

01;07

## Непараксиальный гауссов пучок: 1. Векторные поля

© А.В. Воляр

Симферопольский государственный университет

Поступило в Редакцию 25 ноября 1999 г.

Найдены точные аналитические решения векторной задачи о распространении непараксиального гауссова пучка вблизи фокуса. Показано, что непараксиальный пучок низшего порядка имеет шесть мод, четыре из которых при предельном переходе  $kz_0 \gg 1$  оказываются вырожденными и превращаются в параксиальный гауссов пучок, а две — формируют азимутально симметричные ТЕ и ТМ поля. Характерным свойством непараксиального модового пучка является нарушение симметрии между электрическим и магнитным полями, хотя они остаются ортогональными между собой. Такое нарушение симметрии приводит к появлению отрицательных потоков энергии в окрестности линий фазовой сингулярности — колец Эйри, особых состояний светового поля — ”капель света” и ”островков сингулярности”.

Приведено сравнение полученных результатов с данными других работ, иллюстрирующее их хорошее согласование.

Эволюция сильно сфокусированного лазерного пучка в области перетяжки характеризуется интерференционным взаимодействием однородных и эванесцентных волн [1] и требует векторного представления полей. Такое векторное описание, основанное на представлении скалярной функции непараксиального модового пучка в виде суперпозиции плоских волн [2], уже было дано в работе [3] и дополнено в работе [4]. Тем не менее использование авторами [3] приближенного граничного условия, требующего, чтобы поле пучка в области перетяжки  $z = 0$  имело гауссов профиль, вырезает из пространственного спектра пучка эванесцентные волны и в совокупности с интегральным представлением скалярного поля существенно ограничивает использование метода скалярных потенциалов.

Целью данной работы явилось изучение эволюции векторного поля непараксиального гауссова пучка на основе аналитического представления потенциалов Виттакера [3] и приближенного граничного условия

в смысле Дэвиса [5], требующего, чтобы вблизи оптической оси поле оставалось гауссовым.

1. В соответствии с работами [6,7] все компоненты векторов напряженности электрического  $\mathbf{e}(\mathbf{r})$  и магнитного  $\mathbf{h}(\mathbf{r})$  полей в свободном пространстве и в однородной изотропной среде с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$  можно единым образом представить, если известны точные решения  $\Psi_1(\mathbf{r})$  и  $\Psi_2(\mathbf{r})$  скалярного уравнения Гельмгольца

$$(\nabla^2 + k^2)\Psi(\mathbf{r}) = 0, \quad (1)$$

где  $\Psi_1(\mathbf{r})$  и  $\Psi_2(\mathbf{r})$  — потенциалы Виттакера,  $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$ ,  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$  — длина волны. Скалярные потенциалы  $\Psi_1(\mathbf{r})$  и  $\Psi_2(\mathbf{r})$  связаны с векторами полей соотношениями:

$$\mathbf{e} = \nabla \times \nabla \times (\hat{\mathbf{n}} \cdot \Psi_1) - i \cdot k \cdot \nabla \times (\hat{\mathbf{n}} \cdot \Psi_2), \quad (2)$$

$$\mathbf{h} = -\sqrt{\varepsilon} \cdot \nabla \times \nabla \times (\hat{\mathbf{n}} \cdot \Psi_2) - i \cdot \varepsilon \cdot k_0 \cdot \nabla \times (\hat{\mathbf{n}} \cdot \Psi_1), \quad (3)$$

где  $\hat{\mathbf{n}}$  — постоянный опорный вектор,  $k_0$  — волновое число в вакууме.

При условии лоренцевой калибровки потенциалы Виттакера  $\Psi_1$ ,  $\Psi_2$  и вектор-потенциал  $\mathbf{A}$  связываются между собой соотношением [3]:

$$\mathbf{A} = -i \cdot \varepsilon \cdot k_0 \cdot \hat{\mathbf{n}} \cdot \Psi_1 - \sqrt{\varepsilon} \cdot \nabla \times (\hat{\mathbf{n}} \cdot \Psi_2).$$

