01

Оптимальное управление движением частицы посредством случайной силы

© *А.П. Никитин*

Саратовский государственный университет

Поступило в Редакцию 29 декабря 1999 г.

Исследуется движение частицы в пространственно-периодичном потенциале в присутствии коррелированной во времени случайной силы в случае передемпфирования. Показано, что для управления движением частицы оптимальным с точки зрения энергетических затрат является бимодальное распределение силы, если время корреляции последней достаточно велико.

Время корреляции τ_c кроме временно́го интервала предсказуемости случайного процесса во многих случаях характеризует скорость изменения его состояния. Таким образом, большое время корреляции для некоторых типов шумов означает, что свои состояния они изменяют медленно. Для решения задачи о движении частицы в периодическом потенциале (см. [1–12]) в режиме передемпфирования

$$\dot{x} = -\frac{dV(x)}{dx} + \eta(t) \tag{1}$$

(здесь x — пространственная координата частицы) для очень медленных эргодических случайных процессов $\eta(t)$ можно воспользоваться адиабатическим приближением (другое название — квазистатическое приближение [13]). Основная идея этого метода в приложении к решению уравнения (1) заключается в следующем. Предположим, что за некоторое время наблюдения $\tau_n (\tau_n < \tau_c)$ частица преодолела несколько периодов периодичного в пространстве потенциала $V(x)$ (рис. 1). И пусть случайная сила $\eta(T)$ медленная настолько, что за время τ_n вероятность того, что η изменит свое состояние на значительную величину, пренебрежимо мала. Тогда, вычислив за время τ_n среднюю скорость частицы $v_\tau(\eta)$, зависящую от η как от параметра, можно получить полную скорость частицы v путем усреднения $v_\tau(\eta)$ по стационарному распределению силы $P(\eta)$ (предполагается, что стационарное распределение существует).

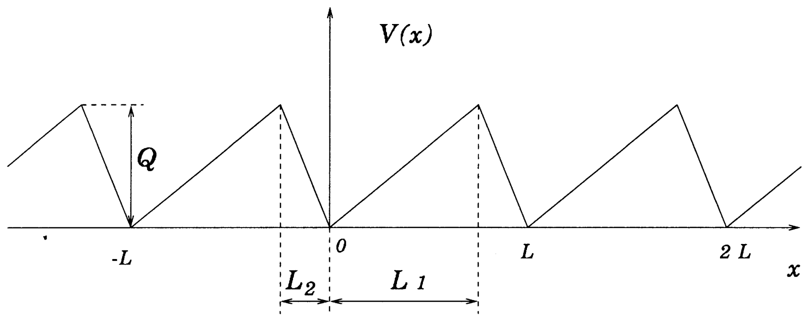

Рис. 1. Кусочно-линейный периодический потенциал $V(x)$: L — период потенциала, L_1 — длина пологого склона потенциала, L_2 — длина крутого склона потенциала, Q — высота потенциальных барьеров. Связь между параметрами потенциала следующая: $a = Q/L_1$, $b = Q/L_2$.

На практике бывает удобно заменить среднюю скорость $v_\tau(\eta)$ за время τ_n на среднюю скорость прохождения частицей одного периода потенциала v_T, так как ее вычислить проще. С другой стороны, эти скорости совпадают при $\tau_c \to \infty$, т. е. при бесконечно медленном шуме $\eta(t)$. Действительно,

$$\lim_{\tau_n\to\infty} v_\tau = \lim_{\tau_n\to\infty} \frac{1}{\tau_n}\int_0^{\tau_n} \frac{dx(t)}{dt}dt = \lim_{\tau_n\to\infty} \frac{x(\tau_n) - x(0)}{\tau_n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{nL + \Delta x}{nT + \Delta t} = \frac{L}{T} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{dx(t)}{dt}dt = v_T, \tag{2}$$

где T — время преодоления частицей одного периода L потенциала, $\Delta x \in [0, L)$, $\Delta t \in [0, T)$, n — целое неотрицательное число. Таким образом, в адиабатическом приближении вычисление средней скорости сводится к задаче определения зависимости v_T от η.

