01;10

Об одном методе самосогласованного описания криволинейных пучков заряженных частиц

© Н.Д. Наумов

(Поступило в Редакцию 12 октября 1999 г.)

На основе автомодельного решения самосогласованных уравнений газодинамики получены уравнения огибающих тонкого криволинейного пучка заряженных частиц, распространяющегося во внешнем электромагнитном поле.

Введение

Необходимость разработки самосогласованных моделей движения потоков заряженных частиц во внешних электромагнитных полях обусловлена практическими задачами формирования и транспортировки пучков и электронных колец. Одним из методов учета влияния собственного поля на поперечную динамику пучка является использование уравнений огибающей. Такие уравнения известны для прямолинейного и кольцевого пучков заряженных частиц [1–3]. В данной работе в общем виде получены уравнения огибающей криволинейного пучка заряженных частиц, распространяющегося во внешнем электромагнитном поле. Конкретным примером возникновения подобной конфигурации пучка является инжекция электронного пучка под углом к геомагнитному полю. Такая постановка задачи имеет практическое значение в связи с использованием электронных пучков для изучения ионосферы [4].

Рассматривается задача о построении модели установившегося состояния слаботочного пучка, т. е. пучка, ток которого гораздо меньше предельного тока Альфвена. В этом случае движение частиц является релятивистским только в продольном направлении. Для макроскопического описания пучка используется стационарное уравнение Эйлера для газа заряженных частиц во внешнем электромагнитном поле [5]

$$(\mathbf{V}\nabla)\gamma\mathbf{V} + \frac{1}{mn}\nabla p = \frac{e}{m}\Big(\mathbf{E} + \mathbf{E}_{\text{ext}} + \frac{1}{c}\big[\mathbf{V}(\mathbf{B} + \mathbf{B}_{\text{ext}})\big]\Big). \qquad (1)$$

Здесь e, m — заряд и масса частицы; $\gamma = (1-u^2/c^2)^{-1/2}$, u — продольная скорость пучка; n — плотность частиц; p — давление газа, которое обусловлено эмиттансом пучка; $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ — напряженности собственного электромагнитного поля пучка. Для установившегося состояния пучка можно пренебречь влиянием коллективного поля на продольное движение частиц и учитывать его воздействие только на поперечное движение. Аналитическое решение подобной задачи можно получить для тонкого пучка, когда отношение поперечных размеров пучка как к радиусу его кривизны, так и к радиусу кружения является малой величиной. В этом случае существует приближенное решение уравнений Эйлера (1) с точностью до членов первого порядка по указанному малому параметру. Речь идет об автомодельных решениях уравнений газодинамики, относящихся к классу движений газа заряженных частиц, для которых скорости пропорциональны расстоянию до центра симметрии [6].

Криволинейный ленточный пучок

Вначале для иллюстрации метода рассмотрим сравнительно простую задачу о распространении холодного ленточного пучка нерелятивистских заряженных частиц в ортогональных однородных электрическом и магнитном полях $\mathbf{E}_0 = E_o\mathbf{e}_y$, $\mathbf{B}_0 = B_0\mathbf{e}_z$. В этом случае траектория осевой частицы $\mathbf{Y}(s)$ представляет собой трохоиду.

Для решения задачи удобно использовать систему криволинейных координат s, q, z

$$\mathbf{x} = \mathbf{Y}(s) + q\mathbf{n} + z\mathbf{e}_z,$$

где s — длина траектории от места инжекции пучка; $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{e}_z$ — векторы трехгранника Френе, связанного с кривой $\mathbf{Y}(s)$.

Если подставить выражение для скорости $\mathbf{v} = u\mathbf{t}$ в уравнение движения частицы в ортогональных полях, то для кривизны трохоиды получается следующее выражение: $k_1 = k - eB_0/mcu$, где $k = eE_{01}/mu^2$, E_{01} — составляющая внешнего электрического поля вдоль вектора $\mathbf{n}$

$$\mathbf{E}_0 = E_{01}\mathbf{n} + E_{02}\mathbf{t}.$$

Составляющая E_{02} определяет изменение скорости осевой частицы при распространении пучка $m u\dot{u} = eE_{02}$; здесь и в дальнейшем для краткости точкой обозначается дифференцирование по s.

