Журнал технической физики, 2000, том 70, вып. 11

01;03

К вопросу о вычислении потока тепла между коаксиальными цилиндрами при произвольных числах Кнудсена

 С.А. Савков, А.А. Юшканов

Орловский государственный университет,
302015 Орел, Россия

(Поступило в Редакцию 4 марта 1999 г. В окончательной редакции 6 декабря 1999 г.)

Рассматривается задача вычисления потока тепла между коаксиальными цилиндрами. Для решения кинетического уравнения используется процедура, аналогичная методу полупространственных моментов. Приведены результаты расчетов для БГК модели интеграла столкновений в случае чисто диффузного закона отражения.

Описание свойств газа при произвольных числах Кнудсена является одной из классических задач кинетической теории газов. Достаточно подробный обзор публикаций по этому вопросу приведен в [1,2]. Следует заметить, что большинство экспериментальных данных и результатов численного решения приводится в виде отношения к соответствующему газодинамическому решению. В случае разреженного газа это отношение стремится к нулю, поэтому реальный характер искомой зависимости в диапазоне промежуточных и больших значений числа Кнудсена оказывается неисследованным. Известные в настоящее время аналитические результаты получены методом Лиза [1]. При этом авторы ограничиваются рассмотрением простейшей функции, которая не дает правильного описания распределения молекул газа при удалении от внутреннего цилиндра и не позволяет корректно поставить граничные условия на поверхности внешнего цилиндра.

Итак рассмотрим два соосных цилиндра с радиусами $R_1 < R_2$, между которыми поддерживается постоянная разность температур $\Delta T = T_1 - T_2$. Перепад температур предполагается достаточно малым для того, чтобы линеаризовать задачу.

Введем цилиндрическую систему координат, ось z которой совпадает с осью цилиндров. Состояние газа между цилиндрами описывается кинетическим уравнением Больцмана(см., например, [3]). Ограничиваясь БГК моделью интеграла столкновений [4], учитывая линейность и аксиальную симметрию задачи, запишем

$$C_r\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{C_\varphi^2}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial C_r}=\nu\left(\frac{\delta n}{n_0}+(C^2-3/2)\frac{\Delta T}{T_0}+2\mathbf{CG}-\Phi\right). \quad (1)$$

Здесь

$$\frac{\delta n}{n_0}=\pi^{-3/2}\int\Phi\exp(-C^2)d\mathbf{C},$$

$$\frac{\delta T}{T_0}=\pi^{-3/2}\int\Phi\left(\frac{2}{3}C^2-1\right)\exp(-C^2)d\mathbf{C},$$

$$\mathbf{G}=\pi^{-3/2}\int\Phi\mathbf{C}\exp(-C^2)d\mathbf{C},$$

$$\nu=\frac{\sqrt{\pi}}{3\lambda}=\frac{5n}{\varkappa}\sqrt{\frac{k^3T_0}{8m}}, \quad (2)$$

Φ — поправка к равновесной функции распределения; $\mathbf{C}=\mathbf{V}\sqrt{m/2kT_0}$ — обезразмеренная собственная скорость молекул газа; λ — средняя длина свободного пробега молекул газа; $\varkappa$ — его теплопроводность; T_0 и n_0 — некоторые принятые за равновесные значения температуры и концентрации молекул газа, в качестве которых без потери общность можно выбрать температуру и концентрацию молекул, отраженных от поверхности внешнего цилиндра.

Искомая поправка должна удовлетворять граничным условиям взаимодействия молекул газа с поверхностью как внутреннего, так и внешнего цилиндра, которые в самой общей форме (см., например, [3]) могут быть записаны в виде

$$\Phi_k^r=\Omega_k\Phi_k^i \qquad \text{при} \qquad r=R_k \quad (k=1,\,2), \quad (3)$$

где Φ_k^i и Φ_k^r — функции, описывающие распределение по скорости для падающих и отраженных от поверхности соответствующего цилиндра молекул; Ω_k — интегральный оператор, определяющийся характером взаимодействия газа с поверхностью.

В страндартном подходе [1] используют двухпоточную функцию распределения, различая молекулы, вектор скорости которых лежит внутри и вне клина влияния внутреннего цилиндра, что позволяет удовлетворить граничному условию при $r=R_1$. Для того чтобы удовлетворить условию на поверхности внешнего цилиндра, будем также различать молекулы, имеющие положительное и отрицательное значение проекции скорости C_r, т.е. представим искомую функцию в виде

$$\Phi=\Phi_1H_1+\Phi_2H_2+\Phi_3H_3, \quad (4)$$

где

$$H_1=H\left(C_r-C_p\sqrt{1-R_1^2/r^2}\right),$$

$$H_2=H(C_r)-H_1, \qquad H_3=H(-C_r),$$

$$C_p = \sqrt{C^2 - C_z^2}, \qquad H(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0 \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

— стандартная функция Хевисайда.

