

01;09;10

Функция Грина парного электромагнитного взаимодействия ондуляторных излучателей

© Е.В. Буляк, В.И. Курилко, А.П. Толстолужский, И.Н. Шаповал

Национальный научный центр "Харьковский физико-технический институт",
310108 Харьков, Украина

(Поступило в Редакцию 16 июня 1998 г.)

В дипольном приближении найдено аналитическое представление продольной силы Лоренца, которая описывает электромагнитное взаимодействие двух идентичных ондуляторных излучателей, движущихся вдоль оси спирального ондулятора. Установлена функциональная зависимость объема области когерентности указанных излучателей от внешних параметров системы. Обсуждаются условия применимости полученных результатов, а также основные аспекты их физического содержания.

Введение

Как известно [1,2], именно группировка электронов пучка в когерентно излучающие сгустки обеспечивает положительную обратную связь, необходимую для развития коллективных неустойчивостей в электронных усилителях и автогенераторах когерентного микроволнового излучения. В магнитотормозных (ондуляторных) лазерах на свободных электронах (ЛСЭ) такая группировка реализуется продольной силой Лоренца поля собственного ондуляторного излучения (СОИ) электронов пучка [3,4]. При достаточно больших значениях относительной объемной плотности пучка и сравнительно низких частотах, когда можно пользоваться жидкостной моделью пучка, пространственная структура указанной силы незначительна и в окончательные результаты теории входит только средняя объемная плотность частиц пучка. С другой стороны, в ультракоротковолновом диапазоне, где относительная объемная плотность ультрарелятивистского пучка электронов (УРЭП) сравнительно невелика, именно указанная структура в конечном счете определяет количество когерентно излучающих электронов. Именно этим количеством определяется и темп торможения пучка полем его микроволнового излучения в ондуляторе, и область параметров неравновесной системы УРЭП + ондулятор, в которой эта система переходит из режима источника некогерентного магнитотормозного (синхротронного) излучения в режим источника когерентного излучения класса ЛСЭ [5,6].

Основное содержание данной работы составляет поиск и аналитическое исследование функции Грина силы парного электромагнитного взаимодействия двух зарядов через поле микроволнового СОИ одного из них в спиральном ондуляторе. Как будет показано ниже, такое исследование оказывается возможным провести в дипольном приближении, когда напряженности поля ондулятора относительно невелики.

Физическая постановка задачи и метод ее решения

Конечной целью исследования является установление аналитической зависимости характерного объема области когерентности группирующей силы индивидуального излучателя (V_{coh}) от внешних параметров системы, а именно амплитуды поля ондулятора (H_0), длины периода последнего (D), а также релятивистского фактора заряда-излучателя (γ). Для достижения этой цели рассчитаем силу Лоренца микрорадиоволнового взаимодействия двух идентичных зарядов, которые движутся вдоль оси спирального ондулятора с равными скоростями на фиксированном расстоянии друг от друга и взаимодействуют друг с другом через поле СОИ одного из них. При этом в качестве исходных выражений для полей СОИ будет использовано классическое представление этих полей через запаздывающие потенциалы Лиенара–Вихерта [6,7]. С физической точки зрения мы будем использовать заряд-рецептор (на который действует микроволновое поле, испускаемое соседом эмиттером) как пробивное тело, которое детектирует структуру поля излучения эмиттера.

Решение

1) Поле СОИ индивидуального заряда в спиральном ондуляторе. Итак, рассмотрим ультрарелятивистский заряд ($\gamma \gg 1$), который движется вдоль оси спирального ондулятора со следующей структурой ондуляторного поля:

$$\mathbf{H}_w = H_0(\mathbf{e}_x \cos k_\omega z + \mathbf{e}_y \sin k_\omega z), \quad k_\omega \equiv \frac{2\pi}{D}. \quad (1)$$

Здесь \mathbf{e}_α — единичные векторы, направленные вдоль декартовых осей OX ($\alpha = x$) и OY ($\alpha = y$) соответственно; k_ω — волновое число ондулятора. Эмиттер, обладающий полной энергией $W_{\text{tot}} \equiv m_0 c^2 \gamma_{\text{tot}}$ и зарядом q , будет

