

01;09

Исследование прохождения электромагнитной волной плоского слоя диэлектрика вблизи критической точки

© И.П. Козлов

Государственный научно-исследовательский институт прикладной
механики и электродинамики, Москва

Поступило в Редакцию 7 декабря 1999 г.

Исследовано точное решение задачи о распространении плоской волны в плоскостной среде произвольной толщины. В предложенном методе самосогласованных конечных разностей переменный шаг по аргументу в однородных подслоях согласован с изменением диэлектрической проницаемости ε на слое. Предсказано явление качественной и количественной зависимости решения вблизи нуля ε от малых параметров физической задачи. Даны условия появления и расчеты поверхностной волны.

Введение. При разработке переключающих устройств в объемных элементах систем сверхбыстрой обработки информации ССОИ на СВЧ, КВЧ, в видимом диапазоне представляют интерес, прежде всего, решения, имеющие простой физический смысл. Исследовано точное решение через элементарные функции задачи распространения электромагнитных волн в плоскостной среде вблизи критической точки, где малые изменения параметров приводят к качественным изменениям решения [1–4]. Так, ”почти” нормально падающая волна на слой (код 0) может поменять направление на волну вдоль слоя (код 1). В решении малыми параметрами являются поглощение, угол падения волны [3]; обратный радиус кривизны поверхности $\varepsilon = \text{const}$ [4]. Дается оценочный расчет поверхностной E -волны для плоского слоя [3].

Продемонстрируем предложенный метод на примере решения задачи нормального падения плоской волны на неоднородный плоский слой от z_1 до z_N без поглощения. До слоя при $\varepsilon = \varepsilon_1 (z < z_1)$ и за слоем при $\varepsilon = \varepsilon_N (z > z_N)$, $\varepsilon > 0$, среда однородная, причем за слоем имеется только проходящая волна. Слой разбивается на однородные подслои переменной толщины $\Delta z_n = z_{n+1} - z_n$, так что $\delta^2 = \varepsilon_n / \varepsilon_{n+1} = \text{const}$. В окрестности нуля ε слой при сохранении непрерывности функции

$\varepsilon(z)$ и ее производной в точке $z = z_L$ заменяется нелинейным:

$$\varepsilon = \beta^2 / (b + kz)^2 \quad (gr(\varepsilon_L) = \text{const} \gg 1), \quad (1)$$

имеющим точное решение в элементарных функциях, где новая переменная $gr(\varepsilon) = -\alpha/\varepsilon^{3/2}$, $\alpha = d\varepsilon/d(kz)$, $k = 2\pi/\lambda$, λ — длина волны в свободном пространстве. Введение локальной системы координат с центром в точке z_n приводит к сокращению параметра $\sqrt{\varepsilon_n}kz_n$ в рекуррентных формулах для коэффициента отражения $R_0^n = R_n\{gr(\varepsilon_1), \varepsilon_1/\varepsilon_n, \delta\}$. Функционал R_0^n при $\delta \rightarrow 1$ сводится к уравнению Риккати. Описывается принцип подобия слоев, имеющих эквивалентные коэффициенты отражения $R_0^N = R\{gr(\varepsilon_1), \varepsilon_1/\varepsilon_N\}$, а вблизи точки $\varepsilon = 0$ равные поля $E = E\{gr(\varepsilon_1), \varepsilon_1/\varepsilon_N\}$. У подобных слоев совпадают $gr(\varepsilon_1) = -\alpha_1/(\varepsilon_1)^{3/2}$ и $\varepsilon_1/\varepsilon_N$, но отличаются α_1 и ε_1 (у них равны $gr(\varepsilon_n)$, $n = 1, 2, \dots, N-1$).

