

01;03

## О влиянии вязкости на характерное время развития неустойчивости заряженной капли

© С.О. Ширяева

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,  
150000 Ярославль, Россия  
E-mail: shir@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 19 ноября 1999 г.)

Выведено и решено нелинейное интегральное уравнение, описывающее при произвольных значениях вязкости эволюцию во времени сфероидальной деформации капли, неустойчивой по отношению к собственному заряду. Показано, что в силу существенной нелинейности феномена характерное время реализации неустойчивости определяется временем десятикратного увеличения амплитуды начальной бесконечно малой (в физическом смысле) виртуальной сфероидальной деформации неустойчивой капли. Зависимость характерного времени развития неустойчивости от вязкости капли описывается растущей линейной функцией.

Вопрос о возможности теоретической оценки характерного времени развития неустойчивости сильно заряженной капли представляет интерес в связи с разнообразными приложениями обсуждаемого феномена в различных разделах технической физики и геофизики, а также в связи со сложностью прямого наблюдения процесса развития неустойчивости в эксперименте. В многочисленных экспериментах по проверке критерия Рэлея устойчивости сильно заряженной капли (см. литературу, указанную в [1,2]) наблюдатели фиксируют лишь начальное и конечное состояние капли. В [3–6] были проведены теоретические оценки времени развития неустойчивости сильно заряженной капли идеальной жидкости, когда характерный временной масштаб процесса развития неустойчивости определялся лишь особенностями взаимодействия величины деформации неустойчивой капли со степенью закритичности заряда капли, зависящей от величины деформации. Использование той же методики расчета и тех же исходных физических посылок, что и в [3–5], с дополнительным учетом снижения величины инкремента неустойчивости за счет влияния вязкого затухания капиллярных движений жидкости в сферической и сфероидальной каплях [7,8] позволяет оценить и влияние вязкости.

1. Спектр капиллярных колебаний изолированной капли проводящей невязкой (идеальной) жидкости радиуса  $R$  с зарядом  $Q$  и коэффициентом поверхностного натяжения  $\sigma$  определяется выражением [9]

$$\omega_n^2 = \frac{\sigma}{\rho R^3} n(n-1)[(n+2) - W], \quad W = \frac{Q^2}{4\pi\sigma R^3}, \quad (1)$$

где  $n$  — номер моды капиллярных колебаний,  $\rho$  — плотность жидкости.

Из (1) легко видеть, что при  $W > 4$  становится неустойчивой основная мода ( $n = 2$ ) капиллярных колебаний капли, амплитуда которой  $\zeta$  начинает расти со временем по закону  $\zeta \sim \exp(\gamma_0 t)$ , где

$$\gamma_0 = \left\{ \frac{2\sigma}{\rho R^3} (W - W_{2*}) \right\}^{1/2},$$

$W_{2*}$  — критическое для реализации неустойчивости основной моды значение параметра  $W$ :  $W_{2*} = 4$ .

Если жидкость не идеальная и обладает кинематической вязкостью  $\nu_*$ , то инкремент неустойчивости основной моды капли уменьшается на величину декремента вязкого затухания (см. Приложение)

$$\eta_g \equiv \gamma_0 - \gamma_g \equiv \left\{ \frac{2\sigma}{\rho R^3} (W - W_{2*}) \right\}^{1/2} \left\{ 1 - \frac{1}{1 + \nu_* k(W)} \right\},$$

$$\gamma_g \approx \gamma_0 [1 + \nu_* k(W)]^{-1},$$

$$k(W) = \left[ 1 + \frac{16}{W+4} + \frac{1}{2(W - W_{2*})} \right], \quad (2)$$

где  $\gamma_g$  — инкремент неустойчивости вязкой сферической капли;  $\nu_*$  — безразмерная вязкость, выраженная в долях своего характерного значения  $(R\sigma/\rho)^{1/2}$ ; знаменатель последнего слагаемого в выражении, определяющем  $k(W)$ , характеризует степень надкритичности заряда капли.

2. При  $W = 4$  капля неустойчива по отношению к бесконечно малым деформациям ее поверхности вида  $\zeta = \zeta_0 P_2(\cos \Theta)$ , соответствующим виртуальному возбуждению основной моды капиллярных колебаний. Возбуждение подобных капиллярных колебаний может иметь причиной хотя бы тепловое движение молекул жидкости. В этом случае амплитуда  $\zeta_0$  определится выражением  $\zeta_0 = (\sigma/k \cdot T)^{1/2}$ , где  $k$  — постоянная Больцмана,  $T$  — абсолютная температура жидкости. Возбуждение капиллярной волны  $\sim P_2(\cos \Theta)$  соответствует виртуальному вытягиванию капли в сфероид с эксцентриситетом  $e_0 = (3\zeta_0/R)^{1/2}$  [3–5]. Известно, что для сфероида критическое для реализации неустойчивости основной моды значение параметра  $W$  является убывающей функцией эксцентриситета [10]. В линейном по квадрату эксцентриситета  $e^2$  приближении эта функция имеет вид [10]

$$W_{2*} = 4(1 - \alpha \cdot e^2), \quad (3)$$

где  $\alpha$  — численный коэффициент, равный 1/3 [10].