двигаться вдоль оси такого ондулятора по спиральной траектории

$$\mathbf{R}_e[Z_e(t)] \equiv \mathbf{e}_x[X_e(0) + a_\omega \sin k_\omega Z_e(t)] + \mathbf{e}_y[Y_e(0) - a_\omega \cos k_\omega Z_e(t)] + \mathbf{e}_z Z_e(t), \quad (2)$$

где введены следующие обозначения: \mathbf{e}_z — единичный вектор, направленный вдоль оси OZ ; $Z_e(t) \equiv Z_e(0) + V_{\parallel}^{(0)}t$ — траектория равномерного продольного движения эмиттера; $\mathbf{R}_e(0)$ — его положение в момент эйлерова времени $t = 0$; $V_{\parallel}^{(0)} \equiv c\sqrt{1 - \gamma_{\parallel}^{-2}}$ — продольная скорость заряда; соответствующий продольный релятивистский фактор γ_{\parallel} однозначно определен полной энергией заряда γ_{tot} и безразмерной жесткостью поля ондулятора K

$$\gamma_{\parallel}^2 \equiv \frac{\gamma_{\text{tot}}^2}{1 + K^2}, \quad K \equiv \frac{qH_0D}{2\pi m_0 c^2},$$

а радиус вращения заряда в поле (1) также зависит от этих параметров

$$a_\omega = \frac{KD}{2\pi\gamma_{\text{tot}}}.$$

Наличие ускоренного движения эмиттера в поле (1) приводит к появлению поля излучения. В рассматриваемом ультракратковолновом приближении ($\gamma \gg 1$) это поле может быть представлено через запаздывающие потенциалы Лиенара–Вихерта в вакууме (без учета влияния границ области взаимодействия [7])

$$\mathbf{E}_{\text{rad}}^{(e)}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{c^2} \frac{[\mathbf{n}'_e, [\mathbf{n}'_e - \beta'_e \mathbf{V}'_e]]}{\mathbf{R}'_e(1 - \beta'_e \mathbf{n}'_e)^3}, \quad \mathbf{R}'_e \equiv \mathbf{r} - \mathbf{R}_e[Z_e(t')],$$

$$\mathbf{H}_{\text{rad}}^{(e)}(\mathbf{r}, t) \equiv [\mathbf{n}'_e, \mathbf{E}_{\text{rad}}^{(e)}], \quad \mathbf{n}'_e \equiv \frac{\mathbf{R}'_e}{R'_e}, \quad \beta'_e \equiv \frac{V'_e}{c}. \quad (3)$$

Здесь штрихами обозначены переменные, относящиеся к моменту t' испускания поля эмиттером. Этот момент однозначно связан с моментом t наблюдения этого поля соотношением

$$t = t' + \frac{R'_e}{c},$$

а точкой обозначена производная по времени t от поперечной скорости эмиттера.

2) Сила микроволнового взаимодействия двух идентичных зарядов. В общем случае (при произвольных значениях внешних параметров ондулятора и излучателя) структура поля (3) крайне сложна и не поддается исследованию аналитическими методами. Для того чтобы эту структуру представить в явном виде, рассмотрим предельный случай дипольного приближения, когда выполнено сильное неравенство $K^2 \ll 1$. Кроме того, с той же целью (представление этой структуры в явном виде) используем в качестве детектора другой такой же заряд (рецептор), который движется по траектории, отличающейся от траектории эмиттера (2) только начальными условиями,

$$\mathbf{R}_r(0) - \mathbf{R}_e(0) \equiv \mathbf{e}_x \rho_{\perp x} + \mathbf{e}_y \rho_{\perp y} + \mathbf{e}_z \rho_{\parallel}; \quad \rho_{\parallel} > 0. \quad (4)$$

