

01;03

Нелинейные капиллярные колебания заряженной капли

© Д.Ф. Белоножко, А.И. Григорьев

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
E-mail: rectorat@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 18 мая 1999 г. В окончательной редакции 14 октября 1999 г.)

В квадратичном приближении по амплитудам капиллярных колебаний и поля скоростей движения жидкости внутри заряженной капли идеально проводящей жидкости показано, что реальные колебания происходят не в окрестности сферической формы, как это было получено Рэлеем в линейной теории, но в окрестности слабо вытянутой фигуры, удлинение которой пропорционально начальному возмущению основной моды и увеличивается с ростом собственного заряда капли. Проведена корректная оценка характерного времени развития неустойчивости капли, несущей критический заряд.

Изучение капиллярных колебаний и устойчивости заряженных капель представляет значительный интерес в связи с многочисленными академическими и техническими приложениями [1]. Этой проблеме посвящены много работ (см., например, [1–7] и указанную там литературу). Но большая часть теоретических работ выполнена в рамках линеаризованной системы уравнений гидродинамики, и лишь недавно стали появляться исследования, принимающие во внимание реальную нелинейность феномена [2–7], позволившие получить качественно новую информацию о закономерностях реализации неустойчивости сильно заряженной капли и ее капиллярных колебаниях.

1. Заряженная капля сферической формы при величине собственного заряда Q , превышающей некоторое критическое значение, становится неустойчивой из-за доминирования электрических сил отталкивания над силами поверхностного натяжения. В конце прошлого века Рэлей [8] построил линейную модель этой неустойчивости. С тех пор исследование неустойчивости сильно заряженной капли и ее обобщений превратилось в целое научное направление, имеющее важное прикладное и научно-техническое значение.

Согласно классическим представлениям, уже ввиду теплового движения молекул жидкости капля совершает колебательные движения в окрестности равновесной сферической формы с амплитудой $\sim \sqrt{kT/\gamma}$ (k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура, γ — коэффициент поверхностного натяжения жидкости). Для каждой моды существует свое критическое значение поверхностного заряда, превышение которого приводит к неустойчивости. Устойчивость капли по отношению к собственному заряду Q принято характеризовать величиной так называемого параметра Рэля $W \equiv Q^2/4\pi\gamma R^3$, где R — радиус капли. Наиболее неустойчивой является вторая мода, а критическим для нее является значение параметра Рэля $W_c = 4$.

В настоящей работе предложено решение задачи Рэля в квадратичном по амплитудам поля скоростей и возмущениям формы поверхности приближении и найде-

на форма фигуры, в окрестности которой совершаются осцилляции докритически заряженной жидкой капли.

2. Пусть капля идеальной, идеально проводящей жидкости с плотностью ρ и коэффициентом поверхностного натяжения γ несет заряд Q . На основании линейной теории капиллярных колебаний считается, что существует момент времени, который можно принять за начальный $t = 0$, когда форма капли описывается второй модой линейных капиллярных колебаний с малой конечной амплитудой ε , а поле скоростей — нулевое. Исходная капля равновелика капле сферической формы с радиусом R . Задача состоит в определении осесимметричных колебаний капли, когда поле скоростей движения жидкости в ней осесимметрично и потенциально.

В сферической системе координат с началом в центре капли математическая формулировка задачи в безразмерных переменных, в которых принимаются равными единице плотность жидкости $\rho \equiv 1$, коэффициент поверхностного натяжения $\gamma \equiv 1$ и радиус равновеликой сферической капли $R \equiv 1$, представлена соотношениями (1)–(11)

$$\Delta\psi = 0; \quad \mathbf{U} = \nabla \cdot \psi, \quad (1)$$

$$\Delta\Phi = 0; \quad \mathbf{E} = -\nabla \cdot \Phi, \quad (2)$$

$$r \rightarrow \infty: \quad |\nabla\Phi| \rightarrow 0, \quad (3)$$

$$r = 0: \quad |\nabla\psi| < \infty, \quad (4)$$

$$-\frac{1}{4\pi} \oint \frac{\partial\Phi}{\partial n} dS = Q; \quad S(r, \Theta, \varphi) \equiv \begin{cases} r = 1 + \xi(\Theta, t), \\ 0 \leq \Theta \leq \pi, \\ 0 \leq \varphi < 2\pi. \end{cases} \quad (5)$$

$$r = 1 + \xi(\Theta, t): \quad \Phi = \text{const}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{\partial\xi}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial\xi}{\partial\Theta} \frac{\partial\psi}{\partial\Theta}, \quad (7)$$

