonov Y., Bohm D. // Phys. Rev. 1959. V. 115. P. 485–491.
- [4] Olariu S., Popescu I.I. // Rev. Mod. Phys. 1985. V. 57. P. 339–436.
- [5] Peskin M., Tonomura A. // Lectura Notes in Physics. 1989. V. 340. P. 115.
- [6] Tonomura A. et al. // Phys. Rev. Lett. 1986. V. 56. P. 792–795.
- [7] Lee B., Yin E., Gustafson T.K., Chiao R. // Phys. Rev. 1992. V. A45. P. 4319–4325.

- [8] *Агеев А.Н., Воронин Ю.М., Ченцов Ю.В.* // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22. С. 25.
- [9] *Afanasiev G., Nelhiebel M.* // Physica Scripta. 1996. V. 54. P. 417–427.
- [10] *Yourdas A.* // Phys. Rev. 1997. V. A56. P. 2408–2411.
- [11] *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М., 1953. 680 с.
- [12] *Савин М.Г.* Проблемы калибровки Лоренца в анизотропной среде. М., 1979. 122 с.
- [13] *Kobe D.H.* // Annals of Physics. 1979. V. 123. P. 381–410.
- [14] *Boyer T.H.* // Phys. Rev. 1973. V. D8. P. 1679–1693.
- [15] *Тамм И.Е.* Основы теории электричества. М., 1989. 504 с.
- [16] *Марков Г.Т., Чаплин А.Ф.* Возбуждение электромагнитных волн. М.–Л., 1967. 376 с.
- [17] *Агеев А.Н., Давыдов С.Ю., Чирков А.Г.* // Письма в ЖТФ. 2000.