Поэтому при  $W = 4$  для капли, претерпевшей виртуальное (тепловое) искажение начальной сферической формы вида  $\zeta = \zeta_0 P_2(\cos \Theta)$ , амплитуда такого возмущения начнет расти со временем по экспоненциальному закону с инкрементом

$$\gamma_g \equiv \gamma_0 - \eta_g = \left\{ \frac{8\sigma}{\rho R^3} \alpha e_0^2 \right\}^{1/2} \frac{1}{1 + \nu k(W)},$$

где  $k(W)$  для  $W = 4$  с учетом (3) переписывается в виде

$$k(W) \equiv k(e_0^2) = \left[ 3 + \frac{1}{8\alpha e_0^2} \right].$$

Увеличение амплитуды возмущения  $\sim P_2(\cos \Theta)$  соответствует дальнейшему вытягиванию капли, увеличению ее эксцентриситета и снижению, согласно (3), критического значения параметра  $W$  (т.е. увеличению степени закритичности заряда) и, следовательно, приводит к увеличению инкремента неустойчивости. Вместе с тем изменение формы капли от сферической к сфероидальной приводит к появлению зависимости инкремента неустойчивости основной моды от величины сфероидальной деформации (т.е. от величины квадрата эксцентриситета  $e^2$ ), имеющей, согласно Приложению, вид

$$\chi \equiv \gamma_{gd} = \gamma_g \left[ 1 - \frac{2}{1 + 0.8\nu} e^2 \right], \quad (4)$$

где для инкремента неустойчивости заряженной вязкой сфероидальной капли введено более простое обозначение  $\chi$ .

Таким образом, амплитуда  $\zeta$  возмущения сферической поверхности  $\sim P_2(\cos \Theta)$  начнет расти со временем по закону

$$\zeta = \zeta_0 e^{\chi t} = \zeta_0 \exp \left( \sqrt{\frac{8\sigma}{\rho R^3} \alpha e^2} \frac{1}{1 + \nu k(e^2)} \times \left[ 1 - \frac{2}{1 + 0.8\nu} e^2 \right] t \right). \quad (5)$$

**3.** Отметим, что выражение (5) справедливо лишь для линейной связи между скоростью роста возмущения  $d\zeta/dt$  и амплитудой самого возмущения  $\zeta$ . Чтобы получить величину амплитуды  $\zeta$  в любой момент времени, рассмотрим последовательность значений  $\zeta$  через интервалы времени  $\Delta t_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4, \dots$ ), в течение каждого из которых выражение (5) можно считать хорошо работающим. Поскольку  $\chi$  является функцией растущей во времени величины сфероидальной деформации  $e^2$ , то, следовательно,  $\chi$  зависит от времени. Величину интервала  $\Delta t_i$  будем определять из условия, чтобы приращение инкремента на этом интервале  $\chi_i - \chi_{i-1}$  было много меньше величины инкремента в конце предыдущего интервала времени

$$\Delta\chi \equiv \chi_i - \chi_{i-1} \ll \chi_{i-1}.$$

Тогда в пределах интервала  $\Delta t_i$  величину инкремента  $\chi_i$  можно считать неизменной, равной  $\chi_{i-1}$  и пользоваться для подсчета прироста амплитуды  $\Delta\zeta_i$  соотношением (5).

Итак, пусть изначально сферическая капля претерпела неустойчивость и стала удлиняться с инкрементом  $\chi_0$ . За время  $\Delta t_1$  начальная амплитуда возмущения  $\zeta_0$  вырастет до

$$\zeta_1 = \zeta_0 \exp \chi_0 \Delta t_1.$$

Это приведет к росту квадрата эксцентриситета  $e^2$  и, согласно (4), к росту инкремента до  $\chi_1$ . В следующий интервал времени  $\Delta t_2$  амплитуда возмущения будет изменяться по закону

$$\zeta_2 = \zeta_1 \exp \chi_1 \Delta t_2.$$

К концу интервала времени  $\Delta t_2$  амплитуда возмущения вырастет, т.е. увеличится квадрат эксцентриситета  $e^2$ , а следовательно, и инкремент  $\chi$ , который в конце  $\Delta t_2$  станет равным  $\chi_2$ . На следующем интервале времени  $\Delta t_3$  амплитуда возмущения будет расти по закону

