

## Критическое поведение и $1/f$ -шум при пересечении двух фазовых переходов в сосредоточенных системах

© В.П. Коверда, В.Н. Скоков

Институт теплофизики УрО РАН,  
620219 Екатеринбург, Россия  
E-mail: iva@itp.e-burg.su

(Поступило в Редакцию 12 февраля 1999 г.)

Показано, что взаимодействие параметров порядка при пересечении докритического и закритического фазовых переходов может приводить к самоорганизации критического состояния и флуктуациям со спектральной плотностью вида  $1/f^\alpha$ , где  $1 \leq \alpha \leq 2$ . Подобное поведение присуще классу потенциальных и непотенциальных систем нелинейных уравнений Ланжевена. Проведенный численный анализ решений предложенных систем стохастических дифференциальных уравнений показал связь таких решений с дробным интегрированием и дифференцированием белого шума, а также общие черты поведения системы с явлением самоорганизованной критичности.

### Введение

Флуктуационные процессы со спектром обратно пропорциональным частоте  $1/f^\alpha$ -шум,  $0.5 \leq \alpha \leq 1.5$ ) наблюдаются в системах различной природы. Спектры типа  $1/f^\alpha$  регистрируются у флуктуаций тока в радиофизических устройствах, в некоторых биологических системах, геофизических процессах [1–4]. Недавно была экспериментально обнаружена интенсивная генерация  $1/f$ -шума в системе двух взаимодействующих неравновесных фазовых переходов [5,6]. Реализация такого процесса осуществлена наложением фазового перехода сверхпроводник–нормальный проводник в условиях джоулева саморазогрева на критический переход от пузырькового к пленочному кипению жидкого азота, охлаждающего сверхпроводник.

Несмотря на распространенность  $1/f$ -шума и ослабевающий интерес к случайным процессам с низкочастотной спектральной расходимостью, к настоящему времени отсутствует общепринятая математическая модель и часто неясны механизмы, приводящие к генерации  $1/f^\alpha$ -шумов. Для объяснения возникновения  $1/f$ -шума в различных процессах привлекаются разные модели.

Наиболее распространенным объяснением происхождения  $1/f$ -шума в радиофизике и физике твердого тела является экспоненциально широкое распределение времен релаксации. При этом  $1/f$ -шум трактуется как суперпозиция релаксационных случайных процессов [1–4]. Флуктуации электронной проводимости с  $1/f^\alpha$ -спектром в твердых телах часто связывают также с механизмами теплопроводности [7]. Но при интерпретации экспериментальных результатов такой подход сталкивается с известными трудностями [1,2]. По этой причине в [8] учитываются нелинейные источники тепла в уравнении теплопроводности. Термические механизмы возникновения  $1/f^\alpha$ -шума в металлах рассмотрены в работе [9], в которой происхождение данного шума связывается с нелинейным взаимодействием диффузионных

и теплопроводных мод. В [10]  $1/f$ -шум связывается с сильными флуктуациями скоростей релаксации и диссипации, а в [11] трактуется как результат броуновского движения в пространстве ограниченной размерности.

Известно, что случайный процесс со спектром  $1/f$  формально может быть получен в результате дробного интегрирования (степени  $1/2$ ) белого шума [3,4]. Процедура дробного интегрирования подразумевает наличие у системы бесконечной памяти о прошлых событиях, поэтому указанный подход к проблеме  $1/f$ -шума не нашел пока должного отражения в физических моделях.

В работе [12] для объяснения происхождения  $1/f$ -шума предложена концепция самоорганизованной критичности, проиллюстрированная на модели клеточных автоматов "куча песка". Теория самоорганизованной критичности подразумевает, что системы с  $1/f^\alpha$ -шумом должны находиться в критическом состоянии, но это критическое состояние не нуждается в тонкой подстройке управляющих параметров, а является одним из основных состояний существования системы. Работа [12] вызвала большой резонанс, и концепция самоорганизованной критичности стала достаточно широко использоваться в статистической физике.

Авторами настоящей работы для объяснения экспериментов по генерации интенсивного  $1/f$ -шума в системе токнесущий сверхпроводник–кипящий охладитель, была предложена математическая модель пресекающихся фазовых переходов, которая представляет собой систему двух связанных нелинейных уравнений Ланжевена, преобразующую белый шум в две моды стохастических колебаний со спектрами, пропорциональными  $1/f$  и  $1/f^2$  [6,13].

В настоящей работе приводятся результаты исследования численными методами системы связанных нелинейных уравнений Ланжевена, указывающие на некоторые общие черты поведения данной системы с процедурой дробного интегрирования белого шума и концепцией самоорганизованной критичности.