Такой выбор средства детектирования существенно облегчает задачу исследования структуры группирующей силы поля СОИ эмиттера

$$F_{\text{rad}}^{(r,e)} \equiv q \left\{ \mathbf{E}_{\text{rad}}^{(e)}(\mathbf{R}_r, t) + \frac{1}{c} [\mathbf{V}_r, \mathbf{H}_{\text{rad}}^{(e)}(\mathbf{R}_r, t)] \right\}_z. \quad (5)$$

В самом деле, в этом случае правая часть (5) зависит только от продольного (ρ_{\parallel}) и поперечного ($\rho_{\perp} \equiv (\rho_x^2 + \rho_y^2)^{1/2}$) расстояния между зарядами на входе в ондулятор (но не зависит от времени). Раскладывая правую часть (5) по малому параметру $K^2 \ll 1$ и вводя новые безразмерные переменные $x \equiv k_\omega \rho_{\parallel} \gamma^2$, $y \equiv k_\omega \rho_{\perp} \gamma^2$, получим следующее представление силы (5):

$$F_{\text{rad}}^{(r,e)} = -2(qk_\omega K \gamma)^2 \Phi(x, y),$$

$$\Phi(x, y) \equiv \frac{1}{2(x^2 + y^2)} \left\{ A(x, y) \sin(x + \sqrt{x^2 + y^2}) - B(x, y) \left[1 - \cos(x + \sqrt{x^2 + y^2}) \right] \right\},$$

$$A(x, y) \equiv \sqrt{x^2 + y^2} \left[x(x + \sqrt{x^2 + y^2}) + \frac{1}{2}y^2 \right],$$

$$B(x, y) \equiv \frac{x \left[2x(x + \sqrt{x^2 + y^2}) - y^2 \right]}{2(x + \sqrt{x^2 + y^2})}. \quad (6)$$

Заметим, что первое (тормозящее) слагаемое в правой части (6) дает магнитная составляющая полной силы (5), а второе (ускоряющее) — электрическая составляющая этой силы.

Сферическая симметрия рассматриваемой задачи в переменных x, y отражается в соответствующей симметрии функции Грина $\Phi(x, y)$, которая выбрана нормированной на единицу на оси $y = 0$ при $x \rightarrow +0$. Эта симметрия позволяет ввести новые — сферические переменные с помощью замены $x \equiv \rho \cos(2\psi)$; $y \equiv \rho \sin(2\psi)$. В новых переменных функция Грина приобретает следующий вид:

$$G(\rho, \psi) \equiv \frac{\sin(\rho \cos^2 \psi)}{\rho} \left\{ 2(\cos^4 \psi) \cos(\rho \cos^2 \psi) - (\cos 2\psi) \left[\cos 2\psi - \sin^2 \psi \right] \frac{\sin(\rho \cos^2 \psi)}{\rho} \right\}. \quad (7)$$

Анализ пространственной структуры функции $G(\rho, \Psi)$

Согласно введенному выше определению аргументов этой функции, параметр $\rho \equiv \sqrt{x^2 + y^2}$ описывает приведенное (безразмерное) расстояние между рецептором и эмиттером, а угол $\Theta \equiv 2\Psi$ определяет наклон соответствующего вектора ρ относительно положительной полуоси ондулятора ($x > 0, y = 0$). В области малых значений указанного расстояния, где выполнено сильное

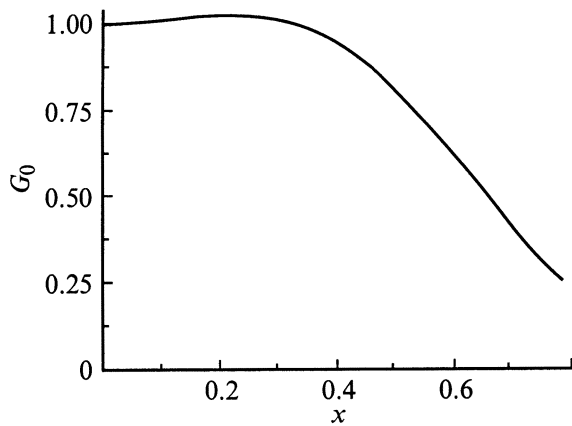


Рис. 1. Зависимость G_0 от аргумента $\Psi \equiv \Theta/2$.