Такой подход к выбору функции распределения позволяет записать условия (3) в виде

$$\begin{aligned} &\Phi_1 = \Omega_1 \Phi_3 \quad \text{при} \quad r = R_1 \quad \text{и} \\ &\Phi_3 = \Omega_2(\Phi_1 H_1 + \Phi_2 H_2) \quad \text{при} \quad r = R_2. \end{aligned} \tag{5}$$

Функции Φ_i будем искать в виде, аналогичном распределению Чепмена–Энскога,

$$\Phi_i = a_1^i + a_2^i(3/2 - C^2) + a_3^i C_r + a_4^i C_r(5/2 - C^2). \tag{6}$$

Отметим, что в стандартном подходе рассматриваются лишь моменты, определяющие поле температуры и концентрации молекул газа. Моменты, описывающие поток тепла и массы газа, остаются неучтенными, что не позволяет (в случае $R_2 - R_1 \gg \lambda$) получить правильное описание состояния газа в газодинамической области, т. е. на достаточно большом по сравнению с длиной свободного пробега расстоянии от поверхности цилиндров.

Коэффициенты a_j^i, зависящие только от r, определяются из решения моментных уравнений, для составления которых кинетическое уравнение (1) с функцией распределения (4), (6) умножим последовательно на $\exp(-C^2)H_j$, $C^2\exp(-C^2)H_j$, $C_r\exp(-C^2)H_j$, $C_r(5/2 - C^2)\exp(-C^2)H_j$ и проинтегрируем по скорости. Переходя к новой переменной $x = r/R_1$, получим

