01;08

Магнитоакустический разогрев плоского слоя бегущей волной тока

© Е.Б. Постников, С.В. Соболев

Курский государственный педагогический университет

Поступило в Редакцию 9 декабря 1998 г.
В окончательной редакции 26 августа 1999 г.

Рассматривается черенковская генерация и диссипация энергии магнитоакустических колебаний в плоском металлическом слое, находящемся в поле двух бегущих волн тока. Показано, что поле температуры в слое является практически безградиентным, а скорость разогрева существенно выше, чем для изученных ранее механизмов.

Одной из перспективных возможностей тепловой и акустической обработки электропроводных материалов является резонансное возбуждение в них звуковых колебаний на фоне постоянного сильного магнитного поля [1,2].

Цель данной работы — изучение акустического и электромагнитного полей в однородном немагнитном плоском слое ($\mu = 1$) толщиной $2z_1$ с удельной проводимостью σ, возбуждаемых черенковским способом симметрично расположенными относительно плоскости $z = 0$ бегущими волнами плотности тока

$$\mathbf{j} = \Big\{0,\, j\exp\big[i(k_0x - \omega t)\big]\delta(z - z_0),\, 0\Big\},$$
$$|z_0| > |z_1|, \qquad j = \mathrm{const}, \qquad \mathrm{Im}\, j = 0 \tag{1}$$

в присутствии достаточно сильного постоянного и однородного магнитного поля $\mathbf{B} = (B, 0, 0)$. Здесь $\omega/k_0 = v$ — фазовая скорость волны, превышающая одну из характерных скоростей распространения акустических возмущений. Считается, что слой находится в "легкой" среде (например, газе) с электромагнитными свойствами вакуума, с которой он находится в условиях конвективного теплообмена.

1. Решение вязкоупругой задачи

Исходная система уравнений магнитоупругости имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \left(c_\perp^2 + \gamma_\perp \dfrac{\partial}{\partial t}\right)\Delta \mathbf{u} + \left[\left(c_\parallel^2 + \gamma_\parallel \dfrac{\partial}{\partial t}\right) - \left(c_\perp^2 + \gamma_\perp \dfrac{\partial}{\partial t}\right)\right] \\ \qquad\qquad\qquad \times \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} - c_a^2 \dfrac{\mathbf{B}}{B^2} \times \operatorname{rot}\mathbf{b}, \\ \Delta \mathbf{A} - \mu_0 \sigma \dfrac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\mu_0 \sigma \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \times \mathbf{B}, \quad \mathbf{b} = \operatorname{rot}\mathbf{A}. \end{cases} \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{u}$ — вектор смещений точек среды, $c_\perp$ и $c_\parallel$ — скорости распространения продольных и поперечных акустических волн, c_a — альвеновская скорость, $\mathbf{b}$ — возмущение магнитного поля, $\mathbf{A}$ — вектор-потенциал поля, а коэффициенты $\gamma_\perp$ и $\gamma_\parallel$ выражаются через коэффициенты объемной ξ и сдвиговой η вязкости по формулам $\gamma_\parallel = (\xi + 4\eta/3)/\rho$, $\gamma_\perp = \eta/\rho$. Учитывая, что в твердых телах $c_a \ll c_\perp < c_\parallel$ даже при $B \sim 10\,\mathrm{T}$, вводя "продольную" $\mathbf{u}_\parallel$ и "поперечную" $\mathbf{u}_\perp$ составляющие вектора смещений $\mathbf{u} = \mathbf{u}_\perp + \mathbf{u}_\parallel$ такие, что $\operatorname{div}\mathbf{u}_\perp = 0$, $\operatorname{rot}\mathbf{u}_\parallel = 0$, получаем следующую равносильную (2) систему:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_\perp}{\partial t^2} = \left(c_\perp^2 + \gamma_\perp \frac{\partial}{\partial t}\right)\Delta \mathbf{u}_\perp, \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_\parallel}{\partial t^2} = \left(c_\parallel^2 + \gamma_\parallel \frac{\partial}{\partial t}\right)\Delta \mathbf{u}_\parallel, \tag{4}$$

$$\Delta \mathbf{A} - \mu_0 \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\mu_0 \sigma \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \times \mathbf{B}. \tag{5}$$

