

04;11

Термоэлектронные облака и заряд пылинок

© С.И. Яковленко

Институт общей физики РАН, Москва

Поступило в Редакцию 12 июля 1999 г.

На основе точного решения уравнения Пуассона–Больцмана в плоском случае рассмотрены свойства равновесных термоэмиссионных облаков вокруг пылевых частиц с большой плотностью заряда на поверхности. Показано, что равновесное значение зарядов пылинок существенно меньше того значения, которое при соответствующей температуре получено в экспериментах. Отмечено, что термоэмиссионная пылевая плазма в имеющихся экспериментах является переохлажденной по степени ионизации.

Введение. Последнее время большое внимание уделяется рассмотрению пылевой плазмы, формирующейся за счет термоэмиссии электронов из пылинок [1–5]. При этом большой интерес представляет вопрос о равновесных распределениях электронных облаков в таких системах. При большой плотности заряда на пылинке становится справедливой плоская модель, в рамках которой можно точно решить уравнение Пуассона–Больцмана и определить равновесное распределение основного заряда в термоэлектронном облаке.

Уравнение Пуассона–Больцмана. Пусть электронный газ над плоской поверхностью формируется за счет термоэмиссии электронов из тела при температуре T . Для нахождения распределения потенциала ϕ , напряженности поля $\mathbf{F} = -\nabla\phi$ и плотности заряда eN_e следует решить уравнение Пуассона, в котором плотность заряда определяется распределением Больцмана $N_e = N_{e1} \exp(e\phi)$. Здесь N_{e1} — плотность электронов в тех точках, где потенциал равен нулю; учтено, что заряд электрона отрицателен. В общем случае уравнение Пуассона–Больцмана имеет вид: $\Delta\phi = 4\pi e^2 N_{e1} \exp(e\phi)$.

Будем измерять длину в единицах $d = 8\pi e^2/T$. Кроме того, выберем нулевое значение потенциала в точке, где $(8\pi e^2/T)^3 N_{e1} = 1$. Введем безразмерные величины — потенциал φ , напряженность поля \mathbf{E} и плотность электронов n_e — с помощью соотношений: $\varphi = \phi e/T$,

$E = Fed/T = FT^2/8\pi e$, $n_e = (8\pi e^2/T)^3 N_e$. Тогда уравнение Пуассона–Больцмана в плоском случае, когда все величины зависят только от безразмерной координаты x по некоторой оси, перпендикулярной заряженной плоскости, принимает вид

$$d^2\varphi/dx^2 = (1/2)\exp(\varphi), \quad E = -d\varphi/dx, \quad n_e = \exp(\varphi).$$

Граничные условия и классификация решений. При рассмотрении такого рода задач как для плоской, так и для сферически-симметричной геометрии обычно выбирают граничные условия, соответствующие обращению в нуль как потенциала, так и напряженности поля в некоторой точке [4–6].

Однако в общем случае следует задавать плотность положительного заряда на стенке σ . При этом задается значение напряженности поля на стенке $F_0 = F(x=0)$, $E_0 = E(x=0)$. Оно соответствует напряженности поля в плоском конденсаторе: $F_0 = 4\pi\sigma$ или $\sigma d^2/e = 2E_0$. Мы здесь рассмотрим именно такую постановку задачи.

Второе граничное условие в случае компенсированного заряда плоскости (см. ниже) выберем в некоторой точке a_0 , соответствующей нулевой напряженности поля, где заряд плоскости полностью компенсируется зарядом слоя электронов $E(a_0) = 0$.

Понизим порядок уравнения Пуассона–Больцмана, рассматривая напряженность поля как функцию потенциала $EdE/d\varphi = (1/2)\exp(\varphi)$. Первое интегрирование дает связь напряженности поля с потенциалом $E = (\exp(\varphi) + E_1^2 - 1)^{1/2}$. Здесь E_1 — значение напряженности поля в той точке $x = a_1$, где потенциал равен нулю $\varphi(a_1) = 0$, а безразмерная плотность электронов равна единице.