Из уравнения (1), выраженного в криволинейных координатах, для составляющих газодинамической скорости пучка $\mathbf{V} = U\mathbf{t} + W\mathbf{n}$ найдем следующие уравнения:

$$\frac{U}{\sigma}\left(\frac{\partial U}{\partial s} - k_1 W\right) + W\frac{\partial U}{\partial q} = \frac{e}{m}E_{02} - kuW, \qquad (2)$$

$$\frac{U}{\sigma}\frac{\partial W}{\partial s} + W\frac{\partial W}{\partial q} + \frac{k_1}{\sigma}U^2 = \frac{e}{m}(E + E_{01}) - kuU, \qquad (3)$$

где используется обозначение $\sigma = 1 - k_1 q$.

Для выбранного класса движений газа заряженных частиц скорости пропорциональны расстоянию до центра симметрии, т. е. компоненты скорости пучка следует искать в виде

$$U = u(1 + \Gamma\xi), \quad W = u\dot{a}\xi. \tag{4}$$

Аналогичное представление можно выбрать и для плотности частиц

$$n = n_0 \frac{a_0 u_0}{au}(1 + \nu\xi)\vartheta(1 - \xi^2), \tag{5}$$

где $\vartheta(x)$ — ступенчатая функция Хевисайда; постоянные n_0, a_0, u_0 определяются условиями инжекции пучка. Здесь $\xi = q/a$ — автомодельная переменная; $2a$ — поперечный размер пучка; Γ, ν — некоторые функции s. Для коллективного поля с принятой точностью можно воспользоваться значением электрического поля однородного пучка $E = 4\pi enq$. Поправки, обусловленные учетом кривизны пучка и неоднородности плотности частиц, будут членами второго порядка малости.

После подстановки выражений (4) в уравнения (2), (3), а выражения (5) — в уравнение непрерывности $\operatorname{div} n\mathbf{V} = 0$, для функций a, Γ, ν с точностью до членов первого порядка получаются следующие уравнения:

$$\ddot{a} + \frac{\dot{u}}{u}\dot{a} + k_1^2 a + (k_1 + k)\Gamma = \omega^2 \frac{u_0}{u^3} a_0, \tag{6}$$

$$\dot{\Gamma} + 2\frac{\dot{u}}{u}\Gamma = k\dot{a} - k_1 a \frac{\dot{u}}{u}, \tag{7}$$

$$\dot{\nu} + \dot{\Gamma} - 2\frac{\dot{a}}{a}\Gamma = 2k_1\dot{a}, \tag{8}$$

где $\omega = \sqrt{4\pi n_0 e^2/m}$ — плазменная частота пучка.

Полученный результат иллюстрирует известное достоинство автомодельного подхода, заключающееся в возможности перехода от решения системы уравнений в частных производных к решению более простой задачи — интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Уравнение (7) можно формально проинтегрировать в общем виде

$$\Gamma = \frac{1}{u^2}\left[\Gamma_0 u_0^2 + \int\limits_0^s (k\dot{a}u^2 - k_1 a u\dot{u})ds\right],$$

где начальные значения характеристик продольной скорости пучка u_0, Γ_0 также определяются условиями инжекции пучка. Поэтому в данном случае задача нахождения поперечного размера пучка сводится к решению одного интегродифференциального уравнения.

Разложение внешнего поля

Прежде чем перейти к построению приближенного решения уравнения Эйлера (1) в общем случае, проанализируем структуру внешнего электромагнитного поля вблизи оси пучка. Положение оси пучка, задаваемое траекторией осевой частицы $\mathbf{Y}(s)$, определяется решением уравнения движения одиночной частицы в рассматриваемом внешнем поле. Здесь предполагается, что такое решение известно.