## 1/f-шум при пересечении двух фазовых переходов

При экспериментальном исследовании теплового разрушения сверхпроводимости тонких пленок высокотемпературных сверхпроводников, охлаждаемых кипящим азотом, была обнаружена генерация интенсивного 1/f-шума [5,6,14]. Этот шум наблюдался в области пересечения докритического неравновесного фазового перехода от пузырькового к пленочному кипению азота и критического или закритического перехода сверхпроводник-нормальный проводник в условиях джоулева саморазогрева. Характерной особенностью данных экспериментов является то, что оба перехода локализованы в пространстве и систему можно считать сосредоточенной.

В случае пересечения не взаимодействующих закритического и докритического фазовых переходов с параметрами порядка  $x$  и  $y$ , сосредоточенная система описывается потенциалом

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{4}a_1x^4 + \frac{1}{2}a_2x^2 + \frac{1}{2}b_1y^4 - b_2y^2, \quad (1)$$

где параметры порядка  $x$  и  $y$  описывают соответственно закритический и докритический фазовые переходы, коэффициенты  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  и  $b_2$  положительны.

Взаимодействие фазовых переходов формально можно учесть нелинейным преобразованием переменных. Введем взаимодействующие параметры порядка  $X$  и  $Y$ , связанные с  $x$  и  $y$  простейшими соотношениями  $x \equiv X$ ,  $y^2 \equiv XY$ . В этом случае потенциал (1) приобретает вид

$$\Phi(X, Y) = \frac{1}{4}a_1X^4 + \frac{1}{2}a_2X^2 + \frac{1}{2}b_1X^2Y^2 - b_2XY. \quad (2)$$

На рис. 1 показан вид потенциальной поверхности  $\Phi(X, Y)$ , а на рис. 2, а — линии уровня потенциального "дна".

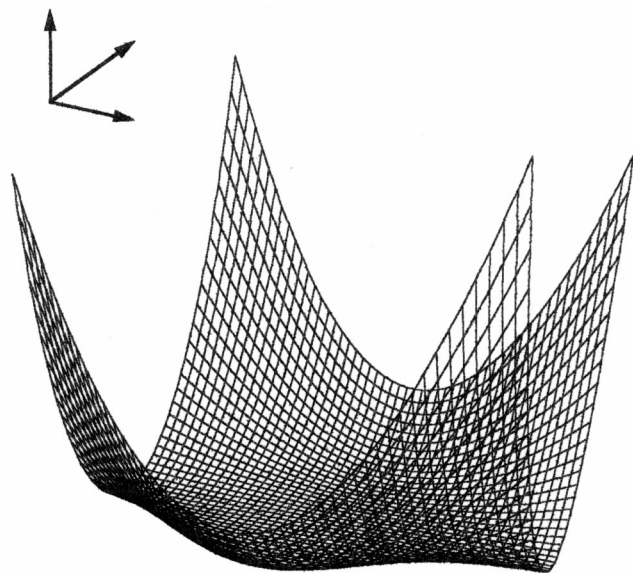


Рис. 1. Потенциальная поверхность  $\Phi(X, Y)$ , определяемая (2).

При аддитивном воздействии на систему белого шума случайные блуждания в потенциале (2) описываются системой уравнений Ланжевена

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= -b_1XY^2 + b_2Y - a_1X^3 - a_2X + \varepsilon_1(t), \\ \frac{dY}{dt} &= -b_1X^2Y + b_2X + \varepsilon_2(t), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\varepsilon_1(t)$  и  $\varepsilon_2(t)$  — гауссовские  $\delta$ -коррелированные шумы с нулевым средним и стандартным отклонением  $D$ .

Система (3) решалась численно методом Эйлера, где в качестве  $\varepsilon_1(t)$  и  $\varepsilon_2(t)$  использовались гауссовские последовательности случайных чисел.