Возможны три типа решений уравнения

$$-d\varphi/dx = (\exp(\varphi) + E_1^2 - 1)^{1/2},$$

которым отвечают физически разные задачи. Рассмотрим их.

Когда $E_1 > 1$, поле нигде не обращается в нуль. Это имеет место, если заряд плоскости не компенсирован зарядами электронов.

Когда $E_1 = 1$, поле обращается в нуль при $\varphi = -\infty$. Эта ситуация соответствует электронному облаку, создаваемому одной плоскостью, причем нулевое значение поля, имеет место на бесконечном расстоянии от плоскости, $a_0 \rightarrow \infty$.

Когда $E_1 < 1$, поле обращается в нуль при конечном значении потенциала $\varphi_1 = 2\ln(1 - E_1^2)$. Эта ситуация соответствует, например, электронному облаку, создаваемому между двумя идентичными заряженными плоскостями, причем нулевое значение напряженности поля имеет место в точке a_0 , соответствующей половине расстояния между этими плоскостями.

Случай одной плоскости. Интегрируя уравнение $-d\varphi/dx = \exp(\varphi/2)$, получаем:

$$\varphi(x) = 2\ln[2E_0/(xE_0 + 2)], E(x) = 2E_0/(xE_0 + 2), n_e(x) = [2E_0/(xE_0 + 2)]^2.$$

Потенциал обращается в нуль, а поле и плотность электронов становятся равными единице в точке $a_1 = 2 \cdot (1 - 1/E_0)$, которая может лежать как слева, так и справа от заряженной плоскости.

Величина $2/E_0$ дает характерную ширину области спада плотности электронов и напряженности поля. При большой плотности заряда на стенке слой электронов, компенсирующий этот заряд, становится узким и область основного изменения различных характеристик электронного облака можно рассматривать на основе плоской задачи даже в случае пылинки сложной геометрии.

Выразим поверхностную напряженность поля E_0 через термоэмиссионные характеристики. Термоэмиссионная плотность тока определяется формулой Ричардсона–Дешмана: $j = A \exp(-b/T)$, $A = 4\pi m_e e/h^3 = 120 \text{ А/см}^2$. Здесь b — работа выхода электронов со стенки, $h = 2\pi\hbar$ — постоянная Планка. Из условия равенства термоэмиссионного тока обратному тепловому току $j = e(T/2\pi m_e)^{1/2} N_{e0}$ имеем плотность электронов на границе:

$$N_{e0} = N(b)\vartheta^{3/2} \exp(-1/\vartheta),$$

$$N(b) = 2(m_e b/2\pi\hbar^2)^{3/2} = 6.04 \cdot 10^{21} \text{ см}^{-3} \cdot (b/\text{eV})^{3/2},$$

где $\vartheta = T/b$. Отсюда следует безразмерное значение приповерхностной плотности электронов:

$$n_{e0} = C(b)\vartheta^{-3/2} \exp(-1/\vartheta),$$

$$C(b) = 2(m_e/2\pi\hbar^2)^{3/2} (8\pi e^2)^3 / b^{3/2} = 2.9 \cdot 10^5 \cdot (\text{eV}/b)^{3/2}.$$

Из равенства $n_{e0} = E_0^2$ имеем значение граничной напряженности поля $E_0 = n_{e0}^{1/2}$, через которую, согласно полученным выше формулам,

просто выражается как поверхностная плотность зарядов, так и зависимость от координаты x всех остальных величин: $\varphi(x)$, $E(x)$, $n_e(x)$.