$$\zeta_3 = \zeta_2 \exp \chi_2 \Delta t_3.$$

Таким образом, для  $i$ -го интервала запишем

$$\zeta_i = \zeta_{i-1} \exp \chi_{i-1} \Delta t_i. \quad (6)$$

Подставим в (6) выражение для  $\zeta_{i-1}$ , которое в свою очередь выразится через  $\zeta_{i-2}$ ,  $\zeta_{i-3}$  и все предыдущие значения амплитуды вплоть до  $\zeta_0$ . В итоге вместо (6) получим

$$\zeta_i = \zeta_0 \exp \left\{ \sum_{k=1}^i \chi_{k-1} \Delta t_k \right\}.$$

Переходя в этом выражении к пределу  $\Delta t_k \rightarrow 0$ ,  $i \rightarrow \infty$ , получим

$$\zeta(t) = \zeta_0 \exp \left\{ \int_0^t \chi(e^2(t)) dt \right\}.$$

В это выражение вместо  $\chi(e^2(t))$  подставим выражение (4), связывающее  $\chi$  с  $e^2$ , и получим

$$\zeta(t) = \zeta_0 \exp \left\{ \int_0^t \left( \sqrt{\frac{8\sigma}{\rho R^3} \alpha e^2(t)} \frac{1}{1 + \nu k(e^2(t))} \times \left[ 1 - \frac{2}{1 + 0.8\nu} e^2(t) \right] \right) dt \right\}.$$

Заменим  $e^2$  через  $\zeta$  на основе соотношения

$$e^2 \approx \frac{3\zeta}{R},$$

справедливого в линейном по  $e^2$  приближении ( $e^2 \ll 1$ ). Значит применимость дальнейших построений ограничена условием  $(\zeta(t)/R) \ll 0.3$ . В итоге уравнение переписывается в виде

$$\begin{aligned} \zeta(t) = \zeta_0 \exp \left\{ \int_0^t \left( \sqrt{\frac{24\sigma}{\rho R^3} \alpha} \frac{\zeta(t)}{R} \frac{1}{1 + \nu k(\zeta(t)/R)} \right. \right. \\ \left. \left. \times \left[ 1 - \frac{6}{1 + 0.8\nu} \frac{\zeta(t)}{R} \right] \right) dt \right\}, \\ k\left(\frac{\zeta(t)}{R}\right) \equiv \left[ 3 + \frac{1}{24\alpha} \frac{R}{\zeta(t)} \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Таким образом, мы получили нелинейное интегральное уравнение относительно амплитуды неустойчивой основной моды колебаний поверхности вязкой заряженной капли  $\zeta(t)$ .

4. Перепишем найденное уравнение в безразмерном виде

$$\begin{aligned} X(t) = X_0 \exp \left\{ \int_0^t \left( X^{1/2} \frac{1}{1 + \nu k(X)} \right. \right. \\ \left. \left. \times \left[ 1 - \frac{6}{1 + 0.8\nu} X \right] \right) \varkappa dt \right\}, \\ X \equiv \frac{\zeta}{R}, \quad \varkappa = \sqrt{\frac{24\sigma}{\rho R^3} \alpha}, \quad k(X) \equiv \left[ 3 + \frac{1}{24\alpha X} \right]. \end{aligned}$$

Для отыскания решения прологарифмируем уравнение

$$\ln \frac{X}{X_0} = \int_0^t \left( X^{1/2} \frac{1}{1 + \nu k(X)} \left[ 1 - \frac{6}{1 + 0.8\nu} X \right] \right) \varkappa dt.$$

Возьмем дифференциал от левой и правой частей получившегося выражения

$$\frac{1}{X} \frac{dX}{d(\varkappa t)} = \frac{X^{1/2}}{1 + \nu k(X)} \left[ 1 - \frac{6}{1 + 0.8\nu} X \right].$$

Разделяя переменные и интегрируя, найдем

$$\begin{aligned} \frac{2a}{3} X^{-3/2} + 2(ac + b) X^{-1/2} - 2c^{1/2}(ac + b) \operatorname{arth}(cX)^{1/2} \\ = \frac{2a}{3} X_0^{-3/2} + 2(ac + b) X_0^{-1/2} - 2c^{1/2}(ac + b) \\ \times \operatorname{arth}(cX_0)^{1/2} - \varkappa t, \\ X_0 \equiv \frac{\zeta_0}{R}, \quad a \equiv \frac{\nu}{24\alpha}, \quad b \equiv 1 + 3\nu, \quad c \equiv \frac{6}{1 + 0.8\nu}. \end{aligned} \quad (8)$$

Слагаемые этого выражения, содержащие функцию  $\operatorname{arth}$ , при  $X \ll 0.3$  много меньше остальных членов выражения (8) и заметно сказываются на временной эволюции сфероидальной деформации капли лишь на финальной стадии развития ее неустойчивости, когда  $X \sim 1$ . В реальных экспериментах по рэлеевскому

