

01;03

## О взаимодействии капиллярных волн на заряженном тангенциальном разрыве поля скоростей

© С.О. Ширяева, О.А. Григорьев, Д.Ф. Белоножко

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

Поступило в Редакцию 10 января 2000 г.

В рамках линейной математической модели капиллярного волнового движения в двухслойной жидкости показано, что в результате взаимодействия волн, порождаемых свободной поверхностью верхнего слоя жидкости, движущегося поступательно с постоянной скоростью параллельно границе раздела сред, и волн, порождаемых заряженной границей раздела, кроме классической неустойчивости типа Кельвина–Гельмгольца в области малых значений скорости верхней среды имеет место колебательная неустойчивость границы раздела с инкрементом, зависящим от отношения плотностей сред, скорости поступательного движения и величины заряда на границе.

Неустойчивость заряженной границы раздела двух идеальных несмещающихся жидкостей различных плотностей, каждая из которых заполняет полубесконечное пространство, а верхняя жидкость движется с постоянной скоростью  $U$  параллельно границе раздела, представляет интерес в связи с многочисленными приложениями в геофизике, технической физике и химической технологии [1–6] и поэтому достаточно подробно исследована как экспериментально, так и теоретически. Тем не менее вопрос о влиянии конечности толщины слоя верхней жидкости на закономерности развития неустойчивости границы раздела сред пока не изучен.

1. Исследование проведем на простейшей модели идеальных несжимаемых жидкостей, когда верхняя диэлектрическая жидкость имеет толщину  $h$  и плотность  $\rho_1$ , а нижняя с плотностью  $\rho_2$  заполняет в поле сил тяжести  $\mathbf{g}$  полубесконечное пространство  $z < 0$  ( $\mathbf{g} \parallel -\mathbf{n}_z$ , а  $\mathbf{n}_z$  есть орт декартовой оси  $OZ$ , перпендикулярной границе раздела, плоскость  $XOY$  совпадает с невозмущенной границей раздела верхней и нижней сред). Примем, что на невозмущенной капиллярным движением границе раздела имеется электрический заряд с плотностью  $\sigma$ .

Эволюция капиллярных волн в такой системе может быть определена при решении задачи нахождения гармонических потенциалов  $\psi_1$  и  $\psi_2$  полей скоростей капиллярных движений верхней и нижней жидкостей:

$$\Delta\psi_j = 0; \quad j = 1; 2; \quad (1)$$

$z = h$ :

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial z} \approx U \frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{\partial\zeta}{\partial t}; \quad \rho_1 \frac{\partial\psi_1}{\partial t} + \rho_1 g\zeta + \frac{1}{2}\rho_1(\nabla\psi_1)^2 - \alpha_1 \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} = 0; \quad (2)$$

$z = 0$ :

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial z} \approx U \frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial t}; \quad \frac{\partial\psi_2}{\partial z} \approx \frac{\partial\xi}{\partial t};$$

$$\rho_1 \left[ \frac{\partial\psi_1}{\partial t} + g\xi + \frac{1}{2}(\nabla\psi_1)^2 \right] = \rho_2 \left[ \frac{\partial\psi_2}{\partial t} + g\xi \right] + \frac{4\pi}{\varepsilon} \sigma^2 k\xi - \alpha_2 \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}. \quad (3)$$

Здесь  $\zeta(x, t)$  и  $\xi(x, t)$  — возмущения свободной поверхности верхнего слоя и границы раздела сред, связанные с капиллярным волновым движением;  $U$  — постоянная скорость движения верхней жидкости относительно нижней, направление которой определит ориентацию оси  $Ox$ ;  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — коэффициенты поверхностного натяжения свободной поверхности и границы раздела;  $\varepsilon$  — диэлектрическая проницаемость верхней жидкости [6]. Потенциалы поля скоростей движений в верхней и нижней жидкостях и возмущения  $\zeta(x, t)$  и  $\xi(x, t)$  естественно искать в виде:

$$\psi_1 = (A_1 \exp(kz) + A_2 \exp(-kz)) \cos(kx - \omega t) + Ux; \quad (4)$$

$$\psi_2 = B \exp(kz) \cdot \cos(kx - \omega t); \quad \zeta = C \sin(kx - \omega t); \quad \xi = D \sin(kx - \omega t).$$