Точное аналитическое решение уравнения (1) для непараксиального пучка найдем, поместив точечный источник на оптическую ось  $z$  пучка в точку с мнимой координатой  $z = i \cdot z_0$  (где  $z_0$  — параметр пучка [8,9]), в виде:

$$\Psi_1 = A(1/k^2) \cdot j_l(k \cdot r) \cdot P_{ml}(\cos \vartheta) \cdot \exp(i \cdot l \cdot \varphi), \quad (4)$$

где  $j_l(k \cdot r)$  — сферическая функция Бесселя первого рода  $l$ -го порядка,  $P_{ml}(\cos \vartheta)$  — присоединенная функция Лежандра [10],  $j = 1, 2$ ;  $m = 1, 2, \dots$ ,  $\varphi$  — азимутальный угол,

$$r^2 = x^2 + y^2 + (z + i \cdot z_0)^2. \quad (5)$$

Как показано в работе [9], скалярное поле (4) при условии  $k \cdot z_0 \gg 1$  и  $m = 0$  преобразуется в поле параксиального гауссова пучка, что соответствует приближенным граничным условиям Дэвиса [5], если  $z_0 = k \cdot \rho^2/2$  — длина Рэлея,  $\rho$  — радиус пучка в перетяжке  $z = 0$  и  $A = (kz_0)/sh(kz_0)$ .

Опорный вектор  $\hat{\mathbf{n}}$  в (2) и (3) можно выбрать тремя независимыми способами: 1)  $\hat{\mathbf{n}} = \{1, 0, 0\}$ ; 2)  $\hat{\mathbf{n}} = \{0, 1, 0\}$ ; 3)  $\hat{\mathbf{n}} = \{0, 0, 1\}$ . Кроме того, линейность среды, в которой распространяется пучок, позволяет потребовать, чтобы 4)  $\Psi_1 \neq 0, \Psi_2 = 0$ ; 5)  $\Psi_1 = 0, \Psi_2 \neq 0$ . Эти требования предполагают существование шести полевых решений для заданной пары индексов  $(l, m)$ . Заметим, что последние два требования предполагают разделение полей мод по четности [3], в то время как первые три требования разделяют поля по направлениям поляризации. В таблице представлены аналитические выражения для компонент поля непараксиального пучка, рассчитанные на основании выражений (2)–(4).

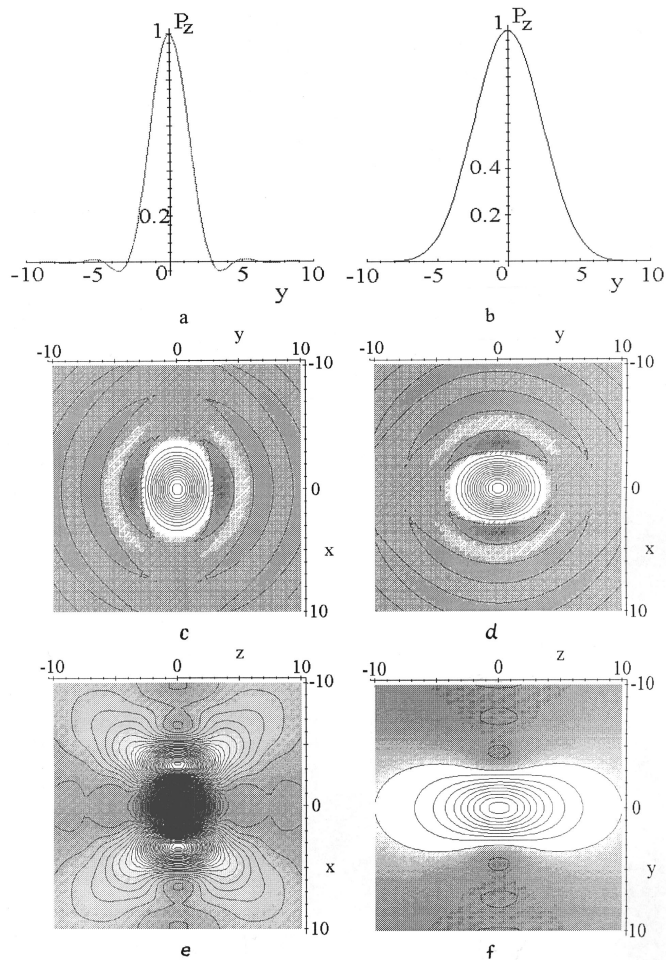
2. Из таблицы видно, что непараксиальный пучок низшего порядка ( $m = 0$ ) содержит шесть мод: четыре —  $LP(e_x) \cdot LP(e_y) \cdot LP(h_x) \cdot LP(h_y)$  не имеют фазовой сингулярности поперечных компонент на оптической оси  $R = 0$  и при  $k \cdot z_0 \gg 1$  преобразуются в параксиальный гауссов пучок. Две — ТЕ и ТМ моды имеют на оси дисклинацию поляризации [11]. Обозначения  $LP(e_{x,y}) \cdot LP(h_{x,y})$  введены по аналогии с обозначениями полей мод в оптических цилиндрических волокнах [12] и указывают на однородную линейную поляризацию либо электрического, либо магнитного полей вдоль заданного направления ( $LP$  — аббревиатура английских слов linearly polarized). Для осесимметричных пучков поля  $LP(e_x) \cdot LP(h_x)$  могут быть получены из полей  $LP(e_y) \cdot LP(h_y)$  поворотом на  $\pi/2$  и являются вырожденными. Однако всякая малая деформация поперечного сечения снимает такое вырождение.

