

01;03

Автоколебательная неустойчивость свободной поверхности вязкоупругой среды

© Д.Ф. Белоножко, А.И. Григорьев

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

Поступило в Редакцию 24 сентября 1999 г.

На основе численного анализа дисперсионного уравнения обнаружена колебательная неустойчивость слоя вязкоупругой жидкости при наличии не зависящего от времени однородного внешнего силового воздействия на ее свободную поверхность, которая может привести к формированию на поверхности упорядоченного волнообразного рельефа конечной амплитуды.

В настоящее время весьма актуальна проблема теоретического осмысления закономерностей формирования волнообразного рельефа на изначально плоской поверхности вязкоупругого материала при силовом воздействии на нее, провоцирующем появление нормальных и касательных поверхностных напряжений (сварка взрывом [1], формирование упорядоченного волнообразного рельефа при бомбардировке поверхности кремния высокоэнергетичным пучком ионов [2]). Рассмотрим этот феномен на простейшей гидродинамической модели.

1. Примем, что плоский слой вязкоупругой жидкости с плотностью ρ , кинематической вязкостью ν_0 , временем релаксации вязкости τ , толщиной d на твердой подложке в поле тяжести \mathbf{g} подвержен непрерывному силовому воздействию в результате падения на ее свободную поверхность косоугольного по отношению к нормали потока импульса, передаваемого, например, неким материальным пучком. Требуется определить спектр возникающих капиллярных движений и исследовать их на устойчивость во времени.

Пусть $\Pi_{jk} = \delta V_j V_k$ — тензор плотности потока импульса внешнего силового воздействия в области над поверхностью слоя (V_j — компоненты скорости пучка, падающего под углом β к нормали; δ — объемная плотность) [3]. Будем решать двумерную задачу в декартовой системе координат XOZ с осью OZ , ориентированной

вертикально вверх ($\mathbf{n}_z \parallel -\mathbf{g}$), когда твердое дно расположено при $z = -d$, а уравнение возмущенной свободной границы слоя имеет вид $z = \xi(x, t)$, $|\xi| \ll d$. Явлениями, связанными с притоком вещества в жидкость, будем пренебрегать. В приближении волн бесконечно малой амплитуды математическая формулировка задачи имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + [\nabla \times \mathbf{U}] \times \mathbf{U} &= -\frac{1}{\rho} \nabla \left(P + \frac{U^2}{2} \right) + \nu \Delta \mathbf{U} + \mathbf{g}, \\ \operatorname{div} \mathbf{U} &= 0, \\ z = \xi : \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} &= U_z - U_x \frac{\partial \xi}{\partial x}, \\ \sigma_{jk} n_k^* + \Pi_{jk} n_k &= P_\gamma n_j, \\ P_\gamma = -\gamma \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \quad n_j &= \begin{bmatrix} -\frac{\partial \xi}{\partial x} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad n_j^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \Pi_{jk} = \begin{bmatrix} \delta V_x^2 & \delta V_x V_z \\ \delta V_x V_z & \delta V_z^2 \end{bmatrix}, \\ \sigma_{jk} &= \begin{bmatrix} \rho U_x^2 + P - 2\rho\nu \frac{\partial U_x}{\partial x} & \rho U_x U_z - \rho\nu \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x} \right) \\ \rho U_x U_z - \rho\nu \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x} \right) & \rho U_z^2 + P - 2\rho\nu \frac{\partial U_z}{\partial z} \end{bmatrix}, \\ z = -d : \quad \mathbf{U} &= 0. \end{aligned}$$

Здесь P_γ — лапласовское давление под искривленной поверхностью жидкости [3], γ — коэффициент поверхностного натяжения, n_j — столбец координат вектора внешней к поверхности жидкости нормали, n_j^* — вектор-столбец внутренней нормали, квадратные матрицы Π_{jk} и σ_{jk} составлены из компонент тензоров плотности потока импульса над возмущенной поверхностью и под ней [3]. Примем, что возмущение изначально плоской поверхности $\xi(x, t)$ имеет вид бегущей волны с волновым числом k и комплексной частотой s :

$$\xi = \xi_0 \exp(st - ikx).$$

Следуя [3–5], примем также, что зависимость вязкости ν от частоты определяется формулой Максвелла:

$$\nu = \frac{\nu_0}{1 + s\tau}.$$

Несложно показать, что при достаточно большой вязкости скорость стационарного течения жидкости под влиянием заданного силового воздействия вдоль горизонтальной оси имеет первый порядок малости по ξ , т.е. такой же, как и скорость волновых движений жидкости. Соответствующее условие сформулируем в виде:

$$\frac{\delta V^2 |\sin(2\beta)|}{\rho 2\nu|s|} kd = \frac{\delta V^2}{\rho |u_k u_\nu|} \frac{|\sin(2\beta)|}{2} = \frac{\delta V^2 |\sin(2\beta)|}{\rho 2|u_k|^2} kd |\alpha| \lesssim 1,$$

$$u_k = \frac{s}{k}, \quad u_\nu = \frac{\nu}{d}, \quad \alpha = \frac{s}{\nu k^2}.$$