На поверхности слоя из материала с высокой (металлической) проводимостью, когда толщина скин-слоя в направлении, перпендикулярном его поверхности, становится пренебрежимо малой по сравнению с размерами слоя, вектор-потенциал поля $\mathbf{A} = (0, A, 0)$ удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$A\big|_{z=z_1+0} - A\big|_{z=z_1-0} = 0, \qquad \frac{\partial A}{\partial z}\bigg|_{z=z_1+0} - \frac{\partial A}{\partial z}\bigg|_{z=z_1-0} = -\mu_0 j_0. \tag{6}$$

Еще два граничных условия на поверхностях $|z| = z_1$ получаются из требования непрерывности плотности потока импульса и имеют вид

$$\left(c_\perp^2 + \gamma_\perp \frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}\right) = 0,$$

$$\left[\left(c_\parallel^2 + \gamma_\parallel \frac{\partial}{\partial t}\right) - 2\left(c_\perp^2 + \gamma_\perp \frac{\partial}{\partial t}\right)\right]\frac{\partial u_x}{\partial x} + \left(c_\parallel^2 + \gamma_\parallel \frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{B}{\rho} j_0, \quad (7)$$

где j_0 — подлежащая определению поверхностная плотность тока проводимости.

Замечание 1. При написании граничных условий (6) и второго граничного условия (7) считается, что величина j_0, по существу, заменяет собой приповерхностные токи, возникающие в процессе падения высокочастотного электромагнитного поля на проводящую среду. Этим, в частности, объясняется разрыв производной вектор-потенциала $\partial A/\partial z$ на границе слоя $z = z_1$ [3]. Заметим также, что четвертая неизвестная константа, явно не фигурирующая в условиях (6)–(7), определяет характеристики отраженного от слоя поля и входит в выражения для A и $\partial A/\partial z$ при $z = z_1 + 0$. Эти же величины содержат и заданную плотность тока бегущей волны j в (1).

Решение задачи (3)–(7) сводится к следующим этапам: решение упругой задачи (3), (4) о распространении волны вида $\mathbf{f}(z)\exp[i(k_0x - \omega t)]$; нахождение из (5) (с вектором $\mathbf{u}$ в правой части, полученным выше) вектор-потенциала электромагнитного поля, возникшего в материале слоя; определение вектор-потенциала внешнего электромагнитного поля как решения уравнения Пуассона с источником поля (1); однозначное определение полей $\mathbf{u}$ и $\mathbf{A}$ путем отыскания входящих в них постоянных из граничных условий (6)–(7).

Из (3) и (4) вытекают условия существования черенковской генерации волн: если фазовая скорость волны тока v больше $c_\parallel$, то происходит генерация двух ветвей колебаний (модифицированных поперечной и продольной) с волновыми числами $\kappa_{\perp,\parallel} = k_{\perp,\parallel} + i\omega^3\gamma_{\perp,\parallel}/2k_{\perp,\parallel}c_{\perp,\parallel}^4$, $k_{\perp,\parallel} = k_0[(v/c_{\perp,\parallel})^2 - 1)]^{1/2}$, причем ненулевые компоненты векторов смещения $\mathbf{u}$ и потенциала $\mathbf{A}$ имеют вид

$$u_x = -\left[\kappa_\perp\alpha_1\cos(\kappa_\perp z) + ik_0\alpha_2\cos(\kappa_\parallel z)\right]\exp\left[i(k_0x - \omega t)\right],$$

$$u_z = \left[ik_0\alpha_1\sin(\kappa_\perp z) + \kappa_\parallel\alpha_2\sin(\kappa_\parallel z)\right]\exp\left[i(k_0x - \omega t)\right],$$

$$A = -\left[ik_0\alpha_1\beta_\perp\sin(\kappa_\perp z) + \kappa_\parallel\alpha_2\beta_\parallel\sin(\kappa_\parallel z)\right]\exp\left[i(k_0x - \omega t)\right],$$

где $\alpha_{1,2} = \mathrm{const}$, $\beta_{\perp,\parallel} = i\omega\mu_0\sigma B/(\kappa_{\perp,\parallel}^2 + k_0^2 - i\omega\mu_0\sigma)$.

Если же v удовлетворяет неравенствам $c_\perp < v < c_\parallel$, то возбуждается только одна ветвь колебаний с волновым числом $\kappa_\perp$ (вторая ветвь представляет собой поверхностную волну Рэлея, экспоненциально затухающую в глубь слоя).