Движение пучка удобно рассматривать относительно системы криволинейных координат q_1, q_2, s

$$\mathbf{x} = \mathbf{Y}(s) + q_1\mathbf{n} + q_2\mathbf{b}.$$

Здесь $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ — векторы трехгранника Френе, связанного с кривой $\mathbf{Y}(s)$. Рассмотрим разложение внешнего поля в ряд Тейлора вблизи этой кривой. Если представить некоторое векторное поле $\mathbf{A}$ в виде

$$\mathbf{A} = A_1\mathbf{n} + A_2\mathbf{b} + A_3\mathbf{t},$$

то в используемых криволинейных координатах условия $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$, $\operatorname{rot}\mathbf{A} = 0$ принимают следующий вид:

$$k_1 A_1 - \dot{A}_3 - LA_3 = \sigma\left(\frac{\partial A_1}{\partial q_1} + \frac{\partial A_2}{\partial q_2}\right), \tag{9}$$

$$\frac{\partial A_1}{\partial q_2} = \frac{\partial A_2}{\partial q_1}, \tag{10}$$

$$LA_1 + \dot{A}_1 - k_2 A_2 + k_1 A_3 = \sigma\frac{\partial A_3}{\partial q_1}, \tag{11}$$

$$k_2 A_1 + LA_2 + \dot{A}_2 = \sigma\frac{\partial A_3}{\partial q_2}, \tag{12}$$

где $\sigma = 1 - k_1 q_1$, k_1, k_2 — соотвественно кривизна и кручение кривой $\mathbf{Y}(s)$, а также для краткости используется оператор L

$$L = k_2\left(q_2\frac{\partial}{\partial q_1} - q_1\frac{\partial}{\partial q_2}\right).$$

Из условий (9), (10) нетрудно усмотреть структуру разложения функций A_i вблизи кривой $\mathbf{Y}(s)$

$$A_1 = C_1 + a_1 q_1 + a_2 q_2 + \alpha_1 q_1^2 + 2\alpha_2 q_1 q_2 + \alpha_3 q_2^2,$$

$$A_2 = C_2 + a_2 q_1 - (a_1 + \dot{C}_3 - k_1 C_1)q_2 + \alpha_2 q_1^2 + 2\alpha_3 q_1 q_2 + \alpha_4 q_2^2,$$

$$A_3 = C_3 + a_3 q_1 + a_4 q_2 + \beta_1 q_1^2 + 2\beta_2 q_1 q_2 + \beta_3 q_2^2,$$

где C_i, a_i, α_i, β_i — некоторые фунции s.

Для решения рассматриваемой задачи достаточно знать функции a_i. Подстановка этих разложений в условия (9)–(12) позволяет найти функции a_3, a_4 в общем случае

$$a_3 = \dot{C}_1 + k_1 C_3 - k_2 C_2, \quad a_4 = \dot{C}_2 - k_2 C_1.$$

Таким образом, с точностью до членов первого порядка разложение внешнего поля вблизи оси пучка имеет вид

$$B_1 = B_{01} + f_1 q_1 + f_2 q_2, \qquad B_2 = B_{02} + f_2 q_1 - (f_0 + f_1)q_2,$$

$$f_0 = \dot{B}_{03} - k_1 B_{01},$$

$$B_3 = B_{03} + (\dot{B}_{01} + k_1 B_{03} - k_2 B_{02}) q_1 + (\dot{B}_{02} - k_2 B_{01}) q_2,$$

$$E_1 = E_{01} + g_1 q_1 + g_2 q_2, \qquad E_2 = E_{02} + g_2 q_1 - (g_0 + g_1) q_2,$$

$$g_0 = \dot{E}_{03} - k_1 E_{01},$$

$$E_3 = E_{03} + g_3 q_1 + g_4 q_2, \qquad g_3 = \dot{E}_{01} + k_1 E_{03} - k_2 E_{02},$$

$$g_4 = \dot{E}_{02} - k_2 E_{01}.$$

Функции f_1, f_2, g_1, g_2 определяются конкретной конфигурацией внешнего поля. Например, для кольцевого пучка в модифицированном бетатроне $f_1 = nk_1 B_{02}$, $f_2 = 0$; в двухзаходном стеллатроне $f_1 = k_1 C_0 \sin\chi$, $f_2 = k_1 C_0 \cos\chi$. Здесь n — показатель спада внешнего поля, C_0 — постоянная величина, $\chi = lk_1 s$, где l — целое число.