По аналогии с тем, как это было сделано в [6], на основе задачи (1)–(4) выпишем соотношения, определяющие временную зависимость амплитуд капиллярных волн на свободной поверхности и на границе раздела сред:

$$\zeta = \zeta_0 \operatorname{Re} \exp \left\{ it \left[ kU + (Hkg + H\alpha_1\rho_1^{-1}k^3)^{1/2} \right] \right\}, \quad (5)$$

$$\xi = \xi_0 \operatorname{Re} \exp \left\{ it \left[ -k\rho U \pm (G\rho (\omega_*^2 + \rho\rho_2\rho_1^{-1}k^2U^2))^{1/2} \right] \right\}, \quad (6)$$

$$\omega_*^2 \equiv \rho_1^{-1} [gk(\rho_2 - \rho_1) + \alpha_2 k^3 - 4\pi\varepsilon^{-1}\sigma k^2] = 0,$$

$$\rho \equiv \frac{\rho_1}{G\rho_2 - \rho_1}, \quad G = \frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2}, \quad H = \frac{A_1 \exp(kh) - A_2 \exp(-kh)}{A_1 \exp(kh) + A_2 \exp(-kh)},$$

$\zeta_0$  и  $\xi_0$  — начальные значения амплитуд капиллярных волн.

Рассмотрим ситуацию, когда слой верхней жидкости настолько тонок, что зависимость поля скоростей капиллярных движений в нем весьма слабо зависит от толщины слоя  $h$ . Тогда можно принять, что коэффициенты  $G$  и  $H$  равны друг другу по величине, но имеют в соответствии с их смыслом (знаки коэффициентов  $G$  и  $H$  у той или иной границы характеризуют соотношение вкладов в потенциал  $\psi_1$  слагаемых  $\sim \exp(kz)$  и  $\sim \exp(-kz)$  соответственно) противоположные знаки. Примем также, что волны, порождаемые свободной поверхностью верхнего слоя и границей раздела сред, взаимодействуют между собой. В рассматриваемой линейной по малым возмущениям  $\zeta$  и  $\xi$  математической модели взаимодействие волн может реализоваться только резонансным способом, что означает равенство частот у взаимодействующих волн. Из этих условий несложно получить квадратное алгебраическое уравнение для определения неизвестной константы  $H$ :

$$H^2 - H \left[ kU^2 (g + \alpha_1 \rho_1^{-1} k^2)^{-1} - 2\rho_1 \rho_2^{-1} \right] + \rho_1 \rho_2^{-1} = 0. \quad (7)$$

Из (7) легко видеть, что существует несколько областей значений физических параметров системы, в которых оба корня этого уравнения положительны. В частности, когда коэффициент при  $H$  много больше свободного члена, оба корня положительны и существенно различаются по абсолютной величине. Согласно (5), (6), с учетом принятого соотношения  $G = -H$ , несложно найти, что каждому из  $H_j$  соответствуют два устойчивых волновых движения и два неустойчивых. Поскольку величины инкрементов неустойчивостей, соответствующих различным корням  $H_j$  приблизительно пропорциональны  $H_j^{1/2}$ , а корни  $H_1$  и  $H_2$  имеют при сделанных выше предположениях разные порядки величин, то соответствующие движения легко различимы. Таким образом, мы получили, что при тонких слоях верхней жидкости возможно существование нескольких областей значений физических параметров, в которых имеет место неустойчивость. Для конкретизации полученного результата проанализируем дисперсионное уравнение задачи.

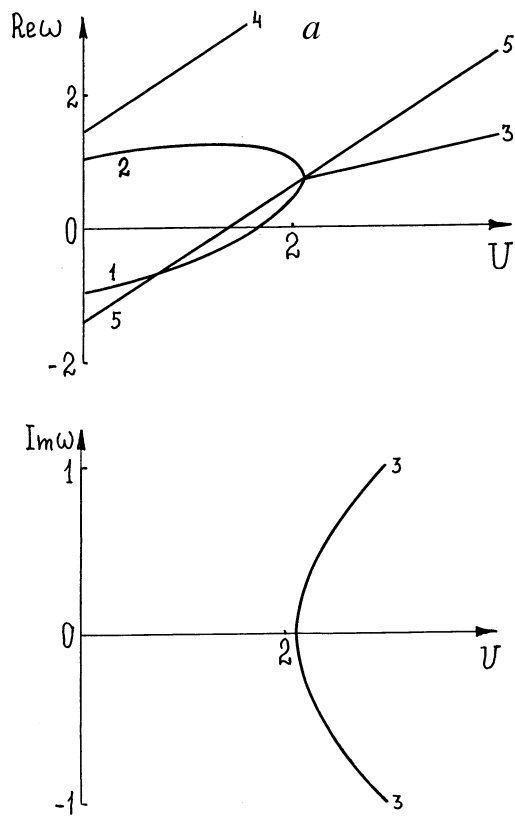
2. Подставляя (7) в граничные условия (2)–(6) легко получить дисперсионное уравнение, имеющее при  $\rho_2 = \alpha_2 = g = 1$  безразмерный вид:

$$\begin{aligned}
 & [1 + \rho_1 \operatorname{th}(kh)]\omega^4 - 2Uk[2\rho_1 \operatorname{th}(kh) + 1]\omega^3 \\
 & + \left[ \rho_1 \operatorname{th}(kh) \left[ 6(Uk)^2 - \frac{k}{\rho_1} \left( 1 + \frac{\alpha k^2}{\rho_1} \right) \right] \right. \\
 & \left. + k[1 + k^2 + \alpha k^2 - Wk] - (Uk)^2 \right] \omega^2 \\
 & - 2k^2U[2\rho_1 kU^2 \operatorname{th}(kh) - (1 + k^2 + \alpha k^2 - Wk)]\omega \\
 & - k^2 \left[ \rho_1 \operatorname{th}(kh) \left[ 1 + \frac{\alpha k}{\rho_1} + U^4 k^2 + \left( \frac{\alpha k}{\rho_1} + 1 \right) (1 - k^2) + Wk \right] \right. \\
 & \left. + U^2 k [1 + k^2 - Wk - \rho_1] \right] = 0; \quad W \equiv 4\pi\sigma^2\varepsilon^{-1}. \quad (8)
 \end{aligned}$$

На рисунке, *a–c* приведены результаты численного исследования по (8) влияния толщины верхнего движущегося жидкого слоя на закономерности развития неустойчивости. На приведенных рисунках вещественная часть комплексной частоты определяет частоты капиллярных движений жидкости, а мнимая — инкременты неустойчивости (в области  $\operatorname{Im} \omega > 0$ ) и декременты затухания (в области  $\operatorname{Im} \omega < 0$ ).

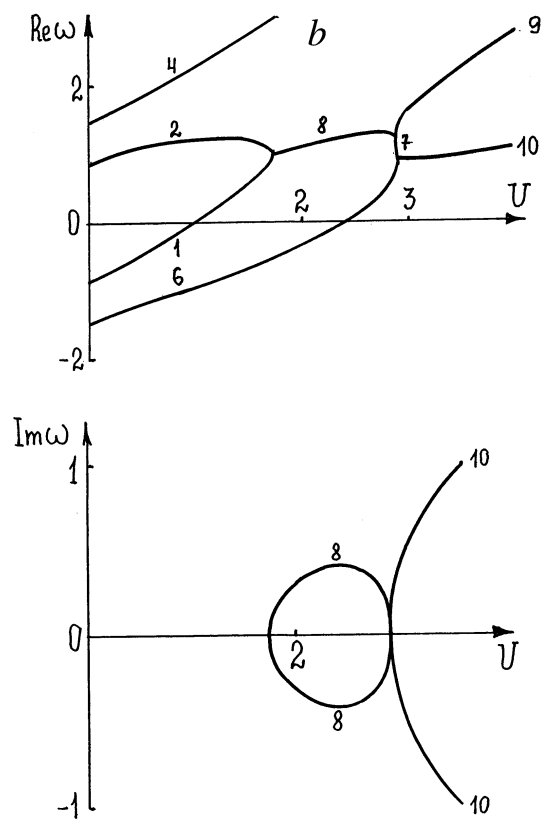
Ветви дисперсионного уравнения с номерами *1, 2, 3* на рисунке *a* описывают капиллярные движения, порождаемые границей раздела сред. Ветви с номерами *4* и *5* описывают капиллярные волновые движения, порождаемые свободной поверхностью верхней жидкости. Видно, что ветви *4, 5* и *1, 2, 3* не взаимодействуют друг с другом. На рисунке *a* ветви *4* и *5* являются параллельными прямыми, ориентированными (в соответствии с эффектом Допплера) под некоторым углом к оси абсцисс (оси *U*). Очевидно, что ветвь *4* описывает волну, распространяющуюся по направлению **U**, а ветвь *5* соответствует такой же волне, бегущей в противоположном направлении.