$$\Delta\tilde{\mathfrak{F}} - \frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{1}{2}(\nabla \cdot \psi)^2 + \tilde{\mathfrak{F}}_E = \tilde{\mathfrak{F}}_\gamma; \quad \tilde{\mathfrak{F}}_E = \frac{E^2}{8\pi}, \quad (8)$$

$$t = 0: \quad r = 1 + \xi_* + \varepsilon P_2(\cos \Theta), \quad (9)$$

$$P_2(\mu) = \frac{1}{2}(3\mu^2 - 1), \quad \int_V dv = \frac{4}{3}\pi;$$

$$V(r, \Theta, t) \equiv \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 + \varepsilon_* + \varepsilon P_2(\cos(\Theta)), \\ 0 \leq \Theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \end{cases} \quad (10)$$

$$\psi = 0. \quad (11)$$

Это — краевая задача со свободной поверхностью $r = 1 + \xi(\Theta, t)$ относительно трех неизвестных функций: потенциала электрического поля $\Phi = \Phi(r, \Theta, t)$ вне капли, потенциала поля скоростей $\psi = \psi(r, \Theta, t)$ внутри капли и отклонения $\xi = \xi(\Theta, t)$ формы поверхности капли от правильной сферы $r = 1$.

Потенциалы Φ и ψ удовлетворяют уравнениям Лапласа (1) и (2) с граничными условиями (3)–(8) и начальными условиями (9)–(11).

Кинематическое и динамическое граничные условия (7) и (8) для поля скоростей \mathbf{U} содержат нелинейные члены. В центре капли поле \mathbf{U} ограничено (условие (4)). В выражении (8) $\Delta \mathfrak{F}$ — разность постоянных составляющих внешнего и внутреннего по отношению к капле давлений, \mathfrak{F}_E — электрическое давление на поверхности капли [9,10], \mathfrak{F}_γ — капиллярное давление под искривленной поверхностью капли [11].

Электрическое поле \mathbf{E} подчиняется условию ограниченности на бесконечности (3). Условие непрерывности тангенциальных компонент поля напряженности $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ на заряженной поверхности для проводника эквивалентно условию эквипотенциальности этой поверхности (условие (6)) [10]. Условие для нормальных компонент поля напряженности $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ на поверхности раздела записано в интегральной форме (5) (\mathbf{n} — орт внешней нормали к поверхности капли). Величина ξ_* , входящая в (9), определяется из соотношения (10), которое выражает равновеликость объема исходной капли со сферической каплей единичного радиуса.

3. В безразмерных переменных величина ε (амплитуда начального отклонения от сферической формы) измеряется долями принятого за единицу радиуса сферической капли. Можно считать ε малым параметром и искать решение задачи в виде разложения по целым степеням ε , пренебрегая членами третьего и более высоких порядков малости,

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_2 + O(\varepsilon^3), \quad (12)$$

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 + O(\varepsilon^3), \quad (13)$$

$$r = 1 + \xi, \quad \xi = \xi_1 + \xi_2 + O(\varepsilon^3), \quad (14)$$

$$\Phi_m \sim \psi_m \sim \xi_m \sim O(\varepsilon^m); \quad m = 1, 2; \quad \Phi_0 = O(1). \quad (15)$$

Частные производные от Φ , ψ и ξ считаются величинами того же порядка малости, что и исходные функции. Эти соображения вместе со свойством линейности оператора Лапласа и разложениями, полученными в Приложении, позволяют разделить задачу (1)–(11) на задачи нулевого, первого и второго порядков малости [11].

В такой формулировке неизвестными будут уже семь функций: $\Phi_0, \Phi_m, \psi_m, \xi_m$, где $m = 1, 2$.

В нулевом приближении нетривиальными являются лишь соотношения (2), (3), (5), (8), включающие выражения с электрическим потенциалом, капиллярным давлением, содержащие постоянную составляющую разности давлений внутри и вне капли. Задача (1)–(11) превращается в задачу определения стационарного поля $\Phi_0(r)$ с известными функциями $\psi_0 \equiv 0, \xi_0 \equiv 0$

$$\frac{d^2 \Phi_0}{dr^2} = 0, \quad \mathbf{E}_1 = -\frac{d\Phi_0}{dr} \mathbf{e}_r,$$

$$-\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(\frac{d\Phi_0}{dr} \right)_{r=1} \sin(\Theta) d\Theta d\varphi = Q,$$

$$r \rightarrow \infty: \quad \left| \frac{d\Phi_0}{dr} \right| \rightarrow 0, \quad (16)$$

\mathbf{e}_r — орт радиальной координаты.