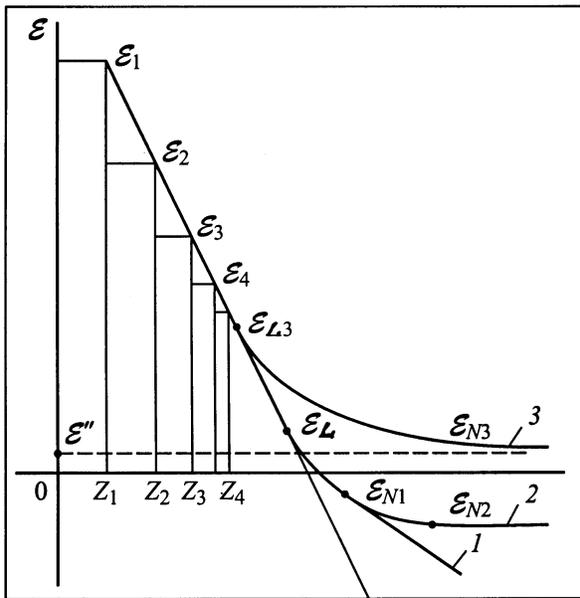


Рис. 1. Линейный слой, сопряженный в окрестности нуля ε с нелинейным.

Исследования линейного слоя в модели 3 (рис. 1) показывают, что: решение неустойчиво в точке $\varepsilon = 0$ — малое возмущение $\Delta\theta_n$ (или возмущение $\Delta\varepsilon = \varepsilon_n(\Delta\theta_n)^2$ на двойном слое) при $\varepsilon \rightarrow 0$ приводит к $\theta \rightarrow \pi/2$, поскольку $\varepsilon_0 = \varepsilon_n \sin^2(\Delta\theta_n) = \text{const}$ (инвариант на плоском слое); $R \rightarrow 0$ при $gr(\varepsilon_N) \rightarrow 0$ для любого $\varepsilon_N > 0$; $|R| \rightarrow 1$ при $|\varepsilon_N| \rightarrow 0$; плотность потока энергии проходящей волны $S_L/S_1 \rightarrow 0$ при $\varepsilon_L \rightarrow 0$. Последнее фундаментальное свойство и принцип подобия слоев позволили выделить критическую точку в нуле ε , вблизи которой решение качественно зависит от малых изменений параметров физической задачи — прежде всего, поглощения и угла падения волны θ_1 .

Постановка, решение задачи. Определим случай нормального падения плоской волны на линейный полубесконечный плоский слой диэлектрика без поглощения ($\varepsilon < \varepsilon_1$) как основную задачу. И будем рассматривать точное решение физической задачи, модель 1, образованной из основной задачи при малых изменениях исходных данных: поглощения, задаваемого величиной $\varepsilon'' = \text{const}$; $\varepsilon' = \varepsilon - i\varepsilon''$; угла падения волны θ_1 , который отсчитывается от оси Oz в плоскости zy , или $\varepsilon_0 = \varepsilon'_1 \sin^2 \theta_1 \ll \varepsilon_1$ (инвариант ε_0 принимаем действительной величиной); функции $\varepsilon(z)$ вблизи нуля ε при $0 < \varepsilon_L < \varepsilon < \varepsilon_N < 0$, $\varepsilon_L \approx \varepsilon'_L$, заменой линейной функции $gr(\varepsilon')(\varepsilon')^{3/2} = \text{const}$ на $gr(\varepsilon') = \text{const}$, $gr(\varepsilon_L) > 20$, где $gr(\varepsilon') = -\{d\varepsilon'/d(kz)\}/(\varepsilon')^{3/2}$, $\varepsilon'' \ll \varepsilon_1$. Модель 3 является вырожденным случаем модели 1 при $\varepsilon''_L/\varepsilon_L \ll 1$. Модель 2 выбрана из условия, что $d\varepsilon/dz = 0$ при $\varepsilon = \varepsilon_N$. Нелинейный слой в модели 1 при $|\varepsilon_L| \rightarrow 0$ переходит в линейный полубесконечный, который можно аппроксимировать моделью 3 в случае "сверхмалого" поглощения при $\varepsilon'' \ll \alpha^{2/3}$.