2. Решение тепловой задачи

Энергия связанных акустических и электромагнитных колебаний в материале слоя переходит в тепло за счет вязкой и джоулевой диссипации. Распределения усредненных за период колебаний плотностей мощности источников вязкого q_γ и джоулева q_σ тепловыделений

$$q_\gamma = \frac{\rho\omega^2}{2}\left[2\gamma_\perp\left(\left|\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial u_x}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial u_z}{\partial z}\right|^2\right)\right.$$

$$\left. + (\gamma_\parallel - 2\gamma_\perp)\left|\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right|^2\right], \quad q_\sigma = \frac{\sigma\omega^2}{2}|A + u_z B|^2$$

в безразмерной форме представлены на рис. 1. Графики построены для алюминиевого слоя и второй резонансной гармоники, частота которой находилась из условия минимума главного определителя системы граничных условий (6)–(7). Видим, что разогрев слоя носит четко выраженный объемный характер. При этом использование источника черенковского типа позволяет примерно на порядок повысить мощность тепловыделения по сравнению с рассчитанным ранее [2] случаем, когда в аналогичных условиях возбуждаются лишь поперечные колебания слоя.

Замечание 2. Известно, что при чисто индукционном высокочастотном разогреве источники джоулева тепловыделения локализуются в тонком приповерхностном слое с характерной толщиной порядка толщины скин-слоя. Легко показать, что в рассматриваемой задаче (рис. 1) плотность источников чисто джоулева приповерхностного разогрева при $z/z_1 = 1$ порядка плотности источников объемного тепловыделения за счет вязкости, причем первая экспоненциально убывает в глубь слоя, так что уже при $z/z_1 = 0.95$ ее значение на семь порядков меньше граничного. Это означает, что эффект поверхностного индукционного разогрева в дальнейшем можно не рассматривать. (Аналогичный результат для одномерной задачи получен в [2]).

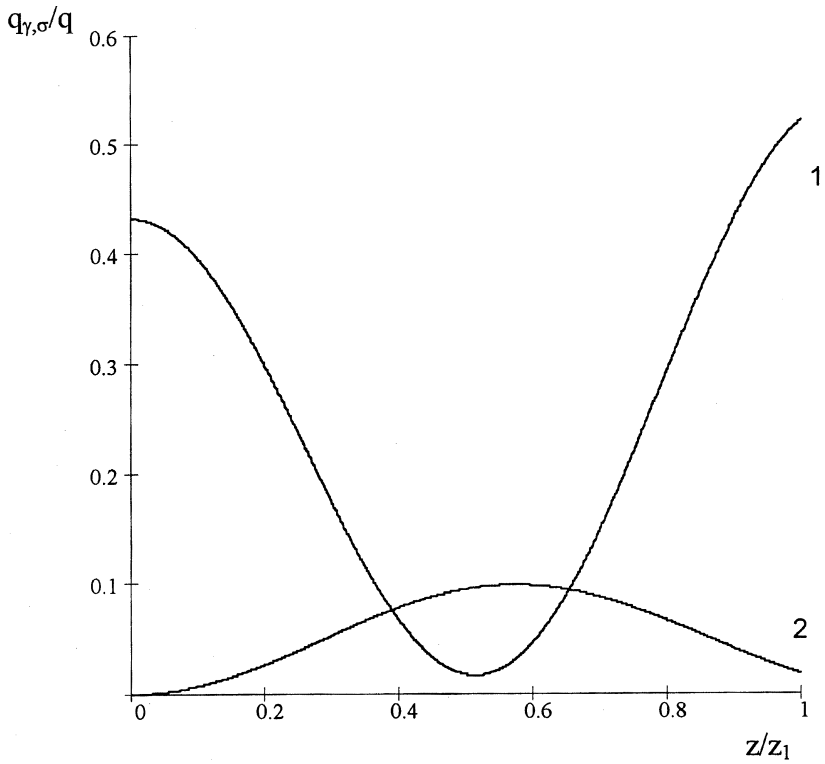

Рис. 1. Распределение плотности мощности вязкого q_γ/q (*1*) и джоулева тепловыделения $q_\sigma \cdot 10^5/q$ (*2*) источников тепла по полутолщине слоя. $z_1 = 0.25\,\mathrm{m}$, $B = 1\,\mathrm{T}$, $v = 8 \cdot 10^3\,\mathrm{m/s}$, $k_0 = 4.85\,\mathrm{m}^{-1}$, $\omega = 3.88 \cdot 10^4\,\mathrm{s}^{-1}$, $q = (Bj)^2/\rho z_1 c_{\|}$.