Решение уравнений газодинамики

Подставляя выражение для газодинамической скорости пучка

$$\mathbf{V} = V_1 \mathbf{n} + V_2 \mathbf{b} + U \mathbf{t}$$

в уравнение (1), для функций V_i, U получим следующие уравнения:

$$M\gamma V_1 + \frac{\gamma}{\sigma} U (k_1 U - k_2 V_2) = \frac{e}{m} E_1 + \frac{e}{mc} (V_2 B_3 - U B_2) + F_n, \qquad (13)$$

$$M\gamma V_2 + \frac{\gamma}{\sigma} k_2 U V_1 = \frac{e}{m} E_2 + \frac{e}{mc} (U B_1 - V_1 B_3) + F_b, \quad (14)$$

$$M\gamma U - \frac{\gamma}{\sigma} k_1 U V_1 = \frac{e}{m} E_3 + \frac{e}{mc} (V_1 B_2 - V_2 B_1), \qquad (15)$$

где F_n, F_b — члены, обусловленные собственным полем и эмиттансом пучка;

$$M = V_i \frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{U}{\sigma} \left(\frac{\partial}{\partial s} + L \right).$$

Как и в случае ленточного пучка, коллективное поле можно аппроксимировать электромагнитным полем однородного пучка. В общем случае необходимо рассматривать пучок эллиптического сечения. В итоге в системе поперечных координат x_i, связанных с осями симметрии сечения пучка, F_i имеют вид [7]

$$F_1 = x_1 u^2 \left[\frac{h}{a(a+b)} + \frac{H}{a^4} \right],$$

$$F_2 = x_2 u^2 \left[\frac{h}{b(a+b)} + \frac{H}{b^4} \right].$$

Здесь используются обозначения $h = 4|e|I/mu^3\gamma^3$, $H = E/u$, где I, E, a, b — соотвественно ток, эмиттанс и полуоси сечения пучка. Так как ориентация сечения пучка изменяется по мере распространения пучка, то оси системы координат x_i будут повернуты относительно ортов $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ на некоторый угол ψ

$$x_1 = q_1 \cos\psi + q_2 \sin\psi, \quad x_2 = q_2 \cos\psi - q_1 \sin\psi.$$

Соответственно V_i необходимо представить через компоненты скорости газа Λ_i в новой системе координат

$$V_1 = \Lambda_1 \cos\psi - \Lambda_2 \sin\psi - q_2 \Omega,$$

$$V_2 = \Lambda_2 \cos\psi + \Lambda_1 \sin\psi + q_1 \Omega,$$

где $\Omega = u\dot{\psi}$ — угловая скорость вращения пучка как целого относительно трехгранника Френе.

При распространении пучка во внешнем поле наряду с изменением его размеров в системе координат x_i может возникать и внутреннее поперечное движение газа вращательного типа, поэтому следует исходить из следующих выражений для Λ_i через автомодельные переменные $\chi = x_1/a$, $\eta = x_2/b$

$$\Lambda_1 = u(\dot{a}\xi - \kappa a \eta), \quad \Lambda_2 = u(\dot{b}\eta + \kappa b \xi). \qquad (16)$$

Здесь κ — некоторая функция s, характеризующая перемещения газа заряженных частиц с эллиптическими линиями тока внутри пучка. Автомодельные выражения для продольной скорости пучка и плотности частиц имеют вид

$$U = u(1 + \Gamma_1 \xi + \Gamma_2 \eta), \qquad (17)$$

$$n = \frac{I}{\pi a b u |e|} (1 + \nu_1 \xi + \nu_2 \eta) \vartheta (1 - \xi^2 - \eta^2), \qquad (18)$$

где Γ_i, ν_i — некоторые функции s.