распаду капель  $R \sim 100 \mu\text{m}$  [1,2], а амплитуда тепловых капиллярных волн  $\zeta_0 \sim 0.1 \text{ nm}$ , поэтому  $X_0 \sim 10^{-6}$ . Распад капли, неустойчивой по отношению к собственному заряду (сброс избыточного заряда), начинается при  $X \approx 1$  [2]. Поэтому в выражении (8) влиянием слагаемых  $\sim \operatorname{arth}$  на временную эволюцию капли фактически можно пренебрегать (это подтверждается и прямыми расчетами по (8)).

В общем случае выражение (8) слишком громоздкое для получения явной зависимости амплитуды от времени  $\zeta = \zeta(t)$ , поэтому рассмотрим асимптотические ситуации. При  $\nu = 0$  (при  $a = 0$ ,  $b = 1$ ) с учетом вышесказанного о слагаемых  $\sim \operatorname{arth}$  соотношение (8) переходит в

$$X^{-1/2} = X_0^{-1/2} - 0.5\varkappa t,$$

что дает

$$\zeta = \frac{\zeta_0}{(1 - t/T_0)^2}, \quad T_0 = \frac{2}{X_0^{1/2}\varkappa} = R^2 \left( \frac{\rho}{6\alpha\zeta_0\sigma} \right)^{1/2}, \quad (9)$$

т.е. мы приходим к известному [3] выражению для временной зависимости амплитуды сфероидальной деформации капли идеальной жидкости, неустойчивой по отношению к собственному заряду. В приближении весьма малой вязкости, когда в (8) можно оставить только слагаемые  $\sim bX^{-1/2}$  и  $bX_0^{-1/2}$ , для временной зависимости амплитуды сфероидальной деформации капли маловязкой жидкости, неустойчивой по отношению к собственному заряду, получается выражение, аналогичное (9), отличающееся от него только умножением  $T_0$  на  $b$ , т.е. наличие вязкости приведет к увеличению характерного времени развития неустойчивости.

Когда кинематическая вязкость  $\nu_*$ , радиус капли  $R$ , плотность жидкости  $\rho$  и коэффициент ее поверхностного натяжения  $\sigma$  таковы, что  $\nu_*(\rho\sigma^{-1}R^{-1})^{1/2} \geq 1$ , каплю можно считать сильновязкой [2]. При  $X \ll 1$  в отношении (8) слагаемые  $\sim X^{-3/2}$  будут определяющими и (8) приведет к виду