Следует особо отметить, что, хотя электрическое и магнитное поля в каждой моде непараксиального пучка не симметричны между собой, они остаются ортогональными:  $(\mathbf{e} \cdot \mathbf{h}) = 0$ . Асимметрия полей вызывает появление отрицательного потока энергии в направлении оптической оси  $P_z = (1/2) \cdot \text{Re}(e_x h_y^* - e_y h_x^*)$  при контурном обходе точек фазовой сингулярности — колец Эйри, где  $\text{Re}\Psi = \text{Im}\Psi = 0$  [13,14]. Такое поведение продольной компоненты потока энергии  $P_z$  иллюстрируется рис. 1. На рис. 2 приведена карта распределений интенсивности и фазы  $LP(h_y)$  моды непараксиального пучка. Отчетливо прослеживаются кольца Эйри и ”мальтийский крест” в  $z$ -компоненте интенсивности, а распределение фазы сопровождается точками сингулярностей, в которых пересекаются листы волновых фронтов. Характерно, что плотность нулей интенсивности распределена не равномерно по всему кольцу, а образует ”островки сингулярностей”.

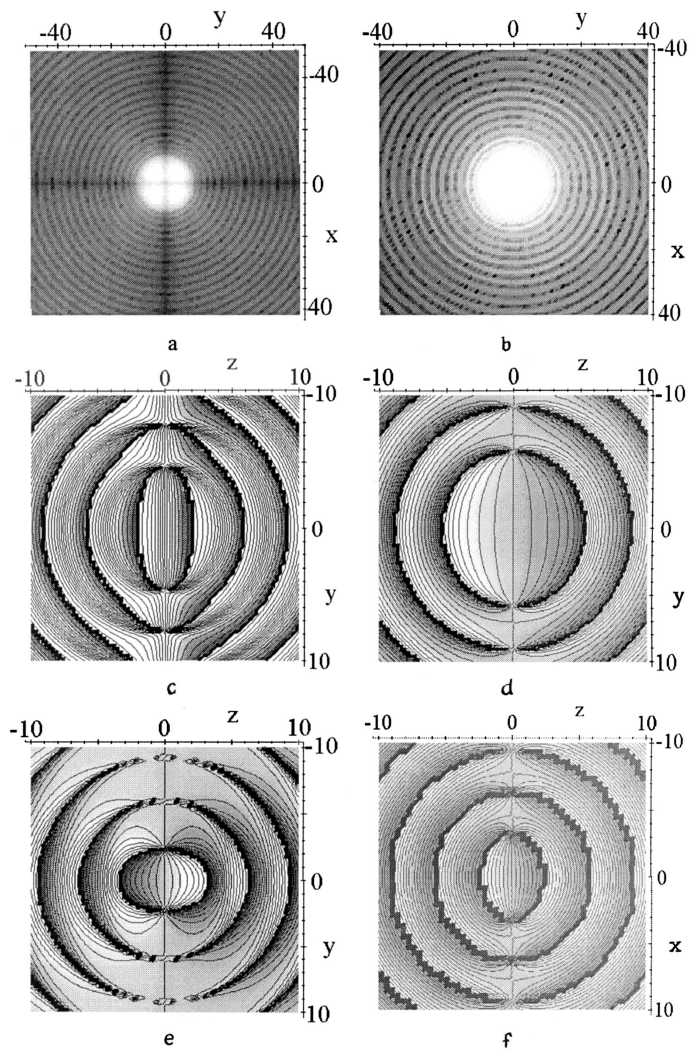
Поля мод непараксиального гауссова пучка низшего порядка ( $m = 0$ )