В соответствии с предложенным методом решения непрерывно неоднородный слой заменим структурой из однородных подслоев переменной толщины, так что $\delta^2 = (\varepsilon_n - \varepsilon_0)/(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_0) = \text{const}$, $\delta^2 - 1 \ll 1$ ($\Delta z_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, $\varepsilon > \varepsilon_0$). Тогда напряженности электрического поля E для H -волны и магнитного поля H для E -волны (поляризованной в плоскости падения) в однородных подслоях задаются амплитудами проходящей A^n и отраженной C^n волн в виде:

$$E_x^n = A_H^n \exp(-i\sqrt{\varepsilon'_n - \varepsilon_0} kz_n) + C_H^n \exp(i\sqrt{\varepsilon'_n - \varepsilon_0} kz_n),$$

$$H_x^n = A_E^n \exp(-i\sqrt{\varepsilon'_n - \varepsilon_0} kz_n)(1 + R_{0E}^n),$$

где $n = 1, 2, \dots, L-1$, A_H^1, A_E^1 — заданные амплитуды волн. Тогда для $R_{0E}^n = (C_E^n/A_E^n) \exp(2i\rho_n)$, $\rho_n = \sqrt{\varepsilon_n'} \cos \theta_n k z_n$, и A_E^n (E -волны) справедливы соотношения [2,3]:

$$R_E^n \exp(2i\rho_n) = R_{0E}^n = \frac{r_{nE} + R_{0E}^{n+1} \exp(i\Delta\rho_{n+1})}{1 + r_{nE} R_{0E}^{n+1} \exp(i\Delta\rho_{n+1})}, \quad (2)$$

$$A_E^{n+1} = A_E^1 \exp\left\{-i \sum_{p=1}^n \left(1 - \frac{1}{\delta_p}\right) \rho_p\right\} P_E^{n+1},$$

$$P_E^n = \prod_{m=1}^{n-1} \left[1 + \frac{\delta_{nE} - 1}{2} (1 - R_{0E}^m)\right], \quad (3)$$

где $n = 1, \dots, L-1$, $R_{0E}^L = R_{LE}$, $\Delta\rho_L = 0$, $\delta_n = \frac{\sqrt{\varepsilon_n' - \varepsilon_0}}{\sqrt{\varepsilon_{n+1}' - \varepsilon_0}}$, $\delta_{nH} = \delta_n$, $\delta_{nE} = \delta_n \frac{\varepsilon_{n+1}'}{\varepsilon_n'}$, $\xi_n = \frac{\delta^{2n} \varepsilon''}{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}$,

$$r_{nH} = \frac{(\delta - 1)(1 + i\xi_n)}{(\delta + 1)(1 + \xi_n^2)}, \quad r_{nE} \cong -r_{nH} \left[\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_n'} + \frac{\varepsilon_{n+1}'}{\varepsilon_n'} \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_n'} - 1 \right) \right],$$

$$\Delta\rho_{n+1} = \frac{\delta^2 - 1}{\delta^{3n} gr(\varepsilon_1)} \sqrt{1 - i\xi_n},$$

R_{LE} — коэффициент отражения от слоя (z_L, z_N) в локальной системе координат с центром z_L . Для R_{0H}^n, A_H^n (H -волны) справедливы соотношения (2), (3) при замене в них индексов E на H .