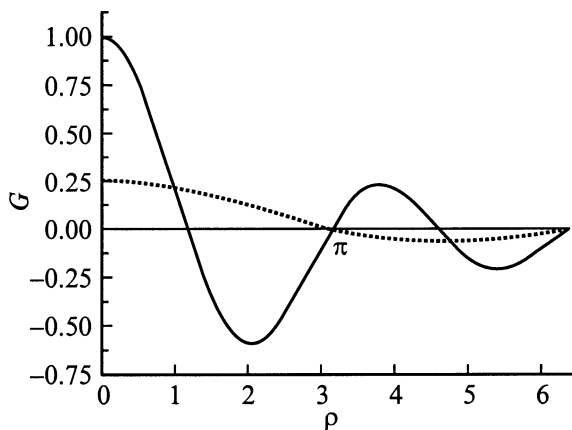


Рис. 2. Зависимость функции $G(\rho, \Psi)$ от аргумента ρ для двух значений Ψ : сплошная кривая — 0, пунктир — $\pi/4$.

неравенство $\rho^2 \ll 1$, соответствующая асимптотика $G_0(\Psi) \equiv G(0, \Psi)$ имеет вид

$$G_0(\Psi) = \left[2 \cos^2 \Psi - \cos 2\Psi (\cos 2\Psi - \sin^2 \Psi) \right] \cos^4 \Psi. \quad (8)$$

Как следует из этой формулы, с ростом модуля угла Θ от $\Theta_{\min} = 0$ до $\Theta_{\max} = \pi/2$ амплитуда $G_0(\Psi)$ сначала немного подрастает (до $G_{\max} \approx 1.024$ при $x \approx 0.29$), а затем монотонно убывает от значений порядка единицы (при $x \approx 0.3$) до $1/4$ (при $\Theta = \pi/2$). Соответствующий график представлен на рис. 1. В области $\rho > 1$ модуль правой части (7) убывает с ростом аргумента обратно пропорционально ρ . При этом такое убывание сопровождается осцилляциями G . Скорость этих осцилляций достигает максимума на оси эмиттера ($\Theta \rightarrow 0$) (где их период равен 2π) и убывает вдвое в поперечном направлении (т.е. при $\Theta \rightarrow \pi/2$; рис. 2). Именно это убывание поля магнитотормозного дипольного излучения эмиттера в дальней зоне последнего и является

первопричиной облабления степени когерентности торможения электронов УРЭП полем СОИ этих электронов при относительно малых значениях объемной плотности пучка ($Q \ll 1$; [5,6]). Именно в последнем предельном случае ($Q \ll 1$) рассматриваемая неравновесная система УРЭП + ондулятор функционирует в режиме источника некогерентного СОИ электронов УРЭП. Полагая равной нулю правую часть (7), получим кривую на полосе ($0 \leq \rho \leq \pi$; $0 < \Psi < \pi/4$), разделяющую положительные и отрицательные значения функции $G(\rho, \Psi)$. Эта кривая соответствует обращению в нуль фигурной скобки в правой части (7). Физически на этой кривой действие ускоряющей силы электрического поля эмиттера в правой части (5) полностью компенсируется противоположным действием его магнитного поля. Линии уровней соответствующей поверхности $G(\rho, \Psi)$ над указанной полосой представлены на рис. 3. Установив форму поверхности $G(\rho, \Psi)$, рассчитаем определяемый этой функцией объем области когерентности создаваемой эмиттером группирующей силы.