$$\begin{aligned} &\frac{\pi}{4x}\frac{d}{dx}(2a_1^1 - a_2^1) + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\phi + \frac{\gamma}{x}\right)\frac{da_3^1}{dx} + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\phi - \frac{\gamma}{x}\right)\frac{a_3^1}{x} \\ &= R_1\nu\Bigg\{\sqrt{\pi}\left(\frac{1}{2x^2} + \frac{\phi^2}{\pi} - \phi\right)a_1^1 - \frac{\sqrt{\pi}}{4x^2}a_2^1 \\ &+ \left(\frac{\gamma}{x} + 2\phi - \pi\right)\frac{a_3^1}{2x} + (\phi - \pi)\frac{a_4^1}{4x} \\ &+ \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\phi - \frac{2}{\pi}\phi^2 + \frac{x-1}{x^2}\right)a_1^2 - \frac{\sqrt{\pi}}{4}\frac{x-1}{x^2}a_2^2 \\ &+ \left(\frac{\pi}{2x} + \phi\frac{x-2}{x} - \frac{\gamma}{x^2}\right)\frac{a_3^2}{2} + \frac{\phi}{4}\frac{x-1}{x}a_4^2 \\ &+ \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\phi - \frac{1}{x}\right)a_1^3 + \frac{\sqrt{\pi}}{4x}a_2^3 + \left(\frac{\pi}{4x} - \frac{\phi}{2}\right)a_3^3 - \frac{\phi}{4}a_4^3\Bigg\}, \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\pi}{2x}\frac{d}{dx}(2a_1^1 - 3a_2^1) + \frac{5\sqrt{\pi}}{4}\left(\phi + \frac{\gamma}{x}\right)\frac{d}{dx}(a_3^1 - a_4^1) \\ &\quad + \frac{5\sqrt{\pi}}{4}\left(\phi - \frac{\gamma}{x}\right)\frac{a_3^1 - a_4^1}{x} \\ &\quad = R_1\nu\Bigg\{\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{2}{x^2} + \frac{3\phi^2}{\pi} - 3\phi\right)a_1^1 \\ &\quad - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{3\phi^3}{\pi} - 3\phi\right)a_2^1 + \left(\frac{\gamma}{x} + 2\phi - \pi\right)\frac{a_3^1}{x} \\ &\quad + \frac{\pi - \phi}{2x}a_4^1 + \sqrt{\pi}\left(\frac{3\phi}{4} - \frac{3\phi^2}{2\pi} + \frac{x-1}{x^2}\right)a_1^2 \\ &\quad - \sqrt{\pi}\left(\frac{3\phi}{4} - \frac{3\phi^2}{2\pi} + \frac{x-1}{2x^2}\right)a_2^2 \\ &\quad + \left(\frac{\pi}{2x} - \frac{\gamma}{x^2} + \phi\frac{x-2}{x}\right)a_3^2 - \frac{\phi}{2}\frac{x-1}{x}a_4^2 \\ &\quad + \sqrt{\pi}\left(\frac{3}{4}\phi - \frac{1}{x}\right)a_1^3 + \frac{\sqrt{\pi}}{4}\left(\frac{2}{x} - 3\phi\right)a_2^3 \\ &\quad + \left(\frac{\pi}{2x} - \phi\right)a_3^3 + \frac{\phi}{2}a_4^3\Bigg\}, \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\phi + \frac{\gamma}{x}\right)\frac{d(a_1^1 - a_2^1)}{dx} \\ &\quad + \pi\frac{3x^2 - 1}{8x^3}\frac{d(2a_3^1 - a_4^1)}{dx} + \pi\frac{2a_3^1 - a_4^1}{8x^4} \\ &\quad = R_1\nu\Bigg\{\left(\frac{\gamma}{x} + 2\phi - \pi\right)\frac{2a_1^1 - a_2^1}{4x} \\ &\quad + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{2\gamma\phi}{\pi x} - \frac{\gamma}{x} - \phi + \frac{\phi^2}{\pi} + \frac{x^2 - 1}{\pi x^4} + \frac{7}{12x^2}\right)a_3^1 \\ &\quad - \frac{\sqrt{\pi}a_4^1}{48x^2} + \left(\gamma - \frac{\gamma}{x} + \phi x - 2\phi + \frac{\pi}{2}\right)\frac{2a_1^2 - a_2^2}{4x} \\ &\quad + \sqrt{\pi}\left(\frac{\gamma}{4x} - \frac{\gamma\phi}{\pi x} + \frac{\phi}{4} - \frac{\phi^2}{2\pi} - \frac{x^2 - 1}{2\pi x^4} + \frac{7(x-1)}{24x^2}\right)a_3^2 \\ &\quad - \sqrt{\pi}\frac{x-1}{48x^2}a_4^2 + \left(\frac{\pi}{2x} - \frac{\gamma}{x} - \phi\right)\frac{2a_1^3 - a_2^3}{4} \\ &\quad + \sqrt{\pi}\left(\frac{\gamma}{4x} + \frac{\phi}{x} - \frac{7}{24x}\right)a_3^3 + \frac{a_4^3\sqrt{\pi}}{48x}\Bigg\}, \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} &\frac{5\sqrt{\pi}}{4}\left(\phi + \frac{\gamma}{x}\right)\frac{da_2^1}{dx} - \pi\frac{3x^2 - 1}{16x^3}\frac{d(2a_3^1 - 13a_4^1)}{dx} \\ &\quad - \pi\frac{2a_3^1 - 13a_4^1}{16x^4} = R_1\nu\Bigg\{\frac{\phi - \pi}{8x}(2a_1^1 + 7a_2^1) \\ &\quad - \frac{a_3^1\sqrt{\pi}}{48x^2} + \frac{5\sqrt{\pi}}{4}\left(\frac{11}{24x^2} - \frac{\gamma}{x} - \phi\right)a_4^1 \\ &\quad + \frac{\pi - 2\phi}{16x}(2a_1^2 + 7a_2^2) - \sqrt{\pi}\frac{x-1}{96x^2}(2a_3^2 - 55a_4^2) \\ &\quad + \pi\frac{2a_1^3 + 7a_2^3}{16x} + \sqrt{\pi}\frac{2a_3^3 - 55a_4^3}{96x}\Bigg\}, \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} &\pi\frac{x-1}{4x}\frac{d}{dx}(2a_1^2 - a_2^2) + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \phi - \frac{\gamma}{x}\right)\frac{da_3^2}{dx} \\ &\quad + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \phi + \frac{\gamma}{x}\right)\frac{a_3^2}{x} + \frac{\pi}{8x}(2a_1^2 - a_2^2 - 2a_1^3 + a_2^3) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= R_1\nu\Big\{\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\phi-\frac{2\phi^2}{\pi}+\frac{x-1}{x^2}\right)a_1^1-\frac{\sqrt{\pi}(x-1)}{4x^2}a_2^1\\
&+\left(\gamma-\frac{\gamma}{x}+\frac{\pi}{2}+\phi x-2\phi\right)\frac{a_3^1}{2x}+(\pi-2\phi)\frac{a_4^1}{8x}\\
&+\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{2\phi^2}{\pi}-\frac{\pi}{2}+\frac{(x-1)^2}{x^2}\right)a_1^2-\frac{\sqrt{\pi}}{4}\frac{(x-1)^2}{x^2}a_2^2\\