$$\frac{2a}{3} X^{-3/2} = \frac{2a}{3} X_0^{-3/2} - \varkappa t$$

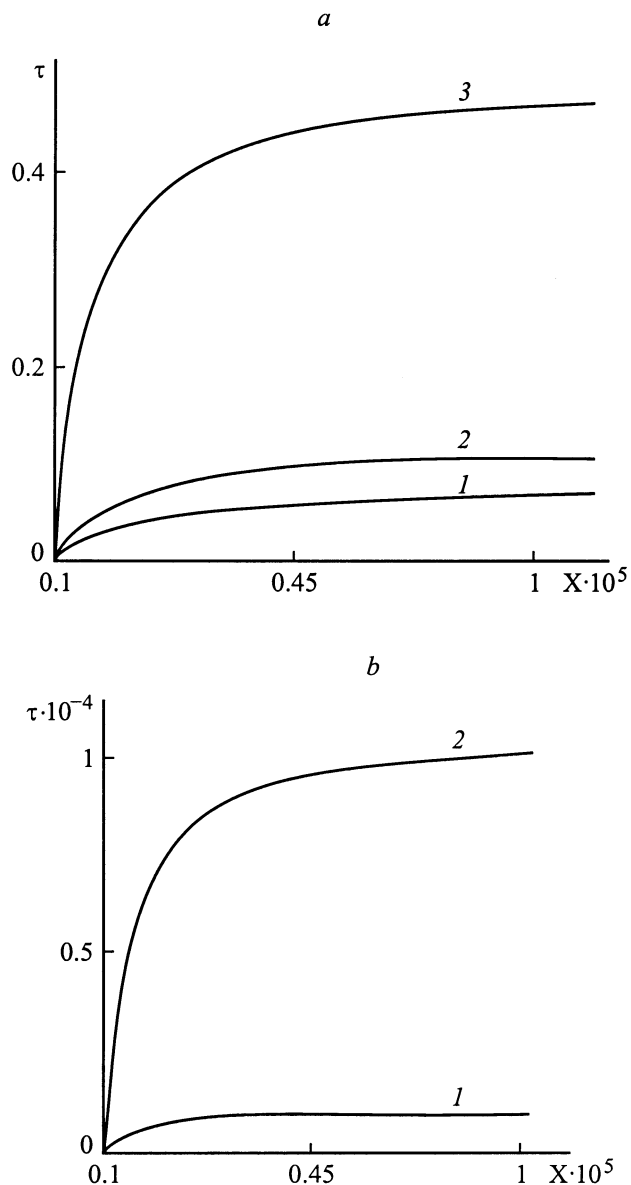
или

$$\zeta = \frac{\zeta_0}{(1 - t/T_\nu)^{2/3}},$$

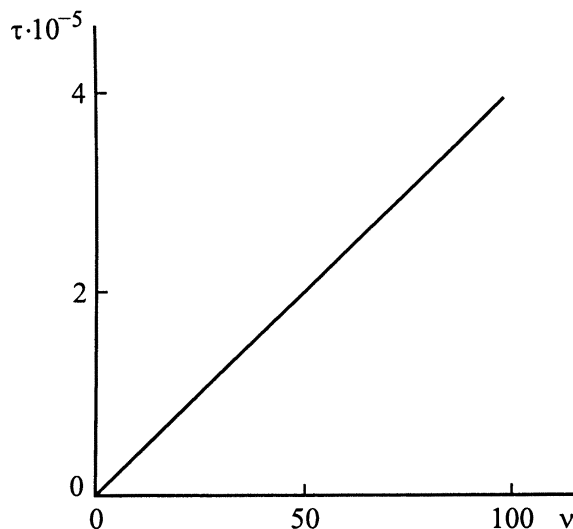
$$T_\nu = \frac{2}{3} \frac{a}{X_0^{3/2}\varkappa} = \nu R^3 \left( \frac{\rho}{3^5 \cdot 2^7 \alpha^3 \zeta_0^3 \sigma} \right)^{1/2}. \quad (10)$$

Видно, что зависимость амплитуды сфероидального возмущения сильно вязкой капли с  $\nu \geq 1$  от времени слабее, чем для идеальной капли. Характерный масштаб времени нарастания неустойчивости для вязкой капли  $T_\nu$  в  $aX_0^{-1}/3$  раз больше, чем для капли идеальной жидкости  $T_0$ , и поскольку  $X_0$  мало, то влияние вязкости оказывается весьма существенным.

Результаты численных расчетов по полному соотношению (8) при различных значениях вязкости, приведенные на рис. 1 и 2, показывают, что даже малые вязкости, удовлетворяющие условию  $\nu \ll 1$ , приводят к существенному увеличению характерного времени нарастания сфероидальной деформации неустойчивой вязкой капли по сравнению с каплей идеальной жидкости. Из рис. 1 видно, что из-за сильной нелинейности процесса характерное время реализации неустойчивости капли по отношению к собственному заряду определяется временем увеличения начальной виртуальной деформации



**Рис. 1.** Зависимости между безразмерным временем и безразмерной амплитудой сфероидальной деформации капли, неустойчивой по отношению к собственному заряду.  $\alpha = 1/3$ ,  $X_0 = 10^{-6}$ , *a* — идеальная жидкость (1) и вязкая жидкость при  $\nu = 10^{-5}$  (2) и  $10^{-4}$  (3); *b* — вязкая жидкость при  $\nu = 0.25$  (1) и 2.5 (2).



**Рис. 2.** Зависимость между безразмерным временем увеличения в 10 раз начальной амплитуды виртуальной сфероидальной деформации капли и ее безразмерной вязкостью, рассчитанная численно по (8).  $\alpha = 1/3$ ,  $X_0 = 10^{-6}$ .

примерно в десять раз: по прошествии этого времени зависимость  $t$  от  $X$  выходит на насыщение.

Любопытной представляется простая линейная зависимость характерного времени нарастания амплитуды сфероидальной деформации капли, неустойчивой по отношению к собственному заряду,  $T_\nu$  от безразмерной вязкости, приведенная на рис. 2, справедливая как при малых, так и при больших вязкостях. Зависимость между  $T_\nu$  и  $\nu$ , приведенная на рис. 2, может быть аппроксимирована аналитическим выражением вида

$$T_\nu = T_0 + g\nu, \tag{11}$$

где  $T_0$  — характерное безразмерное время развития неустойчивости капли идеальной жидкости,  $g$  — численный коэффициент.

При  $\alpha = 1/3$ ,  $\rho = 10^{-3} \text{ kg/m}^3$ ,  $X_0 = 10^{-6}$ ,  $\sigma = 0.07 \text{ N/m}$  численные расчеты дают  $T_0 \approx 0.0684$ ,  $g \approx 4035$ . Линейность связи между  $T_\nu$  и  $\nu$  согласуется с асимптотической зависимостью (10), справедливой лишь при больших вязкостях.