При интегрировании системы (3) в отсутствие внешнего шума и при ненулевых (но близких к нулю) начальных условиях переменные  $X(t)$  и  $Y(t)$  в начале линейно возрастают со временем, а затем при  $t \rightarrow \infty$  имеют асимптотику  $X(t) \rightarrow t^{-1/2}$ ,  $Y(t) \rightarrow t^{1/2}$ . Введение в систему (3) шумов  $\varepsilon_1(t)$  и  $\varepsilon_2(t)$  небольшой интенсивности приводит, как показывает численное интегрирование системы (3), лишь к зашумлению указанных выше траекторий, не изменяя качественно поведение системы. При увеличении интенсивности внешнего шума выше некоторого значения фазовые траектории качественно изменяются. Наблюдается переход от релаксационного поведения динамических переменных  $X(t)$  и  $Y(t)$  к стационарным случайным процессам. При этом существует интервал дисперсии внешнего белого шума, при котором спектральные плотности флуктуаций переменных  $X(t)$  и  $Y(t)$  имеют вид соответственно  $S_X(f) \sim 1/f$  и  $S_Y \sim 1/f^2$ . С дальнейшим увеличением интенсивности белого шума расходящиеся спектральные характеристики типа  $1/f^\alpha$  переходят в спектры лоренцовского типа с характерной "полкой" в области низких частот. Интервал частот, в котором прослеживаются спектры вида  $1/f^\alpha$  быстро возрастает с уменьшением шага интегрирования. При этом расширяется коридор интенсивностей белого шума, в котором наблюдается  $1/f^\alpha$ -поведение спектров переменных  $X(t)$  и  $Y(t)$ . На рис. 3 приведен 1/f-спектр переменной  $X(t)$ , полученный в результате Фурье-преобразования численного решения системы (3) при значениях коэффициентов  $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 1$  и дисперсии внешнего шума  $D2 = 25$  (шаг интегрирования  $\Delta t = 0.01$ , число шагов  $N = 262143$ ). Соответствующий спектр переменной  $Y(t)$  имеет вид  $S_Y \sim 1/f^2$ . На рис. 4 показан фазовый портрет системы.

Таким образом, взаимодействие докритического и закритического фазовых переходов, определяемое потенциалом (2), показанным на рис. 1, может приводить к преобразованию аддитивного белого шума в стационарные стохастические процессы со спектральными плотностями  $1/f^\alpha$ -типа. Флуктуации с  $1/f$ -спектром являются в предложенной модели результатом броунирования системы в двухдолинном потенциале (2).

Системы ланжевенских уравнений, приводящих к  $1/f^\alpha$ -шумам, не обязательно должна являться потенциальной. В простейшем случае непотенциальная система,

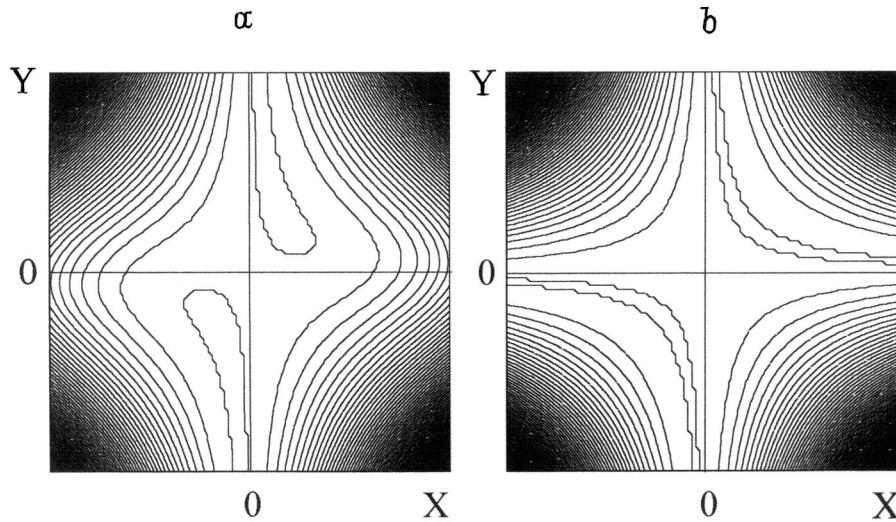


Рис. 2. Линии уровня потенциального "дна":  $a$  — (2),  $b$  — (5).

приводящая к генерации  $1/f$ -шума, имеет вид [6]

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= -XY^2 + Y + \varepsilon_1(t), \\ \frac{dY}{dt} &= -X^2Y + \lambda X + \varepsilon_2(t), \end{aligned} \quad (4)$$

где параметр  $\lambda > 1$ .