&-\left(\frac{\gamma}{2x}+\phi\right)\frac{x-1}{x}a_3^2-(2\phi+\pi)\frac{x-1}{8x}a_4^2\\
&+\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\phi-1+\frac{1}{x}\right)a_1^3+\sqrt{\pi}\frac{x-1}{4x}a_2^3\\
&+\frac{2\phi x-\pi}{4x}a_3^3+\frac{2\phi-\pi}{8}a_4^3\Big\}, \qquad (11)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\pi\frac{x-1}{2x}\frac{d}{dx}(2a_1^2-3a_2^2)+\frac{5\sqrt{\pi}}{4}\left(\frac{\pi}{2}-\phi-\frac{\gamma}{x}\right)\frac{d}{dx}(a_3^2-a_4^2)\\
&+\frac{5\sqrt{\pi}}{4}\left(\frac{\pi}{2}-\phi+\frac{\gamma}{x}\right)\frac{a_3^2-a_4^2}{x}+\frac{\pi}{4x}\Big(2a_1^2-3a_2^2\\
&-2a_1^3+3a_2^3\Big)=R_1\nu\Big\{\sqrt{\pi}\left(3\phi\frac{\pi-2\phi}{4\pi}+\frac{x-1}{x^2}\right)a_1^1\\
&-\sqrt{\pi}\left(3\phi\frac{\pi-2\phi}{4\pi}+\frac{x-1}{2x^2}\right)a_2^1\\
&+\left(\gamma-\frac{\gamma}{x}+\frac{\pi}{2}+\phi x-2\phi\right)\frac{a_3^1}{x}+(2\phi-\pi)\frac{a_4^1}{4x}\\
&+\sqrt{\pi}\left(\frac{3\phi^2}{2\pi}-\frac{3\pi}{8}+\frac{(x-1)^2}{x^2}\right)a_1^2\\
&+\sqrt{\pi}\left(\frac{3\pi}{8}-\frac{(x-1)^2}{2x^2}-\frac{3\phi^2}{2\pi}\right)a_2^2-\left(\frac{\gamma}{x}+2\phi\right)\frac{x-1}{x}a_3^2\\
&+(2\phi+\pi)\frac{x-1}{4x}a_4^2+\sqrt{\pi}\left(\frac{3}{8}(\pi-2\phi)-1+\frac{1}{x}\right)a_1^3\\
&+\sqrt{\pi}\left(\frac{3}{8}(2\phi-\pi)+\frac{x-1}{2x}\right)a_2^3\\
&-\left(\frac{\pi}{2x}-\phi\right)a_3^3-\left(\frac{\phi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)a_4^3\Big\}, \qquad (12)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\phi-\frac{\gamma}{x}\right)\frac{d(a_1^2-a_2^2)}{dx}+\frac{\pi}{8}\left(2-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}\right)\\
&\times\frac{d(2a_3^2-a_4^2)}{dx}+\pi\frac{x^3-1}{8x^4}(2a_3^2-a_4^2)\\
&=R_1\nu\Big\{\left(x\phi-2\phi+\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{x}\right)\frac{2a_1^1-a_2^1}{4x}\\
&+\sqrt{\pi}\left(\frac{\phi}{4}-\frac{\phi^2}{2\pi}-\frac{\gamma\phi}{\pi x}+\frac{\gamma}{4x}-\frac{x^2-1}{2\pi x^4}+\frac{7(x-1)}{24x^2}\right)a_3^1\\
&-\sqrt{\pi}\frac{x-1}{48x^2}a_4^1-\left(\frac{\gamma}{2x}+\phi\right)\frac{x-1}{2x}(2a_1^2-a_2^2)\\
&+\sqrt{\pi}\left(\frac{\gamma\phi}{\pi x}+\frac{\phi^2}{2\pi}-\frac{\pi}{8}+\frac{x^2-1}{2\pi x^4}+\frac{7(x-1)^2}{24x^2}\right)a_3^2\\
&-\frac{\sqrt{\pi}}{48x^2}(x-1)^2a_4^2+\left(\frac{\gamma}{x}+\phi-\frac{\pi}{2x}\right)\frac{2a_1^3-a_2^3}{4}\\
&+\sqrt{\pi}\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\gamma}{4x}-\frac{\phi}{4}-\frac{7(x-1)}{24x}\right)a_3^3+\sqrt{\pi}\frac{x-1}{48x}a_4^3\Big\}, \qquad (13)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{\pi}\frac{5}{4}\left(\frac{\pi}{2}-\phi-\frac{\gamma}{x}\right)\frac{da_2^2}{dx}+\frac{\pi}{16}\left(\frac{3}{x}-2-\frac{1}{x^3}\right)\\
&\times\frac{d(2a_3^2-13a_4^2)}{dx}-\pi\frac{x^3-1}{16x^4}(2a_3^2-13a_4^2)\\
&=R_1\nu\Big\{\left(\phi\frac{x-1}{8x}(2a_1^1+7a_2^1)\right)-\sqrt{\pi}\frac{x-1}{96x^2}(2a_3^1-55a_4^1)\\
&-\frac{x-1}{16x}(2\phi+\pi)(2a_1^2+7a_2^2)-\sqrt{\pi}\frac{(x-1)^2}{48x^2}a_3^2\\
&+\sqrt{\pi}\frac{5}{4}\left(\frac{\gamma}{x}+\phi-\frac{\pi}{2}+\frac{11(x-1)^2}{24x^2}\right)a_4^2\\
&+\pi\frac{x-1}{16x}(2a_1^3+7a_2^3)+\sqrt{\pi}\frac{x-1}{96x}(2a_3^3-55a_4^3)\Big\}, \qquad (14)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\pi}{4}\frac{d}{dx}(a_2^3-2a_1^3)+\frac{\pi}{8x}(2a_1^2-a_2^2-2a_1^3+a_2^3)\\
&+\frac{\pi^{3/2}}{4}\frac{da_3^3}{dx}+\frac{\pi^{3/2}}{4x}a_3^3\\
&=R_1\nu\Big\{\sqrt{\pi}\frac{\phi x-1}{2x}a_1^1+\frac{\sqrt{\pi}}{4x}a_2^1+\left(\frac{\pi}{2x}-\frac{\gamma}{x}-\phi\right)\frac{a_3^1}{2}\\
&+\frac{\pi a_4^1}{8x}+\sqrt{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\phi-1+\frac{1}{x}\right)\frac{a_1^2}{2}+\sqrt{\pi}\frac{x-1}{4x}a_2^2\\
&+\left(\phi-\frac{\pi}{2x}+\frac{\gamma}{x}\right)\frac{a_3^2}{2}+\frac{\pi}{8}\frac{x-1}{x}a_4^2\\
&+\sqrt{\pi}\frac{2-\pi}{4}a_1^3-\sqrt{\pi}\frac{a_2^3}{4}+\frac{a_4^3\pi}{8}\Big\}, \qquad (15)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\pi}{2}\frac{d}{dx}(3a_2^3-2a_1^3)+\frac{\pi}{4x}(2a_1^2-3a_2^2-2a_1^3+3a_2^3)\\
&+\frac{5\pi^{3/2}}{8}\frac{d(a_3^3-a_4^3)}{dx}+\frac{5\pi^{3/2}}{8x}(a_3^3-a_4^3)\\
&=R_1\nu\Big\{\sqrt{\pi}\frac{3\phi x-4}{4x}a_1^1+\sqrt{\pi}\frac{2-3\phi x}{4x}a_2^1+\left(\frac{\pi}{2x}-\frac{\gamma}{x}-\phi\right)a_3^1\\
&-\frac{\pi a_4^1}{4x}+\sqrt{\pi}\left(\frac{3\pi-6\phi}{8}-1+\frac{1}{x}\right)a_1^2\\
&+\sqrt{\pi}\left(\frac{6\phi-3\pi}{8}+\frac{x-1}{2x}\right)a_2^2+\left(\phi+\frac{\gamma}{x}-\frac{\pi}{2x}\right)a_3^2\\
&-\frac{\pi(x-1)}{4x}a_4^2+\sqrt{\pi}\frac{8-3\pi}{8}a_1^3+\sqrt{\pi}\frac{3\pi-4}{8}a_2^3-\frac{a_4^3\pi}{4}\Big\}, \qquad (16)
\end{aligned}
$$