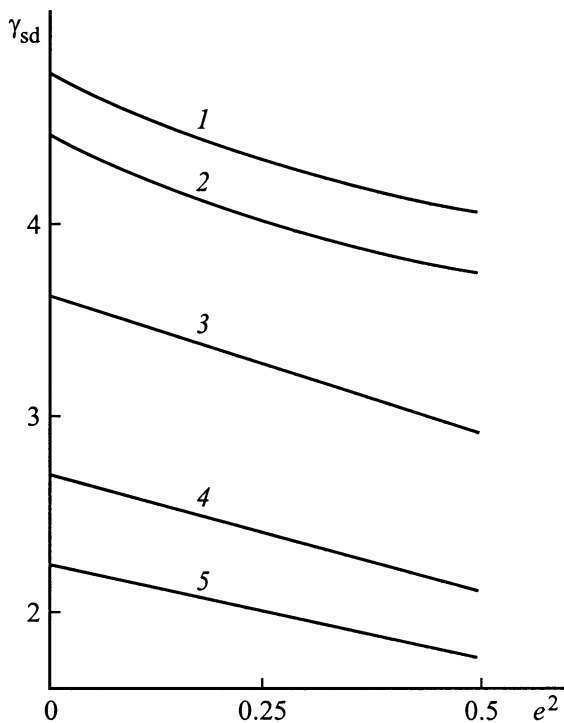
### Заключение

Полученный результат о тенденции влияния вязкости на скорость нарастания амплитуды сфероидальной деформации капли, неустойчивой по отношению к собственному заряду, достаточно очевиден: а priori ясно, что наличие вязкости должно приводить к увеличению характерного времени реализации неустойчивости. Тем не менее впервые появилась возможность количественной оценки этого влияния в условиях существенно нелинейного процесса нарастания во времени весьма

малой тепловой деформации формы капли, находящейся на пороге устойчивости. Интересно, что, несмотря на сильную нелинейность явления, характерное время реализации неустойчивости оказывается простой линейной (растущей) функцией времени.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Как известно [9,10], у заряженной сферической электропроводной капли, несущей заряд, чуть больший критического, и являющейся в связи с этим неустойчивой, начинает экспоненциально нарастать амплитуда основной моды капиллярных колебаний, что соответствует вытягиванию капли в сфероид. Этот процесс сопровождается перераспределением заряда по поверхности капли с увеличением его поверхностной плотности у вершин и возбуждением неустойчивости более высоких мод капиллярных колебаний капли. Инкремент неустойчивости различных мод идеальнопроводящей капли  $\gamma_n$  будет зависеть как от величины параметра Рэлея  $W$ , безразмерной вязкости  $\nu$ , так и от величины эксцентриситета сфероидальной капли (от степени удлинения капли) [11]. Это проиллюстрировано рис. 3, где приведены зависимости величины инкремента  $\gamma_2$  основной моды для сфероидальной капли от квадрата ее эксцентриситета  $e^2$ , рассчитанные при фиксированном  $W$  и различных  $\nu$  по



**Рис. 3.** Зависимости  $\gamma_{sd} = \gamma_{sd}(e^2)$  инкремента неустойчивости основной моды ( $n = 2$ ) заряженной сфероидальной капли от величины квадрата эксцентриситета, рассчитанные численно по (1П) при  $W = 4$  и при  $\nu = 0.03$  (1), 0.1 (2), 0.36 (3), 0.8 (4), 1.2 (5).

полученному в [11] дисперсионному уравнению,

$$s[s^2 + n(n-1)(n+2)\alpha_n] + 2\nu \left[ s^2(n-1)(2n+1) - \sqrt{\frac{s}{\nu}} f_n \left( \sqrt{\frac{s}{\nu}} \right) (s^2 + n(n-1)(n+2)\alpha_n) \right] - 4\nu^2 n(n-1)(n+2) s \sqrt{\frac{s}{\nu}} f_n \left( \sqrt{\frac{s}{\nu}} \right) + e^2 z_n \left\{ s \left[ (s^2 + n(n-1)(n+2)\alpha_n) \left( 2(n-1) + \sqrt{\frac{s}{\nu}} f_n \left( \sqrt{\frac{s}{\nu}} \right) \right) - 3((2n-1)(n+2)\alpha_n + n^3) \right] + 2\nu \left[ s^2 \left( 2n^3 - 8n^2 + 4n - 10 + \frac{9}{n} \right) + \sqrt{\frac{s}{\nu}} f_n \left( \sqrt{\frac{s}{\nu}} \right) \left( s^2(2n^2 - n + 2 + \frac{9}{n(n+1)}) \right) + 3 \left( 2n^2 - n + 3 - \frac{6}{(n+1)} \right) (n+2)\alpha_n + 3n^3 \right] + 4\nu^2 s \sqrt{\frac{s}{\nu}} f_n \left( \sqrt{\frac{s}{\nu}} \right) \left[ 5n^3 + 5n^2 + 2n - \frac{18}{(n+1)} \right] \right\} = 0.$$