При  $\lambda = 1$  система (4) описывает случайные блуждания в потенциале

$$\Phi(X, Y) = \frac{1}{2}X^2Y^2 - XY, \quad (5)$$

линии уровня которого показаны на рис. 2,  $b$ . Однако в данном случае ( $\lambda = 1$ )  $1/f^\alpha$ -поведение системы не наблюдается и спектры переменных  $X(t)$  и  $Y(t)$  имеют лоренцовский вид. Для появления  $1/f^\alpha$ -спектров с расходящейся низкочастотной асимптотикой необходимо нарушить симметрию детерминированных составляющих сил в ланжевеновских уравнениях. В системе (4) это достигается введением дополнительной силы, не связанной с потенциалом (отличие от 1 коэффициента  $\lambda$ ). Физически это может означать присутствие в открытой системе нескомпенсированных потоков. Как показали результаты проведенных численных расчетов, поведение системы (4) качественно не отличается от поведения потенциальной системы (3). Более того, решения, близкие к (4), получаются, если в первых слагаемых детерминированных сил в уравнениях (4) заменить вторую степень на четвертую или шестую, а вместо линейных слагаемых взять соответственно третью или пятую степень. Во всех случаях среднее значение  $\langle X(t)Y(t) \rangle \simeq 1$ , но асимптотики релаксации при  $t \rightarrow \infty$  бесшумовых систем с повышенной степенью иная, хотя тоже дробно-степенная (соответственно  $t^{-1/4}$ ,  $t^{3/4}$  и  $t^{-1/6}$ ,  $t^{5/6}$ ).

Заметим также, что если осуществить поворот фазовой плоскости в уравнениях (4) на угол  $\pi/4$  путем линейного преобразования  $u = (x+y)/2$  и  $v = (x-y)/2$ , то получим новую систему

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\frac{1}{2}u^3 + \frac{3}{2}u + \frac{1}{2}uv^2 + \frac{1}{2}v + \varepsilon_1(t), \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{2}v^3 - \frac{3}{2}v + \frac{1}{2}u^2v - \frac{1}{2}u + \varepsilon_2(t), \end{aligned} \quad (6)$$

которая в широком диапазоне интенсивностей белого шума дает близкие (но не совпадающие) стохастические процессы со спектрами  $S_u(f) \sim f^{-1.5}$  и  $S_v(f) \sim f^{-1.5}$ .

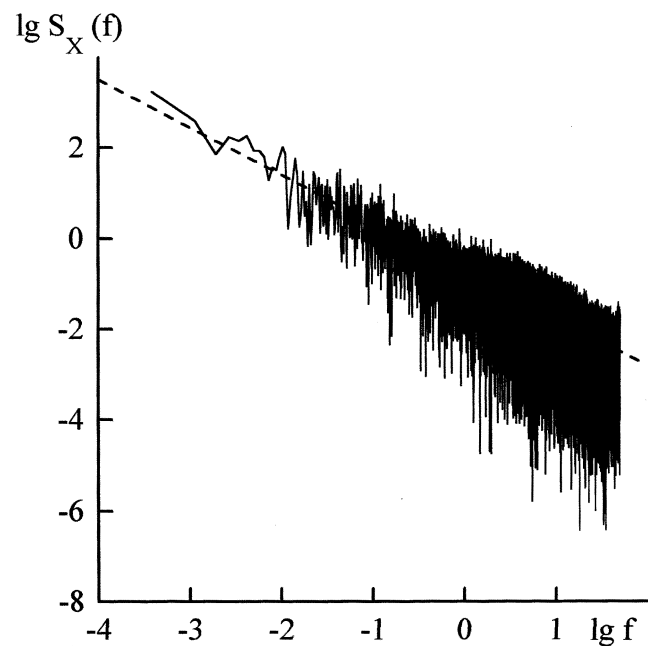
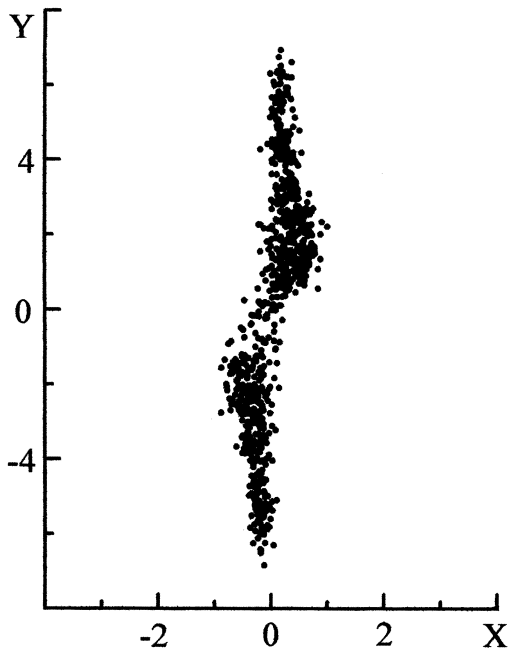


Рис. 3.  $1/f$ -поведение спектральной плотности параметра порядка  $X(t)$  из системы (3). Штриховая кривая —  $S_X(f) \sim 1/f$ .