В безразмерных переменных, в которых $\rho = \gamma = g = 1$, дисперсионное уравнение сформулированной задачи имеет вид:

$$\begin{aligned} & k^2 q \left(4s(k^2 + q^2) - (3k + q) \frac{W}{\nu} \right) + \frac{s\omega_0^2}{\nu^2} \left(k \operatorname{ch}(kd) \operatorname{sh}(qd) - q \operatorname{sh}(kd) \operatorname{ch}(qd) \right) \\ & - 2k^3 q \left(2s - \frac{W}{\nu} \right) \left(k \operatorname{ch}(kd) \operatorname{ch}(qd) - q \operatorname{sh}(kd) \operatorname{sh}(qd) \right) \\ & + (k^2 + q^2) \left(s(k^2 + q^2) - k^2 \frac{W}{\nu} \right) \left(k \operatorname{sh}(kd) \operatorname{sh}(qd) - q \operatorname{ch}(kd) \operatorname{ch}(qd) \right) = 0, \\ & q^2 \equiv k^2 + s/\nu, \quad \omega_0^2 \equiv k(1 + k^2), \\ & W \equiv -(\delta/\rho) \sqrt{\rho/(g\gamma)} V^2 \cos(2\beta). \end{aligned} \quad (1)$$

Закономерности поведения различных решений этого уравнения анализировались численно. При $\tau = 0$ мы имеем дело с обычной вязкой жидкостью, и дисперсионное уравнение, кроме комплексного решения, описывающего свойства капиллярных волн, имеет бесконечное семейство действительных корней, которое соответствует декрементам аperiodических движений, возникающих при отражении капиллярных движений от дна [6]. Будем называть эти корни (*a*)-решениями дисперсионного уравнения (1). При наличии у жидкости упругих свойств появляется еще одно бесконечное семейство аperiodических решений, связанных с отражением от дна вязкоупругих капиллярных движений, назовем их (*b*)-решениями дисперсионного уравнения (1). Решения типа (*a*) и (*b*) при достаточно большом времени релаксации τ попарно взаимодействуют, как это видно из рис. 1, где приведены зависимости действительной и мнимой компонент комплексной частоты s от

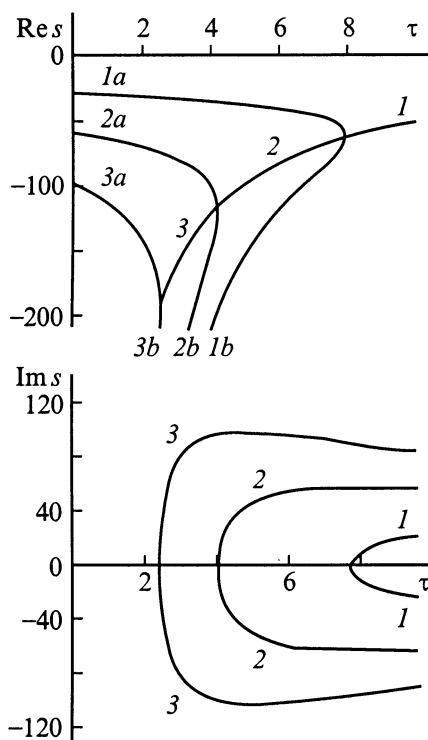


Рис. 1. Зависимости действительной $\text{Re } s = \text{Re } s(\tau)$ и мнимой $\text{Im } s = \text{Im } s(\tau)$ компонент комплексной частоты от характерного времени релаксации упругих напряжений τ , рассчитанные при $k = 1$, $kd = 1$, $\nu = 0.5$, $W = 0$.

величины характерного времени релаксации упругих напряжений τ , рассчитанные при $k = 1$, $W = 0$ и $\nu = 0.5$. Образующиеся при таком взаимодействии ветви вязкоупругих волновых движений 1 , 2 и 3 имеют при малых τ весьма большие значения декрементов затухания и частот (отметим, что ветвь капиллярных движений в выбранном масштабе единиц на рис. 1 сливается с осью абсцисс). С увеличением τ величины декрементов и частот этих движений быстро снижаются. Уже при τ порядка десятых физические характеристики вязкоупругих и капиллярных волн становятся сравнимыми по величине.