$$\frac{\pi^{3/2}}{4}\frac{d}{dx}(a_1^3-a_2^3)-\frac{\pi}{4}\frac{d(2a_3^3-a_4^3)}{dx}-\frac{\pi}{8x}(2a_3^3-a_4^3)$$
$$=R_1\nu\left\{\frac{\pi-2\phi x}{8x}(2a_1^1-a_2^1)+\sqrt{\pi}\left(\phi x+\gamma-\frac{7}{6}\right)\frac{a_3^1}{4x}\right.$$
$$+\frac{\sqrt{\pi}}{48x}a_4^1+\frac{2\phi x-\pi}{8x}(2a_1^2-a_2^2)$$
$$+\sqrt{\pi}\left(\pi x-2\phi x-2\gamma-\frac{7}{3}(x-1)\right)\frac{a_3^2}{8x}$$
$$\left.+\ \sqrt{\pi}\frac{x-1}{48x}a_4^2+\sqrt{\pi}\frac{7-3\pi}{24}a_3^3-\frac{\sqrt{\pi}}{48}a_4^3\right\}, \qquad (17)$$

$$\frac{5\pi^{3/2}}{8}\frac{da_2^3}{dx}+\frac{\pi}{8}\frac{d(2a_3^3-13a_4^3)}{dx}+\frac{\pi}{16x}(2a_3^3-13a_4^3)$$
$$=R_1\nu\left\{-\frac{\phi}{8}(2a_1^1+7a_2^1)+\frac{\sqrt{\pi}}{96x}(2a_3^1-55a_4^1)\right.$$
$$+\frac{2\phi-\pi}{16}(2a_1^2+7a_2^2)+\sqrt{\pi}\frac{x-1}{96x}(2a_3^2-55a_4^2)$$
$$\left.+\frac{\pi}{16}(2a_1^3+7a_2^3)-\sqrt{\pi}\frac{a_3^3}{48}+\sqrt{\pi}\frac{55-60\pi}{96}a_4^3\right\}, \qquad (18)$$

где $\phi=\arcsin x^{-1}$, $\gamma=\cos\phi=\sqrt{1-x^{-2}}$.