**Рис. 4.** Фазовый портрет системы в плоскости переменных  $X$ ,  $Y$ , полученный численным интегрированием (3).

При повороте на другой угол можно получить другие показатели низкочастотной расходимости  $\alpha$  в пределах  $1 \leq \alpha \leq 2$ . Из записи системы (6) видно, что она соответствует, как и потенциальная система (3), пересечению двух взаимодействующих фазовых переходов: одного докритического (параметр  $u$ ) и другого закритического (параметр  $v$ ). Однако в отличие от системы (3), в (6) в детерминированных составляющих сил содержатся непотенциальные члены, определяющие наличие нескомпенсированного потока. Разумеется, что такой же физический смысл можно придать и системе (4). Взаимодействие докритического и закритического фазовых переходов приводит в указанных системах к критическому поведению в достаточно широком диапазоне интенсивностей белого шума, о чем свидетельствует низкочастотная расходимость спектральных плотностей параметров порядка.

Таким образом, существует целый класс систем нелинейных уравнений Ланжевена, которые дают  $1/f^\alpha$ -поведение спектров переменных. Общим для них являются наличие нелинейного взаимодействия и асимметрия уравнений. В дальнейшем мы ограничимся анализом простейших систем (4) при значениях коэффициента  $\lambda = 2$ .

### Критичность системы ланжевенских уравнений

При численном интегрировании системы (4) методом Эйлера обнаруживается неустойчивость счета с ростом шага интегрирования даже в отсутствие внешнего шума [6]. Устойчивой при любых шагах и начальных усло-

виях эйлеровскую схему интегрирования можно сделать, если значение  $X_i$  в первом слагаемом первого уравнения брать не в начальной точке интервала разбиения  $\Delta t$ , а в конечной. В этом случае приходим к системе

$$\begin{aligned} X_{i+1} &= X_i + (-X_i Y_i^2 + Y_i) \Delta t (1 + Y_i^2 \Delta t)^{-1} + \xi_i \Delta t, \\ Y_{i+1} &= Y_i + (-X_i^2 Y_i + 2X_i) \Delta t + \eta_i \Delta t, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\xi_i$  и  $\eta_i$  — последовательности гауссовских случайных чисел с нулевым средним и стандартным отклонением  $D$ .

К такому же виду первого уравнения системы (4) можно прийти более строго. Для этого следует учесть при интегрировании с конечным шагом  $\Delta t$  скачки не только первой, но и всех последующих производных

$$X(t + \Delta t) = X(t) + \frac{dX}{dt} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{d^2 X}{dt^2} \Delta t^2 + \dots$$

Выразив значения производных через сами функции  $X$  и  $Y$  и просуммировав сходящуюся геометрическую прогрессию, приходим к (7).

Заметим, что при изменении шага интегрирования в  $n$  раз, необходимо в  $n^{-1/2}$  раз изменить стандартное отклонение белого шума  $D$ . При уменьшении шага интегрирования в  $n$  раз длительность выборки во времени (число шагов), при которой наблюдается  $1/f^\alpha$ -поведение, можно увеличить более чем в  $n$  раз, т.е. проследить расходимость спектров в области более низких частот.

Рассмотрим более подробно свойства решений системы (4). Прежде всего необходимо отметить, что в широком диапазоне параметров внешнего шума, при которых наблюдается  $1/f^\alpha$ -поведение спектров, среднее значение произведения переменных  $\langle X(t) \cdot Y(t) \rangle \simeq 1$ . Это означает, что среднее по времени значение детерминированной силы в первом уравнении системы (4) равно 0. Равенство нулю детерминированной силы в уравнении Ланжевена соответствует критическому состоянию. Иными словами, система (4) подстраивает первое уравнение под критическое состояние.

Как отмечалось во Введении,  $1/f$ -шум может быть получен дробным интегрированием "белого" шума, т.е. стохастический процесс с  $1/f$ -спектром можно рассматривать как результат аномального броуновского движения.

В работе [15] мы уже обращали внимание на корреляцию временных рядов  $X(t)$  с дробным интегрированием степени  $1/2$  белого шума, действующего на первое уравнение системы (4).

Дробный интеграл порядка  $1/2$  от белого шума  $\varepsilon(t)$  определяется выражением

$$I_{1/2}(t) = \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^t \frac{\varepsilon(t')}{\sqrt{t-t'}} dt', \quad (8)$$

где  $\Gamma$  — гамма-функция Эйлера.

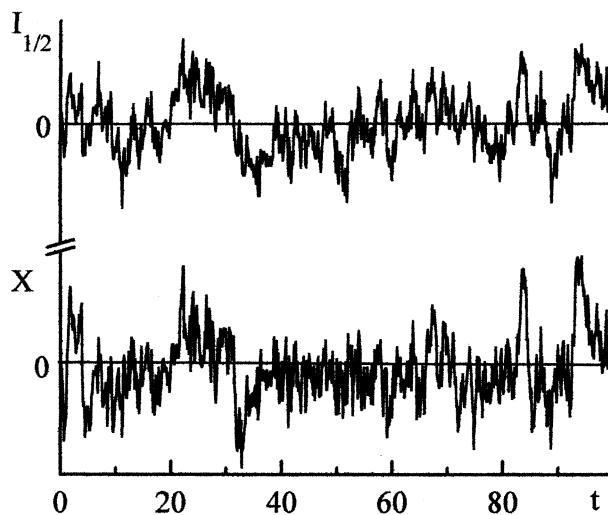


Рис. 5. Численное решение  $X(t)$  из системы (7) и дробный интеграл степени  $1/2$  белого шума.