Этот объем однозначно определен интегралом

$$\begin{aligned} V_{\text{coh}} &\equiv 2\pi \int \rho_{\perp} d\rho_{\perp} d\rho_{\parallel} G(\rho_{\perp}, \rho_{\parallel}) \\ &= \frac{D\lambda^2}{\pi^2} \int G(\rho, \Theta/2) \rho^2 d\rho \sin \Theta d\Theta = D\lambda^2 f_{\text{coh}}, \\ f_{\text{coh}}(G_{\min}) &\equiv \pi^{-2} \int_{G \leq G_{\min}} G(\rho, \Theta/2) \rho^2 d\rho \sin \Theta d\Theta. \quad (9) \end{aligned}$$

Здесь интегрирование по безразмерной длине ρ и углу Θ необходимо выполнить только по той прилежащей к точке $\rho = 0$ области значений указанных аргументов, в которой подынтегральная функция $G(\rho, \Theta/2)$ не только положительна, но и превышает некоторую константу $G_{\min} > 0$.

Как видно из правой части (9), функциональная зависимость объема области влияния группирующей силы эмиттера от внешних параметров системы определяется

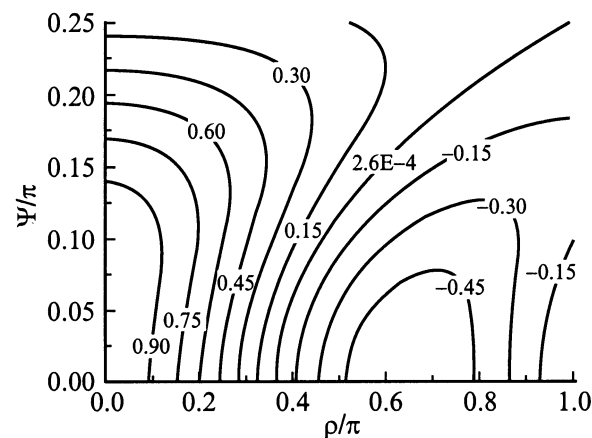


Рис. 3. Линии уровней функции $G(\rho, \Psi)$ над полосой ($0 \leq \rho \leq \pi$, $0 \leq \Psi \leq \pi/4$).

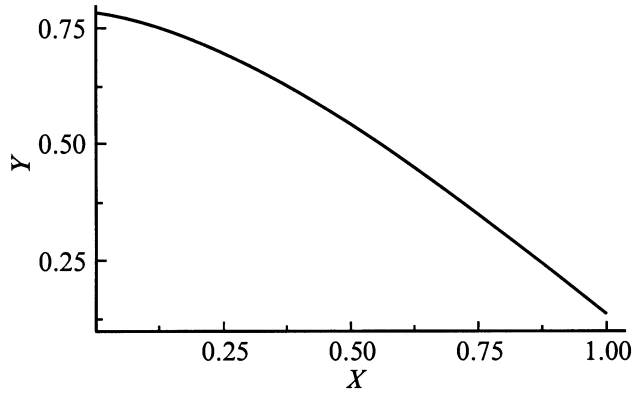


Рис. 4. Зависимость формфактора f_{coh} от величины G_{min} ($X = G_{\text{min}}$, $y = 2nf_{\text{coh}}$).

произведением квадрата длины волны СОИ ($\lambda \equiv D/2\gamma^2$) на период ондулятора (D). Не зависящий от этих параметров численный множитель f_{coh} представляет собой формфактор, который является функционалом от допустимой величины степени ослабления когерентности излучателей

$$\delta G \equiv 1 - G_{\text{min}} > 0. \quad (10)$$

График, иллюстрирующий зависимость величины формфактора f_{coh} от аргумента G_{min} приведен на рис. 4.

Обсуждение результатов

Основные результаты проведенного рассмотрения можно сформулировать следующим образом.

1. Предложен и реализован метод аналитического описания пространственной структуры группирующей силы поля СОИ ультрарелятивистского электрона в спиральном ондуляторе. Существо этого метода состоит в представлении поля излучателя (эмиттера) в явном аналитическом виде (в дипольном приближении) с помощью запаздывающих потенциалов Лиенара–Вихерта [7] и детектированию указанного поля рецептором, идентичным эмиттеру.

2. С помощью указанного метода не только установлена в явном аналитическом виде функциональная зависимость группирующей силы от длины и ориентации вектора ρ , соединяющего рецептор с эмиттером (см. формулу (7)), но и рассчитана зависимость величины характерного объема области влияния этой силы от внешних параметров системы эмиттер + рецептор СОИ (см. формулу (9)).