Суммируя уравнения (7), (11), (15) и (8), (12), (16), получим соответственно законы сохранения массы и энергии

$$\frac{d}{dx}Jx=0 \qquad \text{и} \qquad \frac{d}{dx}Qx=0,$$

которые могут быть проинтегрированы в явном виде. Здесь

$$J=\pi^{-3/2}\int\Phi C_r\exp(-C^2)d\mathbf{C}$$
$$=\frac{2a_1^1-a_2^1}{4x\sqrt{\pi}}+\left(\frac{\gamma}{x}+\phi\right)\frac{a_3^1}{2\pi}+\frac{x-1}{4\sqrt{\pi}x}(2a_1^2-a_2^2)$$
$$+\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{x}-\phi\right)\frac{a_3^2}{2\pi}-\frac{2a_1^3-a_2^3}{4\sqrt{\pi}}+\frac{a_3^3}{4} \qquad (19)$$

и

$$Q=\pi^{-3/2}\int\Phi C^2C_r\exp(-C^2)d\mathbf{C}$$
$$=\frac{2a_1^1-3_2^1}{2x\sqrt{\pi}}+\frac{5}{4\pi}\left(\frac{\gamma}{x}+\phi\right)(a_3^1-a_4^1)$$
$$+\frac{x-1}{2\sqrt{\pi}x}(2a_1^2-3a_2^2)+\frac{5}{4\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{x}-\phi\right)(a_3^2-a_4^2)$$
$$-\frac{2a_1^3-3a_2^3}{2\sqrt{\pi}}+\frac{5}{8}(a_3^2-a_4^2) \qquad (20)$$

— безразмерные потоки массы и тепла. Аналогично сумма уравнений (9), (13), (17) представляет собой закон сохранения импульса.

Решение системы уравнений (7)–(18) должно удовлетворять условиям (5). Предлагаемая методика позволяет использовать произвольные формы закона отражения (см., например, [5]). Для конкретного численного анализа ограничимся моделью чисто диффузионного отражения, т. е. будем полагать, что молекулы отражаются от поверхности каждого из цилиндров с соответствующей его характеристикам максвелловской функцией распределения. Принимая в качестве равновесной функцию распределения молекул отразившихся от внешнего цилиндра, запишем

$$\Phi_1=\frac{\Delta n}{n_2}+\left(C^2-\frac{3}{2}\right)\frac{\Delta T}{T_2} \quad \text{при} \quad x=1 \quad \text{и}$$
$$\Phi_3=0 \quad \text{при} \quad x=\frac{R_2}{R_1}. \qquad (21)$$

Сравнивая (21) с (6), получим

$$a_1^1=\frac{\Delta n}{n_2}, \quad a_2^1=-\frac{\Delta T}{T_2}, \quad a_3^1=a_4^1=0 \quad \text{при} \quad x=1 \qquad (22)$$

и

$$a_1^3=a_2^3=a_3^3=a_4^3=0 \quad \text{при} \quad x=R_2/R_1. \qquad (23)$$

Причем разность концентрации молекул газа $\Delta n = n_1-n_2$ должна определяться из условия отсутствия потока массы между цилиндрами ($J=0$). Поэтому вместо первого условия из (22) необходимо использовать вытекающее из (19) при $x=1$ равенство

$$2a_1^1-a_2^1-2a_1^3+a_2^3+\sqrt{\pi}a_3^3=0. \qquad (24)$$

Кроме этого, необходимо учесть, что система моментных уравнений имеет особенность на поверхности внутреннего цилиндра, обусловленную схлопыванием области в пространстве скоростей, которая соответствует функции Φ_2. Раскладывая искомое решение в ряд по степеням $\xi=x-1$ и учитывая требование конечности функции распределения, получим еще четыре условия

$$A_1=A_2=A_3=A_4=0 \quad \text{при} \quad x=1. \qquad (25)$$

Здесь $A_{1,2}=(x-1)a_{1,2}^2$ и $A_{3,4}=(\pi/2-\phi x-\gamma/x)a_{3,4}^2$. Таким образом, граничные условия задаются функцией распределения молекул, отразившихся от поверхности внутреннего цилиндра (т. е. значением Φ_1 при $r=R_1$), функцией распределения молекул, отразившихся от внешнего цилиндра (т. е. значением Φ_3 при $r=R_2$), а также требованием конечности функции Φ_2 при $r=R_1$.

Результаты численного решения системы уравнений (7)–(18) с условиями (22)–(25) могут быть представлены в виде

$$Q=\frac{\Delta T}{T_2}\frac{R_1}{r}\left(\frac{4}{5}R_1\nu\ln(R_2/R_1)+\alpha\right)^{-1}. \qquad (26)$$

Параметр α описывает отличие потока тепла от газодинамического решения. На рис. 1–3 приведена зависимость этого параметра от соотношения между радиусами цилиндров и степени разреженности газа.