При уменьшении безразмерной толщины слоя верхней жидкости (см. рисунок, *b*) до значений  $h \sim 1$  ветви *1, 2, 3* начинают взаимодействовать с ветвями *4* и *5* с образованием новых составных движений *6, 7, 8, 9, 10* и деформированием ветвей *1, 2, 4*. Причем движения *4, 6, 7, 9* являются волновыми незатухающими, а движения *8* и *10* содержат как периодически экспоненциально затухающие (для которых  $\operatorname{Im} \omega < 0$ ), так



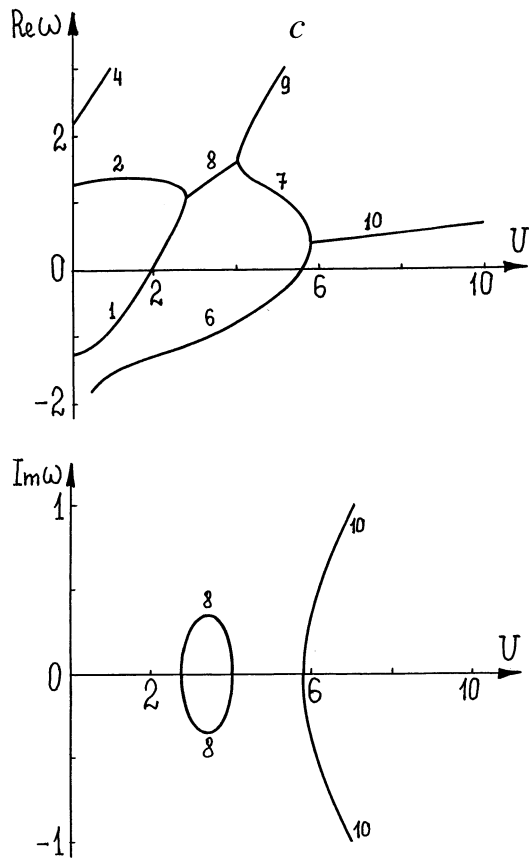
Зависимости действительной  $\text{Re } \omega = \text{Re } \omega(U)$  и мнимой  $\text{Im } \omega = \text{Im } \omega(U)$  частей комплексной частоты от скорости верхней жидкости, рассчитанные при  $k = 1$ ;  $\alpha_1 = 0.5$ ;  $W = 0$  и различных значениях  $h$  и  $\rho_1$ :  $a - h = 5$ ,  $\rho_1 = 0.5$ ;  $b - h = 0.9$ ,  $\rho_1 = 0.5$ ;  $c - h = 0.9$ ,  $\rho_1 = 0.1$ ;

и периодически экспоненциально нарастающие (неустойчивые) ветви (для которых  $\text{Im } \omega > 0$ ). Неустойчивое движение 10 соответствует классической неустойчивости Кельвина–Гельмгольца, и для него критическая скорость начала реализации неустойчивости  $U_*$  увеличивается с уменьшением толщины слоя верхней жидкости (см. рисунок,  $a-c$ ). Неустойчивое движение 8 обязано своим происхождением взаимодействию



Продолжение рисунка.

капиллярных движений, порождаемых свободной поверхностью верхней жидкости и границей раздела сред. Как показывают численные расчеты при уменьшении безразмерной толщины слоя верхней жидкости области реализации неустойчивых движений 8 и 10 смещаются в противоположные стороны. В сторону меньших значений скорости верхней жидкости  $U$  смещается область реализации движения 8, вызванного взаимодействием волн. Уменьшение плотности верхней жидкости ускоряет этот эффект, как это можно видеть из рисунка, *b, c*.



*Продолжение рисунка.*

3. В заключение можно отметить. При толщинах слоя верхней жидкости, меньших капиллярной постоянной нижней жидкости, имеет место взаимодействие капиллярных движений, порождаемых свободной поверхностью верхней жидкости и границей раздела сред, приводящее к появлению дополнительной, ранее не известной колебательной неустойчивости, критические условия реализации которой снижаются

с уменьшением толщины слоя, хотя при этом снижается и величина инкремента. Наличие на границе раздела сред нескомпенсированного электрического заряда усиливает этот эффект.

## Список литературы

- [1] *Sydora R.D., Wagner J.S., Lee J.S.* et al. // *Phys. Fluids*. 1983. V. 26. N 10. P. 2986–2991.
- [2] *Sneyd A.D.* // *J. Fluid Mech.* 1985. V. 156. P. 223–236.
- [3] *Кузнецов В.М., Лушников П.М.* // *ЖЭТФ*. 1995. Т. 108. № 2(8). С. 614–630.
- [4] *Григорьев О.А., Ширяева С.О.* // *ЖТФ*. 1996. Т. 66. В. 2. С. 23–34.
- [5] *Григорьев А.И., Коромыслов В.А., Ширяева С.О.* // *ЖТФ*. 1999. Т. 69. В. 5. С. 7–14.
- [6] *Григорьев А.И.* // *ЖТФ*. 2000. Т. 70. В. 1. С. 24–26.