Случайный процесс, определяемый (8), является стационарным и имеет  $1/f$ -спектр, строго говоря, лишь при  $t \rightarrow \infty$ . На рис. 5 приведены численное решение  $X(t)$  из системы (7) и результат расчета по формуле (8) при значениях  $\Delta t = 0.1$ ,  $D = 4.3$ ,  $N = 1000$ . Из рис. 5 видно, что результат дробного интегрирования белого шума сравнительно неплохо аппроксимирует численное решение системы ланжевеновских уравнений (7) для коротких реализаций. Коэффициент корреляции Пирсона для векторов  $X_i$  и  $I_i$  соответствует  $K_p \simeq 0.75$ . Большей корреляции в данном случае ожидать трудно, так как формула (8) совершенно не учитывает детерминированные составляющие сил, входящие в системы уравнений (4) и (7).

Гораздо более сильные корреляции обнаружены между скоростями изменения динамических переменных, входящих в систему ланжевеновских уравнений (7), и функционалами белого шума, содержащими дробные производные. Данное свойство может быть использовано для нахождения решений системы (7). Остановимся на этом более подробно.

Дробная производная порядка  $1/2$  от белого шума определялась как целая производная от дробного интеграла

$$D^{1/2}(\varepsilon) \equiv \frac{d^{1/2}\varepsilon(t)}{dt^{1/2}} = \frac{dI_{1/2}(t)}{dt}. \quad (9)$$

Вычисление дробного интеграла (и соответственно дробной производной по формуле (9)) требует при большом числе шагов интегрирования больших затрат машинного времени, гораздо большего, чем интегрирование исходной системы ланжевеновских уравнений, которая является марковской и не имеет памяти. Поэтому для длинных реализаций мы использовали следующую

аппроксимацию для дробной производной:

$$D^{1/2}(\xi_i) = \sum_{j=\begin{cases} 0, & i \leq r \\ i-r, & i > r \end{cases}}^{i-1} (\xi_{j+1} - \xi_j)(i-j)^{-3/2}, \quad (10)$$

где  $r$  ограничивает число слагаемых при суммировании.

Результаты расчетов по формуле (10) оказались практически тождественными результатами прямого вычисления дробной производной по формуле (9) при значительно меньших затратах машинного времени. Для шагов  $\Delta t > 0.1$  можно ограничиться значением  $r$  в пределах нескольких десятков.

Замечательным свойством системы (7) оказалось то, что скорость изменения стохастической переменной  $\dot{X}_i = (X_{i+1} - X_i)/\Delta t$ , полученная из численного решения (7), очень сильно коррелирует с дробной производной степени  $1/2$  от последовательности случайных чисел  $\xi_i$ , входящих в первое уравнение системы (7). Коэффициент корреляции этих величин составлял  $K_p = 0.92-0.99$  для любых реализаций и последовательностей  $\xi_i$ . Причем результат практически не зависел, рассчитывается ли дробная производная по формуле (9) или по сокращенной формуле (10).

Что касается второго уравнения системы (7), то оказалось, что скорость изменения переменной  $\dot{Y}_i = (Y_{i+1} - Y_i)/\Delta t$  при малых шагах интегрирования  $\Delta t \leq 0.1$  сильно коррелирует с самими значениями последовательности случайных чисел  $\eta_i$ , входящей во второе уравнение системы (7). Коэффициенты корреляции в данном случае составляли  $K_p \simeq 0.95$ , но в отличие от первого уравнения зависели от шага  $\Delta t$ . При малых шагах коэффициенты корреляции были близки к 1 и уменьшались с увеличением шага (или увеличении длины реализации при заданном шаге).

Таким образом, по крайней мере для малых шагов интегрирования  $\Delta t$  детерминированная составляющая силы во втором уравнении системы (7) под воздействием внешних шумов автоматически подстраивается к нулю. Поскольку такое поведение устойчиво к вариации коэффициентов системы и наблюдается в некотором (достаточно широком) интервале интенсивностей внешнего шума, то можно говорить о самоорганизации критического состояния.