$$z_n \equiv \frac{n(n+1)}{3(2n-1)(2n+3)}, \quad W = \frac{Q^2}{16\pi\sigma R^3},$$

$$\alpha_n \equiv 1 - \frac{W}{W_{n*}}, \quad W_{n*} \equiv \frac{n+2}{4},$$

$$f_n(x) \equiv i_{n+1}(x)/i_n(x), \quad x \equiv (s/\nu)^{1/2}, \quad (1П)$$

$s = \text{Re } s + i \text{Im } s$  — комплексная частота;  $i$  — мнимая единица;  $n$  — номер моды капиллярных колебаний;  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения;  $i_n(\zeta)$  — модифицированные сферические функции Бесселя первого рода от комплексного аргумента, определяемые соотношением

$$i_n(\zeta) = \sqrt{\frac{\pi}{2\zeta}} I_{n+1/2}(\zeta)$$

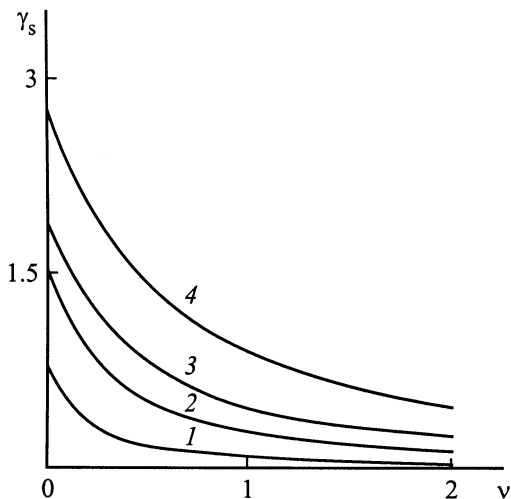
$$= \begin{cases} \exp(-0.5n\pi i) j_n(\zeta \exp(0.5\pi i)) & \text{при } (-\pi < \arg \zeta \leq 0.5\pi), \\ \exp(1.5n\pi i) j_n(\zeta \exp(-1.5\pi i)) & \text{при } (0.5\pi < \arg \zeta \leq \pi), \end{cases}$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

где

$$f_n(\zeta) = \sqrt{\frac{\pi}{2\zeta}} J_{n+1/2}(\zeta)$$

— сферическая функция Бесселя первого рода от комплексного аргумента;  $I_{n+1/2}(\zeta)$  и  $J_{n+1/2}(\zeta)$  — модифи-



**Рис. 4.** Зависимости  $\gamma_s = \gamma_s(\nu)$  величины инкремента неустойчивости основной моды ( $n = 2$ ) заряженной сферической капли от ее безразмерной вязкости  $\nu$ . Закритические значения  $W$ : 1 — 1.1, 2 — 1.3, 3 — 1.5, 4 — 2.

цированная и простая функции Бесселя полуцелого порядка от комплексного аргумента соответственно;  $W$  — параметр Рэлея, характеризующий устойчивость капли по отношению к собственному заряду [2].

Если заряд, находящийся на капле, превышает критический  $W > W_{n^*}$ , то частота  $n$ -й моды колебаний  $s_n$  становится мнимой и начинается экспоненциальный рост амплитуды  $n$ -й моды.

Выражение (1П) приведено в безразмерном виде (когда  $R = 1$ ,  $\rho = 1$ ,  $\sigma = 1$ ). При  $e^2 = 0$  дисперсионное уравнение для капиллярных движений в заряженной вязкой сфероидальной капле (1П) сводится к уравнению для капиллярных движений в заряженной вязкой сферической капле, выведенному в [8].

При малых закритичностях заряда (при малых величинах  $|\alpha_n|$ ) инкремент растет с увеличением эксцентриситета. Такая ситуация реализуется, когда неустойчивость по отношению к собственному заряду претерпевает капля с предельным по Рэлею зарядом, как в экспериментах по проверке критерия Рэлея (см. [1,2] и указанную там литературу). При этом экспоненциальное по времени вытягивание капли начинается за счет тепловой флуктуации формы капли, пропорциональной полиному Лежандра  $P_2(\cos \Theta)$  [3,4].

Поставим перед собой цель на основе выписанного дисперсионного уравнения исследовать влияние вязкости заряженной капли, ее заряда и эксцентриситета на величину инкремента развития неустойчивости. В аналитической форме такие зависимости из дисперсионного уравнения (1) получить не удастся. Поэтому попытаемся получить искомые аналитические зависимости путем аппроксимации результатов численного анализа.