Моды	$e_r$	$e_z$	$\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} h_r$	$\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} h_z$
$LP(e_y)$	$\hat{y} \cdot i \cdot k(z + iz_0) \cdot F_1$	$(i/k) \frac{\partial F_0}{\partial R} \sin \varphi$	$\cdot \hat{x} G_1 + (\hat{x} \cos \varphi + \hat{y} \sin \varphi) \times F_2 k^2 R^2 \cos \varphi$	$-(z + iz_0) \frac{\partial F_0}{\partial R} \cos \varphi$
$LP(e_x)$	$-\hat{x} \cdot i \cdot k(z + iz_0) \cdot F_1$	$-(i/k) \frac{\partial F_0}{\partial R} \cos \varphi$	$\cdot \hat{y} G_1 + (\hat{x} \cos \varphi + \hat{y} \sin \varphi) \times F_2 k^2 R^2 \sin \varphi$	$-(z + iz_0) \frac{\partial F_0}{\partial R} \sin \varphi$
$LP(h_y)$	$\cdot \hat{x} G_1 + (\hat{x} \cos \varphi + \hat{y} \sin \varphi) \times F_2 k^2 R^2 \cos \varphi$	$-(z + iz_0) \frac{\partial F_1}{\partial R} \cos \varphi$	$-\hat{y} \cdot i \cdot k(z + iz_0) \cdot F_1$	$-(i/k) \frac{\partial F_0}{\partial R} \sin \varphi$
$LP(h_x)$	$\cdot \hat{y} G_1 + (\hat{x} \cos \varphi + \hat{y} \sin \varphi) \times F_2 k^2 R^2 \sin \varphi$	$-(z + iz_0) \frac{\partial F_1}{\partial R} \sin \varphi$	$\hat{x} \cdot i \cdot k(z + iz_0) \cdot F_1$	$(i/k) \frac{\partial F_0}{\partial R} \cos \varphi$
TE	$\cdot i(\hat{x} \sin \varphi - \hat{y} \cos \varphi) F_1 k R$	0	$(\hat{x} \cos \varphi + \hat{y} \sin \varphi) \times F_2 k^2 R(z + iz_0)$	$G_1 + k^2(z + iz_0)^2 F_2$
TM	$(\hat{x} \cos \varphi + \hat{y} \sin \varphi) \times F_2 k^2 R(z + iz_0)$	$G_1 + k^2(z + iz_0)^2 F_2$	$\cdot -i(\hat{x} \sin \varphi - \hat{y} \cos \varphi) F_1 k R$	0

$F_0 = j_0(kr); F_1 = j_1(kr)/(kr); F_2 = j_2(kr)/(kr)^2; G_1 = F_0 - F_1$   $r = \sqrt{R^2 + (z + iz_0)^2}, R^2 = x^2 + y^2; i = \sqrt{-1}$ .



**Рис. 1.** Зависимость нормированной продольной компоненты потока энергии  $P_z$  от радиальной координаты  $R$  для  $LP(e_y)$  моды при различных значениях длины Рэлея  $z_0 = 1$  (a) и  $z_0 = 10$  (b) для  $\varphi = 0$  и  $z = 0$ ; линии уровня интенсивности  $P_z$  для  $LP(e_y)$  — четной (c) и  $LP(h_y)$  — нечетной (d) мод при  $z_0 = 1$ , а также для  $LP(e_y) + LP(h_y)$  комбинации при  $z_0 = 2.6$ , когда  $\int P_z dS = 0$  — “капля света” (e),  $LP(e_y) - LP(h_y)$  — квазигaussian пучок (f). Все длины на рисунках представлены в единицах  $k = 2\pi/\lambda$ .