Переходя к обсуждению этих результатов, отметим прежде всего квадратичный спад величины объема области когерентности с укорочением длины волны СОИ. Именно этот спад ограничивает практические возможности продвижения рентгеновских ЛСЭ в область сверхжесткого рентгеновского излучения ($\lambda \leq 10^{-10}$ м). Особо следует при этом подчеркнуть, что скорость этого

спада не зависит от величины параметра K . В этом можно убедиться путем оценки величины объема области влияния эмиттера по теоретической модели для лампы бегущей волны (ЛБВ) с теми же параметрами пучка (γ_{\parallel}) и излучения (λ). В самом деле, уравнения спектров собственных волн ЛБВ и ЛСЭ аналогичны друг другу (см., например, [3,6,8]). Именно наличие такой аналогии позволяет оценить объем области влияния поля СОИ индивидуального эмиттера в ЛСЭ (по порядку величины) как объем цилиндра с высотой $H_{\text{coh}} = \lambda/2$ и радиусом $R_{\text{coh}} = \gamma_{\parallel} \lambda/2\pi$ [9]

$$V_{\text{coh}}^{(TWT)} \equiv \pi R_{\text{coh}}^2 H_{\text{coh}} = \frac{\lambda^2 D}{16\pi} = D\lambda^2 f_{\text{coh}}^{(TWT)},$$

$$f_{\text{coh}}^{(TWT)} \equiv \frac{1}{16\pi} \approx 2 \cdot 10^{-2}. \quad (11)$$

Как следует из вывода данной формулы, рассматриваемый объем, действительно, не зависит от величины параметра жесткости ондуляторного поля (K). В этом смысле формула (11) полностью аналогична полученной нами выше в дипольном приближении строгой формуле (9). Единственное различие между ними сводится к величине численного коэффициента — формфактора f_{coh} . Его значение можно оценить из следующих физических соображений. Строго говоря, объем области когерентности (9) должен соответствовать достаточно однородной по амплитуде силе микроволнового взаимодействия, для которой правая часть формулы (10) относительно мала. Положив $\delta G = 0.30$ ($G_{\text{min}} = 0.70$), что соответствует увеличению размеров сгустка томсоновских рассеивателей до четверти длины волны (в системе покоя сгустка; [6,10]), получим значение формфактора f_{coh} , близкое к приведенной выше оценке на основе аналогии ЛСЭ и ЛБВ: $f_{\text{coh}} = 0.04$.

Далее, определенных комментариев требует и амплитуда группирующей силы $F_{\text{rad}}^{(r,e)}$. Как следует из вида правой части (6), по зависимости от внешних параметров заряда-эмиттера и ондулятора указанная сила полностью совпадает с силой торможения излучением эмиттера (см., например, [7,11]). Единственное отличие состоит в величине результирующего численного коэффициента, который в формулах (6) и (7) в три раза больше, чем соответствующий коэффициент в силе торможения эмиттера его собственным магнитотормозным излучением в [7,11]. Основная причина этого отличия состоит в том, что при выводе аналитических асимптотик (6) и (7) мы считали модуль расстояния между излучателями существенно большим безразмерной амплитуды вращательного движения эмиттера и рецептора ($\rho \gg K$). В то же время хорошо известно [7], что сила торможения излучением определяется структурой поля излучения именно на малых расстояниях от эмиттера (т.е. при $\rho \leq K$). Поскольку в данной работе нас интересует главным образом пространственная структура силы (6) именно в области $\rho^2 \gg K^2$, то в этих условиях указанное различие не имеет принципиального значения.

В заключение данного раздела остановимся кратко на вопросах применимости полученных результатов и новизны использованного методического подхода.

Прежде всего здесь необходимо подчеркнуть, что использованное выше сильное неравенство $\rho^2 \gg K^2$ обеспечивает малость силы поля кулоновского взаимодействия зарядов

$$F_{\text{zoul}}^{(r,e)} \equiv \frac{(q\gamma k_\omega)^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} x$$

по сравнению с силой их микроволнового взаимодействия (6). Это позволяет не учитывать кулоновское поле в правой части (6) как малую поправку к полю излучения (5).