На рис. 4 приведены зависимости  $\text{Re } s = \text{Re } s(\nu)$  вещественной компоненты комплексной частоты  $s$  основ-

ной моды ( $n = 2$ ) капиллярных колебаний сферической капли (т.е. величины инкремента неустойчивости  $\gamma_g$ ) от безразмерной вязкости  $\nu$ , построенные при различных закритических значениях параметра Рэлея  $W$  (при  $W > W_{2^*}$ ). Как показывают проведенные расчеты и как можно судить по рис. 4, в закритической для реализации неустойчивости капли области значений параметра  $W$  представленные зависимости можно описать аппроксимационной аналитической формулой

$$\gamma_g = \frac{\gamma_0}{1 + \nu \cdot k(W)},$$

$$k(W) = \left[ 1 + \frac{4}{W+1} + \frac{1}{2(W-4)} \right], \quad (2П)$$

где выражение

$$\gamma_0 = \left( \frac{2\sigma}{\rho R^3} \right)^{1/2} (W - W_{2^*})^{1/2}$$

определяет инкремент неустойчивости капли идеальной жидкости. Таким образом, влияние вязкости приводит к снижению величины инкремента неустойчивости  $\gamma_s$  по сравнению с инкрементом для капли невязкой жидкости  $\gamma_0$  на величину декремента вязкого затухания  $\eta_g$

$$\gamma_g = \gamma_0 - \eta_g, \quad \eta_g = \gamma_0 \left\{ 1 - \frac{1}{1 + \nu \cdot k(W)} \right\}. \quad (3П)$$

При  $\nu k(W) < 1$ , т.е. для асимптотической ситуации маловязкой капли, выражение (2П) для величины инкремента неустойчивости можно представить в виде

$$\gamma_g \approx \gamma_0 [1 - \nu k(W)],$$

а выражение (3П) для величины декремента вязкого затухания неустойчивого движения — в виде

$$\eta_g = \gamma_0 \nu k(W). \quad (4П)$$

На рис. 3 приведены зависимости величины инкремента основной моды заряженной сфероидальной капли вязкой электропроводной жидкости  $\gamma_{gd}$  от квадрата эксцентриситета  $e^2$  при различных вязкостях и фиксированном закритическом заряде (при  $W = 4$ ). Представленные зависимости в линейном по  $e^2$  приближении можно аппроксимировать выражением

$$\gamma_{gd} = \gamma_g \left[ 1 - \frac{2}{1 + 0.8\nu} e^2 \right], \quad (5П)$$

где  $\gamma_g$  определяется соотношением (2П).

При малой вязкости это выражение принимает форму

$$\gamma_{gd} \approx \gamma_0 [1 - \nu k(W)] [1 - 2e^2(1 - 0.8\nu)].$$

Из (5П) для декремента вязкого затухания неустойчивого движения (3П) основной моды капиллярных колебаний сфероидальной капли вязкой электропроводной жидкости несложно получить

$$\eta_{gd} \equiv \gamma_0 - \gamma_{gd} = \gamma_0 - \frac{\gamma_0}{1 + \nu \cdot k(W)} \left[ 1 - \frac{2}{1 + 0.8\nu} e^2 \right].$$

В приближении маловязкой капли это соотношение приведет к виду

$$\eta_{gd} \approx \eta_g [1 - 2e^2(1 - 0.8\nu)],$$

где  $\eta_g$  определено соотношением (4П).

## Список литературы

- [1] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // ЖТФ. 1991. Т. 61. Вып. 3. С. 19–28.
- [2] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.
- [3] Ширяева С.О., Григорьева И.Д. // ПЖТФ. 1994. Т. 20. Вып. 6. С. 1–5.
- [4] Ширяева С.О., Григорьев А.И., Григорьева И.Д. // ЖТФ. 1995. Т. 65. Вып. 9. С. 39–45.
- [5] Григорьев А.И. // ПЖТФ. 1998. Т. 24. № 24. С. 36–40.
- [6] Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. // ПЖТФ. 1999. Т. 25. № 15. С. 41–45.
- [7] Ширяева С.О., Григорьев А.И. // ПЖТФ. 1995. Т. 21. № 16. С. 17–21.
- [8] Ширяева С.О., Муничев М.И., Григорьев А.И. // ЖТФ. 1996. Т. 66. Вып. 7. С. 1–8.
- [9] Rayleigh (*Strutt J.W., Lord*) // Phil. Mag. 1882. Vol. 14. P. 184–188.
- [10] Григорьев А.И. // ЖТФ. 1985. Т. 55. Вып. 7. С. 1272–1278.
- [11] Ширяева С.О. // ЖТФ. 1998. Т. 68. Вып. 4. С. 20–27.