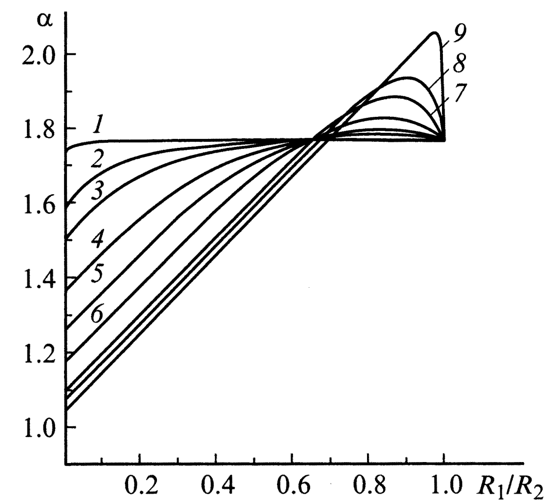

Рис. 1. Зависимость параметра α от отношения R_1/R_2 при $R_1\nu = 0.01$ (*1*), 0.1 (*2*), 0.2 (*3*), 0.5 (*4*), 1 (*5*), 2 (*6*), 5 (*7*), 10 (*8*), 100 (*9*).

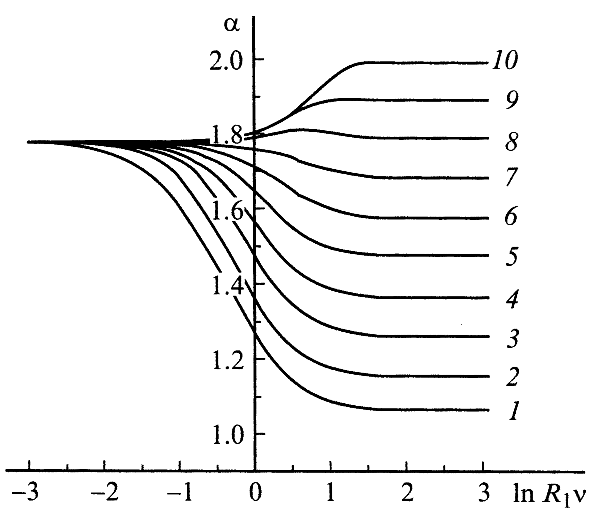

Рис. 2. Зависимость значений α от $R_1\nu$ при $R_1/R_2 = 0.01$ (*1*), 0.1 (*2*), 0.2 (*3*), 0.3 (*4*), 0.4 (*5*), 0.5 (*6*), 0.6 (*7*), 0.7 (*8*), 0.8 (*9*), 0.9 (*10*).

Следует отметить прослеживающийся на рис. 1 линейный характер зависимости α от соотношения R_1/R_2 при расстоянии между цилиндрами, много большем средней длины свободного пробега молекул газа, т.е. для $(R_2 - R_1) \gg 1$. В указанном случае выражение (26) может быть записано в виде

$$Q = \frac{\Delta T}{T_2}\frac{R_1}{r}\left(\frac{4}{5}R_1\nu\ln(R_2/R_1) + \alpha^*(1 + R_1/R_2)\right)^{-1}, \tag{27}$$

где $\alpha^* = \lim\limits_{R_2\to\infty}\alpha$.

Зависимость α^* от $R_1\nu$ с точностью до 0.3% аппроксимируется выражением

$$\alpha^* = \frac{\sqrt{\pi} + 2.4624(R_1\nu)^{0.9}}{1 + 2.3474(R_1\nu)^{0.9}}.$$

Очевидно, что график функции $\alpha^*(R_1\nu)$ практически сливается с кривыми *1* ($R_1/R_2 = 0.01$) на рис. 2, 3.

Определенный интерес представляет рассмотрение цилиндров достаточно большого радиуса, когда $R_1\nu \gg 1$ и $(R_2 - R_1)\nu \gg 1$. В этом случае α^* перестает зависеть от степени разреженности газа и стремится к значению

$$\alpha_\infty = 1.0489. \tag{28}$$

С другой стороны, система моментных уравнений в рассматриваемом пределе допускает аналитическое решение и поток тепла с точностью до линейных по числу Кнудсена ($Kn_i = \lambda/R_i$) слагаемых можно представить в виде

$$\begin{aligned} q &= n\left(2k^3T^3/m\right)^{1/2}Q \\ &= \frac{\varkappa}{r}\Delta T\Big(\ln(R_2/R_1) + C_t(Kn_1 + Kn_2)\Big)^{-1}, \end{aligned} \tag{29}$$

где C_t — коэффициент скачка температуры.

Сравнивая (27) и (29) с учетом (28) и определения ν (2), находим

$$C_t = \frac{5\alpha_\infty}{4\nu\lambda} = 2.2193,$$

что менее чем на 1% отличается от полученного численным методом в работе [6] значения $C_t = 2.2049$.