Далее следует заметить, что классическое описание поля СОИ потенциалами Лиенара–Вихерта применимо только в том предельном случае, когда число магнитотормозных квантов, испускаемых эмиттером на половине периода ондулятора (где кривизна траектории излучателя остается конечной)

$$N_{\hbar\omega} \equiv \frac{(qk_\omega K\gamma)^2 D}{3\hbar\omega} = \frac{\pi q^2}{3\hbar c} K^2 (1 + K^2), \quad (12)$$

оказывается существенно большим единицы (подробнее см., например, [11]). Если последнее условие не выполнено, то необходимо учитывать случайный характер испускания и поглощения квантов поля двуужущимися зарядами.

Заметим, что условие (12) может быть реализовано даже при дипольном приближении, если эмиттер представляет собой сгусток, содержащий достаточно большое число электронов

$$Q \gg \min Q(N_{\hbar\omega}) \equiv \left| \frac{q}{e} \right| = \sqrt{\frac{3N_{\hbar\omega}}{\pi K^2 (1 + K^2)} \frac{\hbar c}{e^2}} \gg 1,$$

где e — заряд электрона.

Наконец, моделирование полей СОИ электронов пучка с применением запаздывающих потенциалов Лиенара–Вихерта было реализовано в [12]. Ограничиваясь дипольным приближением, авторы [12] описали самосогласованную динамику пучка в поле СОИ его частиц (электронов). Отказ от дипольного приближения, естественно, расширяет область применимости полученных результатов. Однако при этом неизбежна потеря физической прозрачности этих результатов за счет использования методов численного моделирования (ср., например, [12–14]).

Авторы благодарны В.А. Буцу, Н.И. Айзацкому, А.Н. Лебеву и К.Н. Степанову за полезные обсуждения изложенных выше результатов.

Работа выполнена при поддержке УНТЦ (контракт № 279).

Список литературы

- [1] *Файнберг Я.Б.* // Атомная энергия. 1961. Т. 11. С. 313–335.
- [2] *Гапонов А.В., Петелин М.И., Юлпатов В.К.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1967. Т. 10. № 10/11. С. 1414–1453.
- [3] *Sprangle Ph., Smith R.A.* // Phys. Rev. 1980. Vol. A21. P. 293–301.
- [4] *Marshall Th.C.* Free-Electron Lasers. New York; London: McMillan Publ. Co., 1985. (Пер. Маршалл Т. Лазеры на свободных электронах. М.: Мир, 1987).
- [5] *Kurilko V.I., Tkach Yu.V.* // Nucl. Instr. and Methods. 1989. Vol. A282. P. 431–435.
- [6] *Курилко В.И., Ткач Ю.В.* // УФН. 1995. Т. 165. № 3. С. 241–261.
- [7] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. М.: Физматгиз, 1960.
- [8] *Вайнштейн Л.А., Солнцев В.А.* Лекции по сверхвысокочастотной электронике. М.: Сов. радио, 1973.
- [9] *Буляк Е.В., Курилко В.И.* // Докл. НАН Украины. 1998. № 7. С. 82–84.
- [10] *Курилко В.И., Огневенко В.В.* // Физика плазмы. 1994. Т. 20. № 5. С. 475–482.
- [11] *Базылев В.А., Живаго Н.К.* Излучение быстрых частиц в веществе и внешних поля. М.: Наука, 1987.
- [12] *Курилко В.И., Огневенко В.В.* // ДАН России. 1994. Т. 335. С. 437–439. Физика плазмы. 1994. Т. 20. С. 633–639. ЖТФ. 1996. Т. 66. Вып. 10. С. 182–191.
- [13] *Tecimer M. and Elias L.* // Proc. 1995 Part. Accel. Conf. Dallas, 1995. Vol. 1. P. 254–256.
- [14] *Elias L.* // Proc. EPAC-96. Barselona, 1996. Vol. 1. P. 724–726.