**Рис. 2.** Линии уровня интенсивности  $e_y$  компоненты  $LP(h_y)$  (a) и  $LP(e_y)$  (b) мод; линии уровня фазы для  $LP(e_y)$  (c),  $LP(h_y)$  (d) мод при  $z_0 = 1$ ,  $z = 0$ , а также  $LP(e_y) + LP(h_y)$  — «капля света» (e),  $LP(e_y) - LP(h_y)$  — квазигатуссов пучок (f).

Симметрии в записи электрического и магнитного полей непараксиального пучка можно добиться сложением полей мод:

$$LP(eh)_y = LP(e_y) \pm LP(h_y), \quad LP(eh)_x = LP(e_x) \pm LP(h_x), \quad (6)$$

тем не менее это не означает, что такие поля имеют регулярный характер. Наоборот, как будет показано в последующих работах, эти симметричные поля могут формировать сложные волновые состояния — ”капли света”, при которых  $\int P_z dS = 0$ . Заметим, что структура полей мод непараксиального гауссова пучка хорошо согласуется со структурой полей низших мод цилиндрического ступенчатого оптического волокна (см., например, табл. 12.3 в работе [12]), если заменить сферические функции Бесселя  $j_l(x)$  на их цилиндрические аналоги  $J_l(x)$ ,  $K_l(x)$ .

Особенно ярко непараксиальный характер пучка проявляется для ТЕ и ТМ мод, у которых  $z$ -компонента поля имеет порядок величины больший, чем соответствующая поперечная компонента.

3. Чтобы сравнить полученные результаты с данными других работ, выпишем с помощью таблицы соотношения между продольными и поперечными компонентами полей  $LP$ -мод:

$$LP(e_y)\text{-мода} \quad e_z/e_y = -i \cdot \eta \cdot f / (1 + i \cdot \zeta), \quad (7)$$

$$LP(h_y)\text{-мода} \quad e_z/e_x \approx -i \cdot \xi \cdot f / (1 + i \cdot \zeta), \quad (8)$$

где  $f = \rho/z_0$ ,  $\xi = x/\rho$ ,  $\eta = y/\rho$ ,  $\zeta = z/z_0$ . Эти выражения в точности совпадают с аналогичными выражениями работы [3], полученными на основании иных физических предпосылок (сравните, например, (7) и (8) с (4.8) и (4.13) в работе [3]).

В заключение хочу поблагодарить В.Г. Шведова и Т.А. Фадееву за полезную дискуссию.

## Список литературы

- [1] *Felson L.B.* // J. Opt. Soc. Amer. 1976. V. 66. N 8. P. 751–760.
- [2] *Agrawal G.P., Patanyak P.N.* // J. Opt. Soc. Amer. 1979. V. 69. N 4. P. 575–578.
- [3] *Agrawal G.P., Patanyak P.N.* // Phys. Rev. A. 1980. V. 22. N 3. P. 1159–1164.
- [4] *Davis L.W.* // Phys. Rev. A. 1982. V. 26. N 6. P. 3702–3703.
- [5] *Davis L.W.* // Phys. Rev. A. 1979. V. 19. N 3. P. 1177–1179.
- [6] *Whittaker E.T.* // Proc. Lond. Math. Soc. 1904. V. 1. P. 367–378.

- [7] *Green R.S., Wolf E.* // Proc. Phys. Soc. Lond. Sec. A. 1953. V. 66. P. 1129–1138.
- [8] *Coriure M., Belunger P.A.* // Phys. Rev. A. 1981. V. 24. N 1. P. 355–359.
- [9] *Воляр А.В., Шведов В.Г., Фадеева Т.А.* // Письма в ЖТФ. 1999. Т. 25. В. 5.
- [10] Справочник по специальным функциям // Под ред. М. Абрамовица и И. Стигана. М.: Наука, 1979. 832 с.
- [11] *Nye J.F.* // Proc. R. Soc. Lond. A. 1983. V. 387. P. 105–132.
- [12] *Снайдер А., Лав Дж.* Теория оптических волноводов. М.: Радио и связь, 1987. 656 с. (*Snyder A.V., Love J.D.* Optical waveguide theory. London, New York: Chapman and Hall, 1983).
- [13] *Nye J.E., Berry M.V.* // Proc. R. Soc. Lond. A. 1974. V. 336. P. 165–190.
- [14] *Berry M.V.* // J. Mod. Opt. 1998. V. 45. P. 1845–1851.