Отметим также случай $R_2/R_1 \to 1$, когда в пространстве скорости отсутствует область, определяющая вклад функции Φ_2. Как видно из приведенных графиков, значение параметра α в рассматриваемом режиме меняется

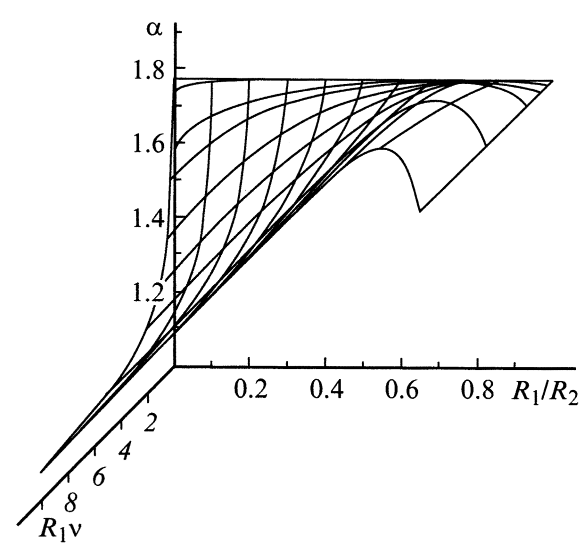

Рис. 3. Общий профиль зависимости α от соотношения между радиусами цилиндров и степени разреженности газа.

от $2\alpha_\infty = 2.0978$ при $(R_2 - R_1)\nu \gg 1$, что соответствует выражению (29), до $\sqrt{\pi}$ при $(R_2 - R_1)\nu \ll 1$. Последнее объясняется тем, что молекулы газа пролетают расстояние между цилиндрами, практически не успевая столкнуться между собой. Следовательно, функция Φ_3 остается равной нулю во всем объеме газа. Поэтому, как видно из условий (24), (22) и соотношения (20),

$$2a_1^1 = a_2^1 = -\frac{\Delta T}{T_2}, \qquad Q = \frac{\Delta T}{T_2}\frac{R_1}{r}\frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Похожая ситуация имеет место и при $R_1\nu \ll 1$. В указанном случае влиянием внутреннего цилиндра можно пренебречь и считать функцию распределения совпадающей с распределением молекул, отраженных от поверхности внешнего цилиндра. При этом различие между функциями Φ_3 и Φ_2 исчезает (т.е. $a_i^2 = a_i^3 = 0$), а параметр α также равен $\sqrt{\pi}$.

Стандартный метод Лиза приводит к аналогичному соотношению

$$Q_s = \frac{\Delta T}{T_2}\frac{R_1}{r}\left(\frac{4}{5}R_1\nu \ln(R_2/R_1) + \sqrt{\pi}\right)^{-1}, \qquad (30)$$

где роль параметра α играет величина $\sqrt{\pi}$, не зависящая от характеристик системы.

Совпадение выражений (26) и (30) имеет место лишь в бесстолкновительном режиме, когда радиус внутреннего цилиндра или расстояние между ними ничтожно малы по сравнению с длиной свободного пробега молекул газа. Причем, как было показано, значение потока тепла в перечисленных случаях определяется исключительно законами сохранения и задача может быть решена посредством элементарных рассуждений качественного характера. Формальное совпадение результатов наблюдается и в газодинамическом режиме. Однако в этом случае стандартный метод Лиза дает не зависящее от соотношения между радиусами цилиндров значение поправки к газодинамическому решению, которая в пределе $R_2 \gg R_1$ соответствует существенно завышенной величине коэффициента скачка температуры $C_t = 3.75$.

В промежуточном диапазоне соотношений между радиусами цилиндров и длиной свободного пробега молекул газа значения параметра α изменяются в достаточно широком интервале, практически в два раза. Значение α оказывается близким к стандартному при отношении R_1/R_2, близком к 0.7. В случае $R_2 > 1.5R_1$ стандартный метод Лиза дает заниженное значение потока тепла. Максимальное отличие Q от Q_s достигает 15% в диапазоне $R_1\nu \sim 1$ при $R_2 \sim 10R_1$. В случае зазора между цилиндрами меньшего $0.5R_1$ стандартный метод дает завышенный результат. При этом максимальное отличие Q от Q_s достигает 10% в области пика графика на рис. 1, т.е. при $R_1\nu \gg 1$, $R_2 \sim 1.1{-}1.2R_1$.

Список литературы

[1] *Lees L., Liu Chung-Yen* // Phys. Fluids. 1962. Vol. 5. N 10. P. 1137–1148.

[2] *Semyonov Yu.G., Borisov S.F., Suetin P.E.* // J. Heat Mass Transfer. 1984. Vol. 27. N 10. P. 1789–1799.

[3] *Коган М.Н.* Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967. 440 с.

[4] *Bhatnagar P.L., Gross E.P., Krook M.A.* // Phys. Rev. 1954. Vol. 94. N 3. P. 511–525.

[5] *Савков С.А., Юшканов А.А.* // МЖГ. 1986. № 5. С. 149–152.

[6] *Sone Y., Aoki K.* // Mem. Fac. Eng. Kyoto Univ. 1987. Vol. 49. N 3. P. 237–248.