Для нахождения других свойств системы (7) мы исследовали корреляцию различных комбинаций стохастических переменных  $X_i$  и  $Y_i$  с комбинациями шумов  $\xi_i$ ,  $\eta_i$  и их дробных производных. Мы нашли, что вектор  $X_i \cdot Y_i$  сильно закоррелирован с разностью дробной производной степени  $1/2$  от белого шума в первом уравнении (7) и самого этого шума  $\Delta\mu_i = D^{1/2}(\xi_i) - \xi_i$ , так что выполняется приближенное равенство

$$X_i \cdot Y_i \simeq 1 + \Delta\mu_i \cdot Y_i. \quad (11)$$

Равенство (11) выполняется с коэффициентом корреляции  $K_p = 0.92-0.98$ . С указанной точностью

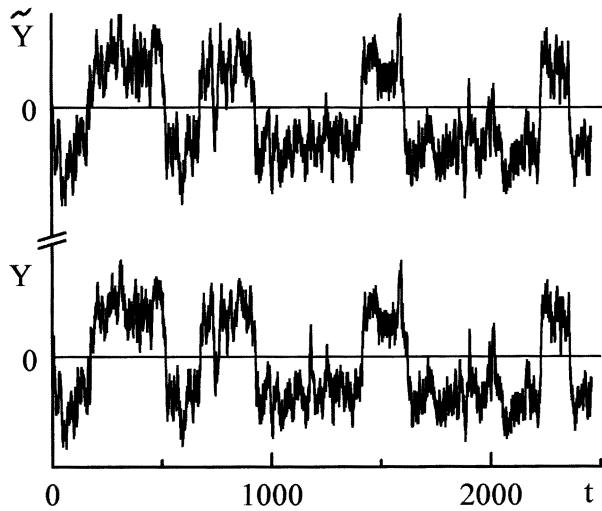


Рис. 6. Численные решения  $Y(t)$  из системы (7) и  $\tilde{Y}(t)$  из стохастического уравнения (13).

выражение (11) позволяет аппроксимировать одну из переменных системы, если известна другая, и шум, действующий на первое уравнение системы (7). Но для разделения переменных в (7) приближенное равенство (11) оказалось недостаточно точным. Поэтому мы рассмотрели корреляцию разности  $\dot{Y}_i - \eta_i$  с комбинациями шумов и нашли, что приближенное равенство

$$1 - Y_i^2(\Delta\mu_i)^2 + mY_i\Delta\mu_i \simeq Y_i(\dot{Y}_i - \eta_i) \quad (12)$$

выполняется с корреляцией  $K_P = 0.95$ . Третье слагаемое в левой части (12) содержит постоянный коэффициент  $m$ , величина которого оценена от  $m = 2$  при шаге  $\Delta t = 0.1$  до  $m = 0.5$  при  $\Delta t = 0.5$ . Это слагаемое слабо влияет на коэффициент корреляции (в третьем знаке после запятой), но оно в первом порядке учитывает асимметрию распределения вероятностей произведения  $X_i \cdot Y_i$  относительно нуля. Корреляция (12) эквивалентна уравнению

$$\tilde{Y}_{i+1} = \tilde{Y}_i + \tilde{Y}_i \frac{\Delta t}{1 + \tilde{Y}_i^2} - \tilde{Y}_i(\Delta\mu_i)^2 \Delta t + m\Delta\mu_i \Delta t + \eta_i \Delta t. \quad (13)$$

Уравнение (13) хорошо аппроксимирует второе уравнение системы (7), но содержит в отличие от (7) только одну неизвестную стохастическую функцию  $\tilde{Y}(t)$ . Во втором слагаемом в правой части (13)  $1/\tilde{Y}_i$  заменено на  $\tilde{Y}_i/(1 + \tilde{Y}_i^2)$ , чтобы избежать сингулярности. При такой замене наблюдается лучшая корреляция бесшумового поведения (7) и (13). На коротких реализациях (до 4000 точек) коэффициент корреляции решений для  $Y_i$  из (7) и  $\tilde{Y}_i$  из (13) составляет  $K_P \simeq 0.95$ . Но если на систему (7) действуют не два шума, а только один ( $\xi_i = \eta_i$ , то решения  $Y_i$  и  $\tilde{Y}_i$  практически совпадают на нескольких десятках тысяч шагов ( $K_P = 0.98-0.99$ ) (рис. 6).