Уравнения огибающей пучка

Подставляя выражение для скорости $\mathbf{v} = u\mathbf{t}$ в релятивистское уравнение движения заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле, для кривизны траектории $\mathbf{Y}(s)$ найдем $k_1 = \tau_1 E_{01} + \tau_2 B_{02}$, где E_{01}, B_{02} — составляющие внешнего поля на оси пучка, а также введены обозначения $\tau_1 = e/\gamma m u^2$, $\tau_2 = -u\tau_1/c$. Составляющая E_{03} определяет изменение скорости осевой частицы при распространении пучка $mu(\gamma\dot{u} + u\dot{\gamma}) = eE_{03}$; при этом выполняется соотношение $E_{02} = -uB_{01}/c$.

Если подставить выражения (16), (17) в уравнения (13)–(15) и учитывать только члены первого порядка, то для функций a, b, ψ, κ, Γ_i, определяющих изменение размеров и скорости пучка по мере его распространения во внешнем поле, получается следующая система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\ddot{a} + D\dot{a} + \left(\lambda_1 + \kappa k_2 \frac{a}{b} + k_1^2 \cos^2\psi + G_0 \sin^2\psi \right) a = \kappa k_3 b - \mu_1 \Gamma_1 + \frac{h}{a+b} + \frac{H}{a^3}, \qquad (19)$$

$$\ddot{b} + D\dot{b} + \left(\lambda_1 + \kappa k_2 \frac{b}{a} + k_1^2 \sin^2\psi - G_0 \cos^2\psi \right) b = \kappa k_3 a - \mu_2 \Gamma_2 + \frac{h}{a+b} + \frac{H}{b^3}, \qquad (20)$$

$$2ab(\ddot{\psi}+D\dot{\psi})+(b\dot{a}+a\dot{b})(2\dot{\psi}-\kappa_3)+\frac{1}{\gamma u}$$

$$\times\frac{d}{ds}\gamma\kappa u(a^2+b^2)=\mu_1 a\Gamma_2-\mu_2 b\Gamma_1+abF_0, \quad (21)$$

$$\frac{1}{\gamma u}\frac{d}{ds}\gamma\kappa u(a^2-b^2)-(k_3+k_2)(b\dot{a}-a\dot{b})$$

$$+k_1 ab\sin 2\psi=\lambda_2 ab+\mu_1\Gamma_2 a+\mu_2\Gamma_1 b, \quad (22)$$

$$\dot{\Gamma}_1+D(2\Gamma_1+k_1 a\cos\psi)+\left(\kappa-k_2\frac{a}{b}\right)\Gamma_2$$

$$=\mu_3\dot{a}+\mu_4(\kappa b+a\dot{\psi})$$

$$+\tau_1(g_3\cos\psi+g_4\sin\psi)a, \quad (23)$$

$$\dot{\Gamma}_2+D(2\Gamma_2-k_1 b\sin\psi)-\left(\kappa-k_2\frac{b}{a}\right)\Gamma_1$$

$$=\mu_4\dot{b}-\mu_3(\kappa a+b\dot{\psi})$$

$$+\tau_1(g_4\cos\psi-g_3\sin\psi). \quad (24)$$

Здесь используются следующие обозначения:

$$D=\frac{\dot{\gamma}}{\gamma}+\frac{\dot{u}}{u}, \quad \kappa_i=\tau_2 B_{0i}, \quad k_3=k_2-\kappa_3+2\dot{\psi},$$

$$\lambda_1=\lambda+G_1\cos 2\psi+\left(G_2-\frac{1}{2}F_0\right)\sin 2\psi,$$

$$\lambda=\dot{\psi}(\kappa_3-\dot{\psi})-\kappa^2,$$

$$\lambda_2=(G_0+2G_1)\sin 2\psi+(F_0-2G_2)\cos 2\psi,$$

$$F_0=\tau_2 f_0, \qquad G_0=\tau_1 g_0,$$

$$G_1=\tau_1 g_1+\tau_2 f_2, \qquad G_2=\tau_1 g_2-\tau_2 f_1,$$

$$\mu_1=\mu_3+k_1\cos\psi, \qquad \mu_2=\mu_4-k_1\sin\psi,$$

$$\mu_3=k\cos\psi+\kappa_1\sin\psi, \quad \mu_4=\kappa_1\cos\psi-k\sin\psi,$$

$$k=\tau_1 E_{01}.$$

Уравнения для функций ν_i, характеризующих изменение степени неоднородности плотности частиц по мере распространения пучка во внешнем поле, можно найти после подставноки выражения (18) в уравнение непрерывности; для краткости эти уравнения не приводятся.