Случай двух плоскостей. Интегрирование уравнения $-d\varphi/dx = [\exp(\varphi/2) - k^2]^{1/2}$, где $k \equiv (1 - E_1^2)^{1/2}$, дает

$$\varphi(x) = \ln(E^2 + k^2), \quad E(x) = k \cdot \operatorname{tg}[a_0 - x)k/2], \quad n_e(x) = (E^2 + k^2).$$

Поле обращается в нуль при $a_0 = (2/k) \cdot \operatorname{arctg}(E_0/k)$. Величину k следует выбирать такой, чтобы значения E_0 и a_0 соответствовали заданным значениям плотности заряда на плоскости и половине расстояния между плоскостями (см. ниже). Плотность электронов в рассматриваемой

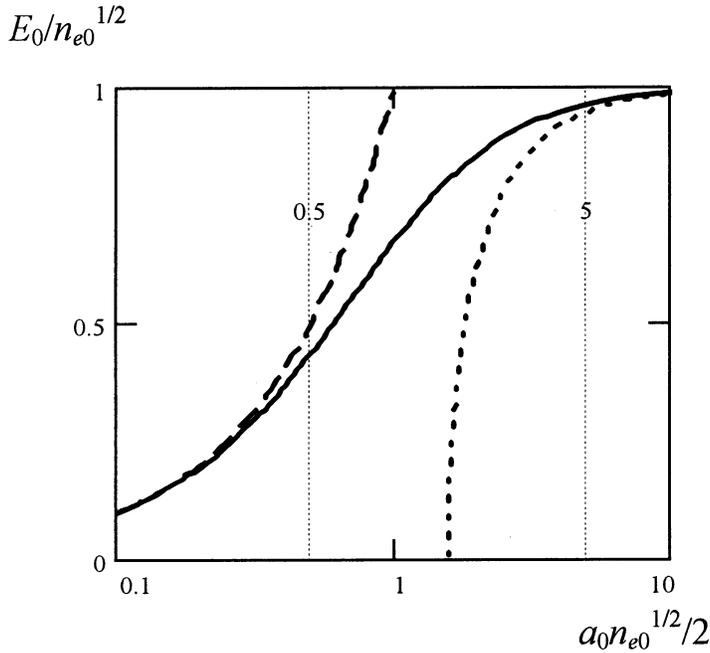


Рис. 1. Зависимость приведенной напряженности поля на стенке $\varepsilon = E_0/n_{e0}^{1/2}$ от приведенного расстояния между стенками $\alpha = a_0 n_{e0}^{1/2}/2$ (сплошная кривая). Пунктир соответствует приближенному выражению для больших расстояний $\varepsilon = (1 - (\pi/2\alpha)^2)^{1/2}$, ($\alpha \rightarrow \infty$); штрихи — приближенному выражению для малых расстояний $\varepsilon = \alpha$, ($\alpha \rightarrow 0$), когда электроны выдавливаются на стенки.

области $0 \leq x \leq a_0$ не обращается в нуль. При $k = 1$ полученное решение соответствует большой плотности заряда на стенке $E_0 \gg 1$, когда потенциал и поле обращаются в нуль практически в одной точке $a_0 = \pi$ (см. [4,5]).

Зависимость поверхностной напряженности поля E_0 от термоэмиссионных характеристик для двух заряженных плоскостей несколько отличается от рассмотренного выше случая одной заряженной плоскости. Используя равенство $n_{e0} = E_0^2 + k^2$ и подставляя $k = (n_{e0} - E_0^2)^{1/2}$ в выражение для a_0 , имеем

$$\alpha = (1 - \varepsilon^2)^{-1/2} \arctg[\varepsilon / (1 - \varepsilon^2)^{1/2}], \quad \alpha = a_0 n_{e0}^{1/2} / 2, \quad \varepsilon = E_0 / n_{e0}^{1/2}.$$

Это выражение задает E_0 как функцию, обратную зависимости $\alpha(\varepsilon)$ (рис. 1).

При больших расстояниях между плоскостями, когда $\alpha \gg 1$, $\varepsilon(\alpha) \rightarrow 1$, имеет место то же выражение для граничной напряженности поля, что и в случае одной плоскости $E_0 = n_{e0}^{1/2}$. При малых расстояниях между плоскостями, когда $\alpha \ll 1$, $\varepsilon(\alpha) \rightarrow 0$, граничная напряженность поля (и с нею плотность заряда на стенке) стремится к нулю ($E_0 \rightarrow 0$, при $a_0 \rightarrow 0$). Плоскости как бы выдавливают электроны на стенки.