Цель настоящей работы заключается в том, чтобы дать ответ на вопрос: какое стационарное распределение должна иметь случайная сила, чтобы управлять движением частицы было наиболее выгодно

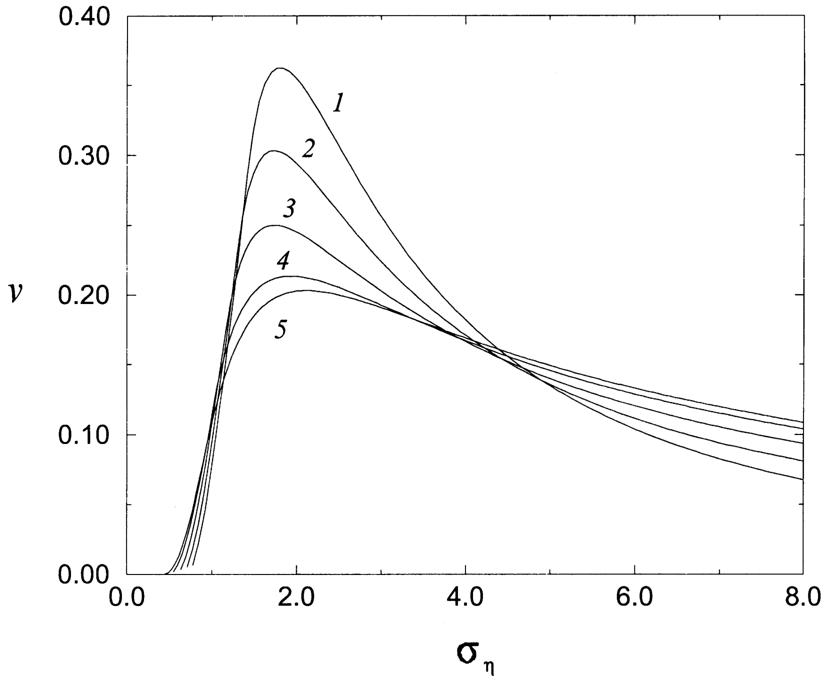

Рис. 2. График зависимостей средних скоростей v от интенсивности случайной силы σ_η. Параметры: $L = 2\pi$, $a = 1$, $b = 2$. Кривым, обозначенным цифрами *1–5*, соответствуют значения параметра α, равные $1/A^2$, $1/(2A^2)$, 0, $-1/(2A^2)$, $-1/A^2$.

с энергетической точки зрения, т. е. при минимальной интенсивности случайной силы средняя скорость была бы максимальной.

Для достижения указанной цели необходимо получить аналитическое выражение для средней скорости v как функции параметров, характеризующих распределение $P(\eta)$ и потенциал $V(x)$, и провести его анализ.

В настоящей работе представляется полученное в адиабатическом приближении аналитическое решение уравнения (1) для средней скорости частицы v при следующих предположениях:

1. Потенциал является кусочно-линейным:

$$V(x) = \begin{cases} a(x - Ln), & Ln < x < L(n + b/(a + b)); \\ -b(x - L(n + 1)), & L(n + b/(a + b)) < x < L(n + 1), \end{cases} \tag{3}$$

где a и b характеризуют асимметрию потенциала ($a > 0$ и $b > 0$), L — период, $V(x) = V(L + x)$, $n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots$ — целое число.

2. Распределение $P(\eta)$ является симметричным и задано законом:

$$P(\eta) = \begin{cases} \alpha\eta + 1/(2A) - \alpha A/2, & \eta \geqslant 0; \\ -\alpha\eta + 1/(2A) - \alpha A/2, & \eta < 0, \end{cases} \tag{4}$$

где A — амплитуда случайной силы η, α является параметром распределения, $-1/A^2 < \alpha < 1/A^2$. Если $\alpha < 0$, то $P(\eta)$ является унимодальным, $P(\eta)$ — бимодальное при $\alpha > 0$, и в случае $\alpha = 0$ распределение становится равномерным.

3. Случайная сила η имеет большое время корреляции τ_c по сравнению со временем, необходимым частице для преодоления периода потенциала. Здесь необходимо сделать замечание, что это ограничение не распространяется на ситуацию, когда частица совсем не может преодолеть потенциальные барьеры. Поэтому в этом случае скорость полагается равной нулю.