Распределение температуры слоя по толщине с течением времени можно найти путем решения уравнения теплопроводности для безразмерной температуры $\Theta = (T - T_0)\rho c a/q z_1^2$:

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\mathrm{Fo}} = \frac{\partial^2\Theta}{\partial\zeta^2} + \frac{q_\gamma + q_\sigma}{q} \tag{8}$$

(a — коэффициент температуропроводности, c — теплоемкость, ρ — плотность материала слоя, $\zeta = z/z_1$, $\mathrm{Fo} = at/z_1^2$ — число Фурье).

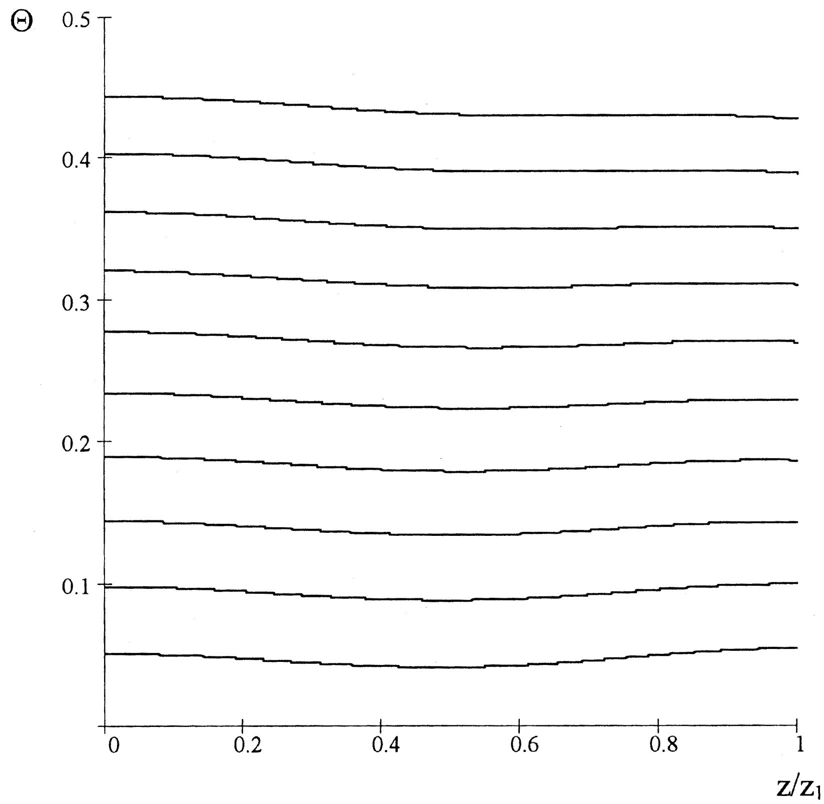

Рис. 2. Распределение температуры Θ по полутолщине слоя при $\mathrm{Fo} = 0.1 \div 0.2$ с шагом 0.2.

Считаем, что начальная температура слоя $\Theta(\zeta, 0) = 0$ и равна температуре внешней среды T_0, а сам он находится в состоянии конвективного теплообмена с внешней средой.

Уравнение (8) с рассмотренными тепловыми источниками может быть решено аналитически с использованием преобразования Лапласа по времени. На рис. 2 графически представлено найденное таким образом решение $\Theta(\zeta)$ при различных значениях числа Фурье. Критерий Био $\mathrm{Bi} = Hz_1$ (H — коэффициент теплообмена) принят равным 0.1.

Из графиков видно, что температурное поле в течение всего процесса разогрева слоя оказывается практически безградиентным, что не наносит ущерба качеству обрабатываемого материала. Одновременно с этим непосредственный ввод энергии в массив слоя, обусловленный присутствием постоянного магнитного поля, приводит к резкому сокращению времени обработки изделия. Заметим, наконец, что эффективный объемный разогрев некоторых материалов (например, металлов) положительно влияет на последующие проводимые с ними технологические процессы (сварка, резка и др.).

Список литературы

[1] *Подстригач Я.С., Бурак Я.И., Кондрат В.Ф.* Магнитотермоупругость электропроводных тел. Киев: Наук. думка, 1982. 296 с.
[2] *Киселев М.И., Рыжков С.Ю., Соболев С.В.* и др. // Физико-химические процессы обработки материалов концентрированными потоками энергии. М.: Наука, 1989. С. 226–233.
[3] *Бюргерс Ж.* // Магнитная гидродинамика. М.: Атомиздат,1958. С. 44–62.