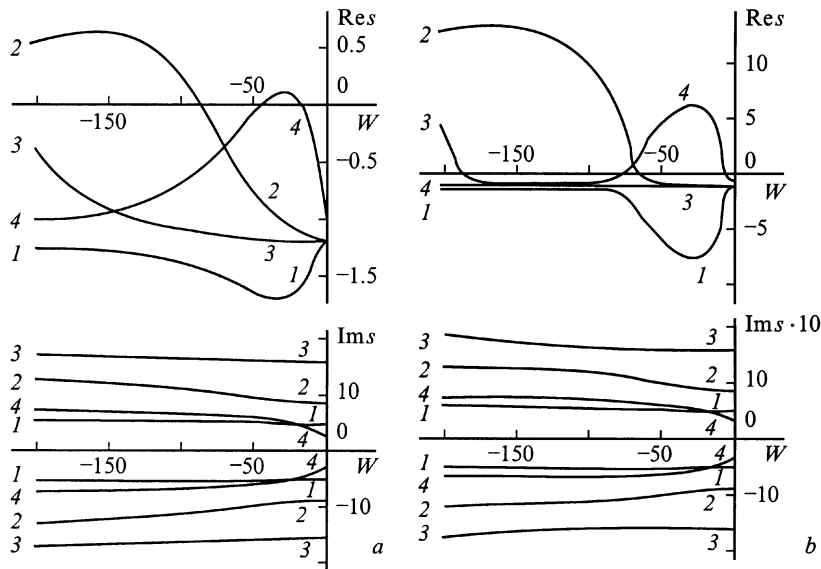


Рис. 2. Зависимости действительной $\text{Re } s = \text{Re } s(W)$ и мнимой $\text{Im } s = \text{Im } s(W)$ компонент комплексной частоты от безразмерного параметра W , рассчитанные при $\tau = 0.1$ (a), $\tau = 0.4$ (b). Значения остальных переменных те же, что использовались для построения рис. 1.

На рис. 2, a изображены те же решения (1), что и на рис. 1, в зависимости от величины безразмерного параметра W при $\tau = 0.4$. Дополнительно приведена ветвь капиллярных волн 4. Чтобы не загромождать рисунок, другие ветви дисперсионного уравнения, не имеющие отношения к теме настоящего сообщения, не изображены. Из рисунка видно, что вещественные компоненты капиллярно-волновой ветви 4 и ветви вязкоупругих волн 2 при больших по абсолютной величине отрицательных значениях W выходят в область $\text{Re } s > 0$, в которой они определяют инкременты колебательной неустойчивости соответствующих движений. Расчеты показывают, что с увеличением волнового числа k и характерного времени релаксации упругих напряжений τ инкременты соответствующих неустойчивостей растут. Из рис. 2, b, где приведены те же зависимости, что и на рис. 2, a,

но рассчитанные при $k = 10$, видно, что увеличение k на порядок сопровождается увеличением также на порядок величины инкремента неустойчивости, значительным расширением области значений W , в которой реализуется неустойчивость, и смещением к точке $W = 0$ правой границы области неустойчивости. При $W \geq 0$ колебательная неустойчивость не появляется.

Заключение. Из рис. 2, a, b и проведенных расчетов следует, что в слое вязкоупругой среды реализуются многочисленные волновые движения, которые могут быть неустойчивыми по отношению к внешнему силовому воздействию на свободную поверхность. В эксперименте наиболее вероятно регистрация колебательной неустойчивости ветви капиллярных волн, неустойчивых при меньших значениях W , чем вязкоупругие движения. Инкременты неустойчивых волновых движений растут с увеличением волнового числа.

Список литературы

- [1] *Дермин А.Н., Михайлов А.Н.* // Материалы IV Международного симпозиума по обработке металлов взрывом. Готвальдов, ЧССР. 1979. С. 29–39.
- [2] *Smirnov V.K., Kibakov D.S., Krivelevich S.A., Lepshin P.A., Potapov E.V., Yankov R.A., Skorupa W., Makarov V.V., Danilin A.B.* // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. 1999. В 147. Р. 310–315.
- [3] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика сплошных сред. М.: Наука, 1953. 788 с.
- [4] *Ширяева С.О., Григорьев О.А., Муничев М.И., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 1996. Т. 66. Вып. 10. С. 47–62.
- [5] *Григорьев О.А., Ширяева С.О.* // Изв. РАН. МЖГ. 1996. № 1. С. 98–105.
- [6] *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Коромыслов В.А., Белоножко Д.Ф.* // ЖТФ. 1997. Т. 67. В. 8. С. 27–33.