Исследования наклонного падения волны вблизи нуля ε . Направление вектора Пойнтинга для проходящей E -волны задается в виде [3] $\text{ctg } \Phi_{nE} = \text{Re}(\gamma_n^* \sqrt{\gamma_n^* - 1}) / \text{Re}(\gamma_n^*)$, где $\gamma_n = \varepsilon_n' / \varepsilon_0$, и совпадает с осью z при $\varepsilon'' / \varepsilon_0 \gg 1$ или с осью y при $\varepsilon'' / \varepsilon_0 \ll 1$ (ламинарный поток). При $\varepsilon'' = 0$ выделяются предельные случаи распространения волны по оси z при $\delta^{2n}(\theta_1)^2 \ll 1$ ($r_{nE} \approx -r_{nH} \approx (\delta - 1)/2$) и по оси y при $\delta^{2n}(\theta_1)^2 \gg 1$ ($r_{nE} \approx r_{nH}$). Поскольку r_{nE} в случае $\varepsilon'' / \varepsilon_0 \ll 1$ меняет знак, то предположим $R_{0E} \cong \exp\left\{(i+1) \frac{(\varepsilon'')^{3/2}}{\alpha} \sum_{m=0}^M r_{N-m}\right\} \approx 0$ при $\varepsilon = \varepsilon_p$, тогда в этом подслое будет только проходящая E -волна, направление которой определяется соотношением $\varepsilon_0 = \varepsilon_p \sin^2 \theta_p$. Энергия волны при выполнении критерия $\varepsilon'' / \varepsilon_0 < 0.1$ может быть переведена в

поверхностную E -волну [3]. Оценки для этого случая по порядку величины будут: из коротковолнового приближения $\varepsilon_p \approx 0.01(\alpha_1)^{2/3}$ при $R = 0.7$ [1], далее $\varepsilon'' \approx 10^{-4}(\alpha_1)^{2/3}$ и $\varepsilon_0 \approx 10^{-3}(\alpha_1)^{2/3}$.

Исследования нормального падения волны вблизи нуля ε . Пусть $|\varepsilon_L| \rightarrow 0$, тогда: в модели 2 для $(\varepsilon''/\varepsilon_L)^2 = 3 - R_L = 0.28 - 0.25i$ и для $(\varepsilon''/\varepsilon_L)^2 = 1/3 - R_L = 0.73 - 0.15i$; в моделях 2, 3

$$S_L/S_1 \rightarrow 0 \quad (\text{при } \varepsilon_N > 0 \text{ и } \varepsilon_N < 0).$$

В результате показывается резкая зависимость решения от граничных условий и уточняются ранее полученные в [1] данные.

В модели 3 при $\varepsilon'' = 0$ отметим количественную зависимость решения от малых изменений z . Так, после раскрытия неопределенности в выражении для E_x^N имеем: $|E_x^N|^2 = S_N \sqrt{\varepsilon_1} / (S_1 \sqrt{\varepsilon_N}) \rightarrow \infty$ при $\varepsilon_N \rightarrow 0$. Из (2), (3) следует, что dE_x^n/dz и dR_0^n/dz возрастают по модулю при $\varepsilon_n \rightarrow 0$, причем для линейного слоя быстрее, чем для нелинейного (1). Возможность $E \rightarrow \infty$ доказывается в [2] и подтверждается для линейного полубесконечного слоя в случае E -волны [5] (решение разлагается в ряд). Резкое изменение R и E наглядно показывается на рис. 1 уменьшением толщины подслоев вплоть до нуля при $\varepsilon \rightarrow 0$ ($r_n = \text{const}$). Последнее свойство и неустойчивость решения приводят к выводу о некорректной постановке задачи по Тихонову А. [6]. Некорректность устраняется введением поглощения, однако трудности в проведении расчетов остаются из-за резонансного характера функции $E(z)$, тем более что при $gr(\varepsilon'') \ll 1$ волна до области $\varepsilon \approx \varepsilon''$ доходит не отражаясь. Решение основной задачи — квазирешение будем рассматривать в смысле предельного перехода $|\varepsilon_L| \rightarrow 0$ в моделях 1, 2, 3 при $\varepsilon''/\varepsilon_0 \gg 1$ (в предположении справедливости закона Снелля). С физической точки зрения основная задача является случаем "почти" нормального падения волны на "почти" плоский слой со "сверхмалым" поглощением при $\varepsilon''/\varepsilon_0 \gg 1$.