Предположение 3 позволяет решать задачу в адиабатическом приближении. Соответствующее решение имеет вид:

$$v = \begin{cases} 0, & A < a; \\ \alpha((A^3 - a^3)/3 - abA + a^2 b \\ \quad + ab(b - a)\ln|(A + b - a)/b|) \\ \quad + (1/(2A) - \alpha A/2)(A^2/2 - a^2/2 \\ \quad - ab\ln|(A + b - a)/b|), & a < A < b; \\ \alpha(b^3/3 - a^3/3 - ab^2 + a^2 b) \\ \quad + (1/A - \alpha A)(b^2 - a^2)/4 \\ \quad + \alpha ab(b - a)\ln|(A + b - a)(-A + b - a)/(ab)|) \\ \quad + (1/A - \alpha A)ab\ln|(-A + b - a)b/(A + b - a)/a|)/2, & b < A. \end{cases} \tag{5}$$

Полученные выражения для v показывают, что:

1) v не зависит от длины периода потенциала L (это является следствием условия адиабатичности);

2) зависимость средней скорости v от интенсивности случайной силы $\sigma_\eta(\sigma_\eta = \sqrt{D}$, где D — второй момент распределения $P(\eta))$ имеет максимум (рис. 2), причем

3) с увеличением α скорость v в максимуме монотонно возрастает и

4) наибольшее возможное значение v приобретает при бимодальном распределении ($\alpha = 1/A^2$). Кроме того,

5) коэффициент преобразования энергии шума η в направленное движение частицы $K = v/\sigma_\eta$ максимальное значение принимает при $\alpha = 1/A^2$, т.е. при бимодальном распределении $P(\eta)$.

На основании последнего результата можно сделать вывод о том, что для управления движением частицы или, другими словами, направленного ее перемещения наиболее оптимальным с точки зрения энергетических затрат является бимодальное распределение случайной силы, если время корреляции последней достаточно велико.

Результаты исследования могут быть полезными при разработке систем, предназначенных для направленного перемещения частиц в условии отсутствия постоянного градиента внешних сил [14–17].

Работа выполнена при поддержке Госкомвуза России по фундаментальному естествознанию (грант 97–0–8.3–47).

Список литературы

[1] *Magnasco M.* // Phys. Rev. Lett. 1994. V. 72. P. 2656–2659.
[2] *Doering Ch. R., Horsthemke W., Riordan J.* // Phys. Lett. 1994. V. 72. P. 2984–2987.
[3] *Astumian R.D., Bier M.* // Phys. Rev. Lett. 1994. V. 72. P. 1766–1769.
[7] *Bier M.* // Phys. Lett. A. 1996. V. 211. P. 12–16.
[8] *Никитин А.П.* // Изв. вузов ПНД. 1997. Т. 5. № 1. С. 30–41.
[9] *Постнов Д.Э., Никитин А.П., Анищенко В.С.* // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22. В. 9. С. 24–29.
[10] *Никитин А.П., Постнов Д.Э.* // Письма в ЖТФ. 1998. Т. 24. В. 2. С. 47–53.
[11] *Ланда П.С.* // Изв. вузов ПНД. 1998. Т. 6. № 5. С. 3–18.
[12] *Малахов А.Н.* // Письма в ЖТФ. 1998. Т. 24. В. 21. С. 9–15.
[13] *Стратонович Р.Л.* // Избранные вопросы теории флюктуаций в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1961. 558 с.

[14] *Faucheux L.P., Bourdieu L.S., Kaplan P.D., Libchaber A.J.* // Phys. Rev. Lett. 1995. V. 74. N 9. P. 1504–1507.
[15] *Gorre-Talini L., Silberzan P.* // J. Phys. I France. 1997. N 7. P. 1475–1485.
[16] *Gorre-Talini L., Silberzan P.* // Phys. Rev. E. 1997. V. 56. N 2. P. 2025–2034.
[17] *Astumian R.D.* // Science. 1997. V. 276. P. 917–922.