Фактически, анализ возможных корреляций стохастических переменных системы (7) с комбинациями воздействующих на эту систему шумов позволил в первом

порядке корреляций разделить переменные в этой системе. Соответствующее стохастическое уравнение для  $\tilde{Y}(t)$  имеет вид

$$\frac{dY}{dt} = \frac{Y}{1 + Y^2} - Yz^2(t) + mz(t) + \varepsilon_2(t), \quad (14)$$

где  $z(t) = \varepsilon_1 - d^{1/2}\varepsilon_1/dt^{1/2}$  — разность шума, воздействующего на первое уравнение системы (4), и дробной (степени 1/2) производной этого шума, которая для белого шума понимается в смысле обобщенных функций [16]. Стохастическое дифференциальное уравнение (14) является мультипликативным, его физическая интерпретация более сложна, чем системы (4). Но оно демонстрирует вариант самоподстройки детерминированной составляющей силы к нулевым значениям, чтобы выполнялось приближенное равенство  $dY/dt \simeq \varepsilon_2(t)$ , обеспечивая самоорганизованную критичность.

## Заключение

Пересечение двух докритического и закритического фазовых переходов с взаимодействующими параметрами порядка может приводить к самоорганизации критического состояния системы. Случайные блуждания в соответствующем двухдолинном потенциале (2) приводит к трансформации аддитивного белого шума в две моды стохастических колебаний с  $1/f$ - и  $1/f^2$ -спектральными плотностями. Случайным блужданиям подобного типа соответствует целый класс систем нелинейных уравнений Ланжевена как с потенциальной, так и с непотенциальной детерминированной силой. Линейным преобразованием переменных (поворотом вокруг оси симметрии) можно получить  $1/f^\alpha$ -стохастические процессы с любым значением  $\alpha$  от 1 до 2. Несмотря на то что полученная система стохастических дифференциальных уравнений является марковской, ее решения сильно закоррелированы с дробным интегралом белого шума, существенным свойством которого является наличие памяти у системы. Приведенный численными методами анализ решений системы нелинейных ланжевенских уравнений и найденные корреляции демонстрируют общие черты поведения системы и явления самоорганизованной критичности. В отличие от традиционных моделей самоорганизованной критичности типа "кучи песка", которые являются пространственно распределенными, предложенная модель взаимодействующих фазовых переходов не содержит пространственных координат и соответствующая система стохастических дифференциальных уравнений является точечной. Обнаруженная возможность самоорганизации критического состояния и генерации  $1/f^\alpha$ -шумов при пересечении двух фазовых переходов в сосредоточенных системах позволяет интерпретировать экспериментальные данные [5,6,13–15] и осуществлять целенаправленный экспериментальный поиск систем с критическим поведением и  $1/f^\alpha$ -шумами.

Авторы выражают благодарность В.П. Скрипову за обсуждение результатов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 99-02-16227).

## Список литературы

- [1] Коган Ш.М. // УФН. 1985. Т. 4. № 2. С. 285.
- [2] Weissman M.B. // Rev. Mod. Phys. 1988. Vol. 60. N 2. P. 537.
- [3] Букингем М. Шумы в электронных приборах и системах. Пер. с англ. / Под ред. В.Н. Губанкова. М.: Мир, 1986.
- [4] Жигальский Г.П. // УФН. 1997. Т. 167. № 6. С. 624.
- [5] Коверда В.П., Скоков В.Н., Скрипов В.П. // Письма в ЖЭТФ. 1966. Т. 63. Вып. 9. С. 739.
- [6] Коверда В.П., Скоков В.Н., Скрипов В.П. // ЖЭТФ. 1998. Т. 113. Вып. 5. С. 1748.
- [7] Voss R.F., Clarke J. // Phys. Rev. B, 1976. Vol. 13. P. 556.
- [8] Левитан Ю.С., Панченко Н.Н., Синкевич О.А. // ДАН. 1988. Т. 302. № 6. С. 1359.
- [9] Зайцев Р.О. // Письма в ЖЭТФ. 1993. Т. 58. Вып. 12. С. 978.
- [10] Кузовлев Ю.Е. // ЖЭТФ. 1997. Т. 111. С. 2086.
- [11] Климонтович Ю.Л. Статистическая теория открытых систем. М.: ТОО Янус, 1995.
- [12] Bak P., Tang C., Wiesenfeld K. // Phys. Rev. A. 1988. Vol. 38. N 1. P. 364.
- [13] Коверда В.П., Скоков В.Н., Скрипов В.П. // ДАН. 1997. Т. 356. № 5. С. 614.
- [14] Skokov V.N., Koverda V.P., Skripov V.P. // Cryogenics. 1997. Vol. 37. N 5. P. 263.
- [15] Koverda V.P., Skokov V.N. // Physica A. 1998. In press.
- [16] Хорстхемке В., Лефевр Р. Индуцированные шумом переходы. Пер. с англ. / Под ред. Д.Н. Зубарева, А.С. Михайлова. М.: Мир, 1987.