Критическая точка в нуле ε , расчеты. Выявленные свойства приводят к ветвлению решения вблизи нуля ε . Поглощение является "ключом" при переходе решения с одной ветви на другую. Так, при $\varepsilon''/\varepsilon_0 \ll 1$ вблизи нуля ε происходит "развал" нормального падающего на слой луча. В результате чего может возникнуть поверхностная волна, зависящая от поляризации падающей волны, величины $|\varepsilon'|$, величины и знака радиуса кривизны поверхности $\varepsilon = \text{const}$, длины и формы оптического пути. Поверхностные волны в плоском слое достаточно подробно

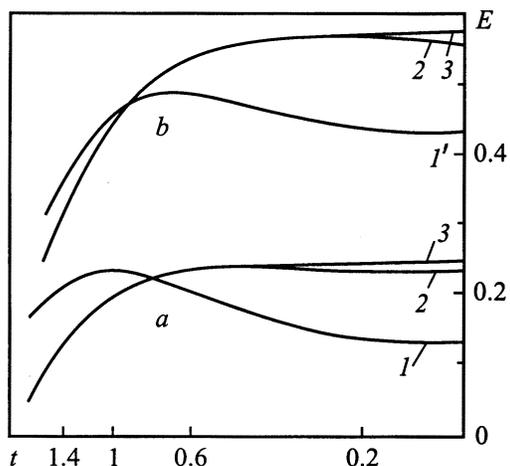


Рис. 2. Зависимость напряженности электрического поля E от $t = \varepsilon/\varepsilon_1 [gr(\varepsilon_1)]^{-2/3}$ в случае $\varepsilon'' = 0$ и $\theta_1 = 0$ ($1 - \varepsilon_1/\varepsilon_N = 10^2$; $2 - \varepsilon_1/\varepsilon_N = 0.2 \cdot 10^5$; $3 - \varepsilon_1/\varepsilon_N = 0.2 \cdot 10^9$); $a - gr(\varepsilon_1) = 0.4$; $b - gr(\varepsilon_1) = 0.5$. Совпадение результатов расчетов при $\varepsilon_1/\varepsilon_N \gg 1$ отражает фундаментальное свойство решения: $S_L/S_1 \rightarrow 0$ при $\varepsilon_L \rightarrow 0$.

обсуждаются в [8], но на основе приближенного решения уравнений Максвелла. Плоскостная модель справедлива при $\chi = \sqrt{\varepsilon''}kr \gg 1$; при χ порядка единицы надо рассматривать дифракционную задачу, а при $\chi \ll 1$ и $gr(\varepsilon'') \ll 1$ энергия падающей волны может рассеяться во все стороны, приводя к потерям на излучение. Для учета кривизны поверхности $\varepsilon = \text{const}$ обсуждаемый метод развит на случай сферических координат в [4]. При этом вблизи нуля ε для решения задачи дифракции волн на несимметрично вложенных один в другой однородных шарах используется метод преобразования амплитуд волн при смещении сферической системы координат [9].

Результаты расчетов на ЭВМ коэффициентов отражения и полей приводятся на рис. 2, 3. Анализируя решение основной задачи через функции Эйри, отметим, что вблизи критической точки $\varepsilon = 0$ надо учитывать поглощение и обе функции Эйри. Полное поле приводит к резонансному характеру функции $E(t)$, что демонстрируется на рис. 3.