Значение $a_0 = a_{bd}$, разделяющее эти области зависимостей E_0 от a_0 , равно эффективной ширине пристеночного слоя электронов, создаваемого одной плоскостью $a_{bd} = 2/E_0 = 2n_{e0}^{-1/2}$.

Некомпенсированный заряд. Для распределения электронов вблизи заряженной плоскости с некомпенсированным зарядом решение уравнения Пуассона–Больцмана дает следующие выражения:

$$E(x) = \kappa \frac{e^{\kappa x}(E_0 + \kappa) + (E_0 - \kappa)}{e^{\kappa x}(E_0 + \kappa) - (E_0 - \kappa)}, \quad n_e = \frac{4e^{\kappa x}(E_0^2 - \kappa^2)\kappa^2}{(e^{\kappa x}(E_0 + \kappa) - (E_0 - \kappa))^2},$$

$$\varphi(x) = \ln(n_e/\kappa^2), \quad a_1 = \kappa \ln \left(\frac{E_0 + \kappa}{E_0 - \kappa} \right), \quad E_0 = \sqrt{n_{e0} + \kappa^2}.$$

Величина $\kappa = E(\infty)$ соответствует плотности некомпенсированного заряда плоскости, она должна определяться из дополнительных соображений. Вообще говоря, наличие некомпенсированного заряда означает, что система не вполне равновесна. В термодинамическом равновесии находятся лишь слой электронов вблизи плоскости. Часть же электронов, соответствующая некомпенсированному заряду, не является термодинамически равновесной. Имеется сдвиг ионизационного равновесия.

Поверхностный заряд пылинки. Ориентируясь на эксперименты [2,3], рассмотрим характерные величины для термоэмиссионной плазмы CrO_2 . Средний радиус пылинок и плотность числа пылинок имели значения $r_0 \approx 0.4 \mu\text{m}$, $N_p \sim 5 \cdot 10^7 \text{ cm}^{-3}$ соответственно. Средний заряд пылинок $Z_p \approx 500 \div 1000$ был определен из соотношения квазинейтральности плазмы по зондовым измерениям плотности электронов N_e . При температуре $T = 1700 \text{ K}$ наблюдалось некоторое упорядочивание в расположении пылинок.

При таких параметрах граничное значение безразмерной напряженности поля и отношение радиуса пылинки к характерной толщине электронного слоя составляют

$$E_0 \approx (1/2)(Z_p/4\pi r_0^2)(8\pi e^2/T) \approx 7.6 \div 15; (r_0/E_0)(T/8\pi e^2) \approx 0.2 \div 0.1.$$

Это позволяет использовать плоскую модель.

Если исходить из рассмотренных выше равновесных условий, заряд на поверхности пылинки и размерная ширина электронного слоя определяются выражениями

$$Z_p = 2n_{e0}^{1/2}(8\pi e^2/T)^{-2}(4\pi r_0^2), \quad a_{bd} = (2/n_{e0}^{1/2})(8\pi e^2/T).$$

В работах [1,2] приведены несколько различающиеся значения работы выхода CrO_2 : $b_1 = 2.75 \text{ eV}$ и $b_2 = 2.1 \text{ eV}$ соответственно. Хотя значение b_2 представляется более адекватным использованному материалу, ниже даны зависимости для обоих значений b . При температуре $T = 1700 \text{ K}$ эти величины составляют: $Z_p(b_1) \approx 13$, $Z_p(b_2) \approx 115$; $a_{bd}(b_1) \approx 7 \cdot r_0$, $a_{bd}(b_2) \approx 0.7 \cdot r_0$. Как указано выше, экспериментальное значение заряда пылинки при этой температуре было существенно больше.