При отсутствии внешнего электрического поля уравнения (23), (24) допускают тривиальное решение $\Gamma_i=0$, т.е. с точностью до членов первого порядка малости возможное решение уравнения (15) имеет вид $U=u$, где u — продольная скорость пучка. Поэтому уравнения огибающих моноэнергетического пучка в неоднородном магнитном поле имеют более простой вид.

Дальнейшая возможность упрощения рассматриваемой задачи появляется для пучка в слабонеоднородном магнитном поле при условии применимости дрейфового приближения. В этом случае члены, обусловленные градиентом внешнего поля, дают вклад второго порядка малости. Действительно, из условия применимости дрейфового приближения $|\nabla\mathbf{B}_{\text{ext}}|/k_1 B_{\text{ext}}\sim\varepsilon$ следует, что $r|\nabla\mathbf{B}_{\text{ext}}|\sim\varepsilon k_1 r B_{\text{ext}}$, где r — характерный поперечный размер пучка. В связи с этим уравнения огибающей моноэнергетического пучка в слабонеоднородном магнитном поле заметно упрощаются по сравнению с системой (19)–(24)

$$\ddot{a}+\left(\lambda+\kappa k_2\frac{a}{b}+k_1^2\cos^2\psi\right)a=\kappa k_3 b+\frac{h}{a+b}+\frac{H}{a^3}, \quad (25)$$

$$\ddot{b}+\left(\lambda+\kappa k_2\frac{b}{a}+k_1^2\sin^2\psi\right)b=\kappa k_3 a+\frac{h}{a+b}+\frac{H}{b^3}, \quad (26)$$

$$2ab\ddot{\psi}+(b\dot{a}+a\dot{b})(2\dot{\psi}-\kappa_3)+\frac{d}{ds}\kappa(a^2+b^2)=0, \quad (27)$$

$$\frac{d}{ds}\kappa(a^2-b^2)-(k_3+k_2)(b\dot{a}-a\dot{b})+k_1^2 ab\sin 2\psi=0. \quad (28)$$

В случае однородного магнитного поля ось пучка представляет собой винтовую линию, кривизна и кручение которой не зависят от s: $k_1=|k_0|\sin\alpha$, $k_2=k_0\cos\alpha=\kappa_3$, где $k_0=\tau_2 B_0$, α — угол между направлением магнитного поля и направлением инжекции пучка. Для винтового пучка из уравнения (27) можно найти связь между вращением пучка как целого относительно трехгранника Френе и внутренним движением газа заряженных частиц

$$\dot{\psi}=\frac{1}{2ab}\left[2a_0 b_0\left(\dot{\psi}_0-\frac{k_2}{2}\right)+\kappa_0(a_0^2+b_0^2)-\kappa(a^2+b^2)\right]+\frac{k_2}{2}.$$

Уравнения огибающей позволяет оценить характеристики пучка, инжектируемого во внешнее электромагнитное поле. Полученные результаты будут применимы в той области, где еще не происходит заметного утолщения пучка вследствие влияния пространственного заряда.

Список литературы

[1] *Капчинский И.М.* Динамика частиц в линейных резонансных ускорителях. М.: Атомиздат, 1966.
[2] *Lee E.P., Cooper R.K.* // Part. Accel. 1976. Vol. 7. P. 83–95.
[3] *Саранцев В.П., Перельштейн Э.А.* Коллективное ускорение ионов электронными кольцами. М.: Атомиздат, 1979.
[4] Искусственные пучки частиц в космической плазме. М.: Мир, 1985.
[5] *Девидсон Р.* Теория заряженной плазмы. М.: Мир, 1978.
[6] *Наумов Н.Д.* // ЖТФ. 1997. Т. 67. Вып. 7. С. 103–107.
[7] *Лоусон Дж.* Физика пучков заряженных частиц. М.: Мир, 1980.