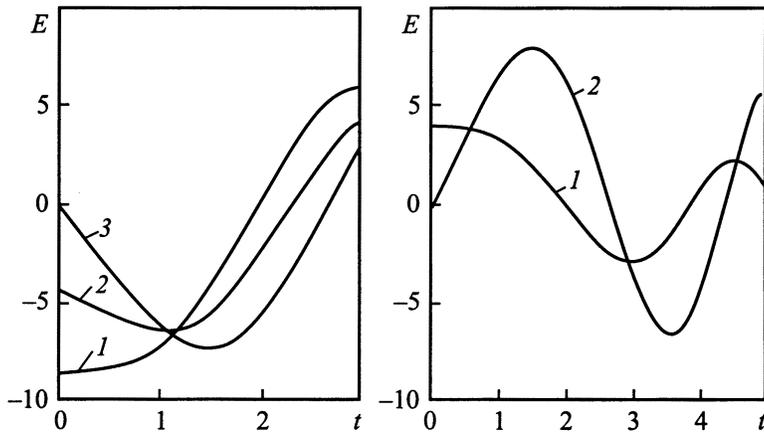


Рис. 3. Резонансный характер напряженности электрического поля $E(t)$, $t = \varepsilon/\varepsilon_1[gr(\varepsilon_1)]^{-2/3}$, при $\varepsilon'' = 0$ и $\theta_1 = 0$, $gr(\varepsilon_1) = 0.001$; $\varepsilon_1 = 0.1327355 \pm 10^{-7}$ (1 — точное решение; 2 — приближенное решение, использующее одну из функций Эйри; 3 — точное решение для случая расположения в плоскости $\varepsilon = 0$ идеально проводящей плоскости). Положение нуля E зависит от малых изменений параметров слоя.

Из расчетных данных получен критерий применимости длинноволнового приближения: $gr(\varepsilon_L) > 20$. При разработке переключающих устройств ССОИ для предварительных оценок может использоваться этот критерий; критерий применимости модели нормального падения плоской волны на плоскоструктурную среду в виде: $\sqrt{|\varepsilon_N|}kr_N \gg 1$, $\delta^{2N}(\theta_1)^2 \ll 1$; критерий появления поверхностной волны ($\varepsilon''/\varepsilon_0 < 0.1$); а кроме этого, приведенный в [1] количественный критерий применимости коротковолнового приближения при $gr(\varepsilon_L) \ll 1$. Получено, что 96% энергии "почти" нормально падающей волны (при $\varepsilon_1 = 1$) может быть переведено в поверхностную волну при толщине линейного слоя $h \approx 2\lambda$. При расчетах для нелинейного слоя по формулам (2), (3) может быть выполнена оптимизация по h . Последовательная "прогонка" по формулам (2)–(3) позволит проводить расчеты нелинейной задачи. Модель 3, применимая при $\varepsilon'' \ll 0.1\alpha^{2/3}$ для решения основной задачи, эффективна простотой решения, возможностью использовать принцип подобия плоских неоднородных слоев и закон сохранения энергии.

С физической точки зрения нелинейный участок ($\varepsilon_L, \varepsilon_N$) исключает отраженную волну от конца линейного слоя.

Заключение. Предсказано явление качественной и количественной зависимости решения задачи о распространении волн в плоском слое вблизи нуля ε от малых параметров физической задачи — прежде всего, поглощения и направления распространения волны, которые могут привести к появлению поверхностной волны. Принцип подобия слоев позволяет распространить явление на случай скачка ε . Предложенный метод решения имеет простой физический смысл и может быть использован при решении широкого круга прикладных задач, связанных с решением волнового уравнения при резком изменении свойств среды. Результаты исследований могут применяться при проектировании переключающихся устройств, межэтажных переходов в ССОИ с учетом нелинейных явлений.

Список литературы

- [1] Козлов И.П. // Радиотехника и электроника. 1997. Т. 42. № 2. С. 142–146.
- [2] Козлов И.П. // ЖТФ. 1999. № 8. С. 5–9.
- [3] Козлов И.П. // Электродинамика и техника СВЧ и КВЧ. 1996. Т. 4. № 4. С. 63–69.
- [4] Козлов И.П. // Распространение и дифракция электромагнитных волн. М: МФТИ, 1993. С. 104–113.
- [5] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1973. 297 с.
- [6] Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 288 с.
- [7] Гинзбург В.Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М.: Наука, 1967. 683 с.
- [8] Агранович В.М., Миллс Д.Л. Поверхностные поляритоны. М.: Наука, 1985. 346 с.
- [9] Козлов И.П. // Изв. вузов. Радиофизика. 1975. Т. 18. № 7. С. 997–1008.