Рассмотрение зависимости Z_p и a_{bd} от температуры (рис. 2) показывает, что в термодинамическом равновесии значение заряда пылинки $Z_p \approx 500$ достигается лишь при $T = 2000 \text{ K}$. При этом $a_{bd}(b_2) \approx 0.17 \cdot r_0$. Расстояние между пылинками во всех случаях достаточно велико $N_p^{-1/3} \approx 70 \cdot r_0$, что позволяет пренебречь обсуждавшимся выше эффектом выдавливания электронов.

Существенно более высокое значение температуры $T = 2000 \text{ K}$, при которой в термодинамическом равновесии поверхностный заряд пылинок соответствует фактически имеющемуся, по сравнению с экспериментальным значением температуры $T = 1700 \text{ K}$ можно связать с неточностью определения работы выхода для "гофрированных" частиц

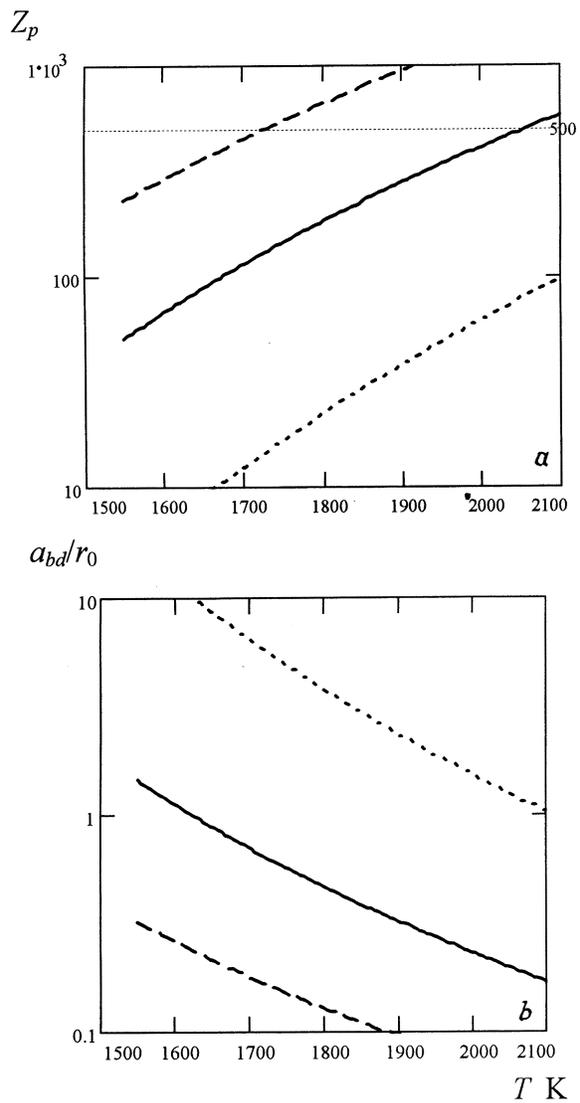


Рис. 2. Зависимости заряда частицы (а) и отношения толщины слоя к радиусу частицы (б) для различных значений b : сплошная кривая — $b = 2.1$ eV; пунктир — $b = 2.75$ eV; штрихи — $b = 1.7$ eV.

малого размера. Тогда для согласия с экспериментами следует положить $b = 1.7 \text{ eV}$ (рис. 2). Кроме того, поверхность "гофрированной" пылинки превосходит величину $4\pi r_0^2$.

Однако, по-видимому, дело не только в этом. Если доверять результатам измерений [2,3], то надо предположить, что по каким-то причинам имеет место нарушение термодинамического равновесия. При этом формируется некомпенсированный заряд пылинки, соответствующий неравновесным электронам.

Об определении некомпенсированного заряда пылинки из уравнений баланса. Некомпенсированный заряд пылинки вычислялся в работах [4,7] на основе рассмотрения баланса термоэмиссии и тройной рекомбинации. Для $b = 2.75 \text{ eV}$ было получено $Z_p \approx 230$ при $T = 1700 \text{ K}$. Если в результирующих формулах [4,7] положить $b = 2.1 \text{ eV}$, получим $Z_p \approx 410$; для $b = 1.7 \text{ eV}$ имеем $Z_p \approx 520$.

В работе [3] оценка заряда пылинки проведена из равенства эмиссионного j^- и поглощенного j^+ потоков электронов. При этом предполагается, что эти потоки связаны соотношением термодинамического равновесия

$$j^-/j^+ = 1 = (N(T)/N_{e1}) \cdot \exp(-b/T) \cdot \exp(-Z_p e^2/r_0 T).$$

Здесь $N_{e1} = 7 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ — экспериментальное значение плотности свободных электронов (считается, что они находятся при нулевом потенциале); плотность электронов на стенке $N(T)$ определена выше. Отсюда следует:

$$Z_p = (r_0 T / e^2) \cdot [\ln(N(T)/N_e) - b/T].$$

При подстановке сюда тех же значений, что и в работе [3] ($T = 1700 \text{ K}$, $N_{e1} = 7 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$, $b = 2.1 \text{ eV}$, $r_0 \approx 0.4 \mu\text{m}$), получаем $Z_p = 324$. Это заметно отличается от значения $Z_p = 520$, приведенного в работе [3], при оценке по тем же формулам и с теми же параметрами. Если же положить в этом выражении $N_e = Z_p N_p$ и численно решить получившееся уравнение, имеем $Z_p = 377$.

Относительно оценки заряда в работе [3] отметим одно важное обстоятельство. В термодинамическом равновесии нельзя полагать потенциал на поверхности частицы равным потенциалу уединенной заряженной сферы, как это сделано в приведенных выражениях для потоков. Нельзя пренебрегать тем фактом, что вокруг большого заряда в термодинамическом равновесии образуется слой электронов с

высокой плотностью. Как видно из проведенного выше рассмотрения, электронный слой зарядов существенно влияет на значение разности потенциалов между заряженной поверхностью и точками, где потенциал обращается в нуль. Если же оценивать некомпенсированный заряд, то нельзя использовать соотношение между потоками j^- и j^+ , соответствующее термодинамическому равновесию. Надо рассматривать кинетику рекомбинации в той или иной модели, как это сделано в [4,7].

Заключение. О том, что в условиях экспериментов [2,3] состояние электронных оболочек неравновесно, говорит следующее. Как показано в работе [8], при термодинамическом равновесии электронных оболочек пылинок возможно только их притяжение за счет поляризационных сил. Это притяжение не переходит в отталкивание при малых расстояниях между пылинками. Термоэмиссионная плазма из частиц, которые притягиваются, должна существовать небольшое время. Для того чтобы имело место отталкивание при близких расстояниях, необходимо, чтобы электронные оболочки были неравновесны. Причины, по которым термоэмиссионная плазма в условиях экспериментов [2,3] оказывается неравновесной, пока не ясны.

Список литературы

- [1] Фортон В.Е., Якубов И.Т. Неидеальная плазма. М.: Энергоатомиздат, 1994.
- [2] Фортон В.Е., Нефедов А.П., Петров О.Ф., Самарян А.А., Чернышев А.В. // ЖЭТФ. 1997. Т. 111. № 2. С. 467–477.
- [3] Нефедов А.П., Петров О.Ф., Ходатаев Я.К., Храпак С.А. // ЖЭТФ. 1999. Т. 115. № 3. С. 837–845.
- [4] Ткачев А.Н., Яковленко С.И. Об электронных оболочках заряженных микрочастиц. Препринт ИОФАН, 1997. № 8. 20 с.
- [5] Ткачев А.Н., Яковленко С.И. // ЖТФ. 1999. № 1. С. 53–57.
- [6] Gibson E.G. // Phys. Rev. 1966. V. 9. N 12. P. 2389–2399.
- [7] Ткачев А.Н., Яковленко С.И. // Письма в ЖТФ. 1999. Т. 25. № 1. С. 25.
- [8] Яковленко С.И. // Письма в ЖТФ. 1999. Т. 25. В. 16. С. 83–89.