Решение этой задачи $\Phi_0 = Q/r$. Зная Φ_0 и воспользовавшись разложениями (1B), (2C), (5D)–(10D), приведенными в Приложении, несложно сформулировать задачи первого и второго порядков малости. Задача первого порядка малости имеет вид

$$\Delta \psi_1 = 0, \quad \mathbf{U}_1 = \nabla \cdot \psi_1, \quad (17)$$

$$\Delta \Phi_1 = 0, \quad \mathbf{E}_1 = -\nabla \cdot \Phi_1, \quad (18)$$

$$r \rightarrow \infty: \quad |\nabla \Phi_1| \rightarrow 0, \quad (19)$$

$$r = 0: \quad |\nabla \psi_1| < \infty, \quad (20)$$

$$r = 1: \quad -\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(\frac{d\Phi_1}{dr} \right) \sin(\Theta) d\Theta d\varphi = 0, \quad (21)$$

$$\Phi_1 - \xi_1 Q = 0, \quad (22)$$

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial r} = \frac{\partial \xi_1}{\partial t}, \quad (23)$$

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial t} + \frac{Q}{4\pi} \left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} + 2\xi_1 Q \right] = 2\xi_1 + \Delta_\Omega \xi_1, \quad (24)$$

$$t = 0: \quad \xi_1 = \varepsilon P_2(\cos(\Theta));$$

$$P_2(\cos(\Theta)) = \frac{1}{2}(3\cos^2(\Theta) - 1), \quad (25)$$

$$\psi_1 = 0. \quad (26)$$

Для величин второго порядка малости получается задача

$$\Delta \psi_2 = 0, \quad \mathbf{U}_2 = \nabla \cdot \psi_2, \quad (27)$$

$$\Delta \Phi_2 = 0, \quad \mathbf{E}_2 = -\nabla \cdot \Phi_2, \quad (28)$$

$$r \rightarrow \infty: \quad |\nabla \cdot \Phi_2| \rightarrow 0, \quad (29)$$

$$r = 0: \quad |\nabla \cdot \psi_2| < \infty, \quad (30)$$

$$r = 1: -\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(\frac{d\Phi_2}{dr} + 2\xi_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} + \xi_1 \frac{\partial \Phi_1^2}{\partial r^2} - \frac{\partial \xi_1}{\partial \Theta} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \Theta} \right) \sin \Theta d\Theta d\varphi = 0, \quad (31)$$

$$\Phi_2 - \xi_2 Q = -\xi_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} + \xi_1^2 Q, \quad (32)$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial r} + \xi_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r^2} = \frac{\partial \xi_2}{\partial t} + \frac{\partial \xi_1}{\partial \Theta} \frac{\partial \psi_1}{\partial \Theta}, \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_2}{\partial t} + \frac{Q}{4\pi} \left[\frac{\partial \Phi_2}{\partial r} + 2\xi_2 Q \right] &= 2\xi_2 + \Delta_\Omega \xi_2 \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial \Theta} \right)^2 - \xi_1 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial t} \right) \\ -2\xi_1^2 - 2\xi_1 \Delta_\Omega \xi_1 + 5\xi_1 \frac{Q^2}{4\pi} + 2\xi_1 \frac{Q}{4\pi} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \\ -\xi_1 \frac{Q}{4\pi} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{8\pi} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{8\pi} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \Theta} \right)^2, \end{aligned} \quad (34)$$

$$t = 0: \quad \xi_2 = -\frac{\varepsilon^2}{5}, \quad (35)$$

$$\psi_2 = 0. \quad (36)$$

Здесь Δ_Ω — угловая часть оператора Лапласа при $r = 1$. Из (17)–(20) определяется общий вид функций ψ_1 и Φ_1

$$\psi_1 = \sum_{m=0}^{\infty} C_m r^m P_m(\cos \Theta), \quad C_m = C_m(t), \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= F + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{F_m}{r^{m+1}} P_m(\cos \Theta), \\ F_m &= F_m(t), \quad F = F(t). \end{aligned} \quad (38)$$

В фиксированный момент времени искажение формы поверхности капли $\xi_1 = \xi_1(\Theta, t)$ является однозначной непрерывной функцией от $\cos \Theta$, поэтому она разлагается в ряд по полной ортогональной системе полиномов Лежандра $\{P_m(\cos \Theta)\}$

$$\xi_2 = \sum_{m=0}^{\infty} Z_m(t) \cdot P_m(\cos \Theta). \quad (39)$$

Для решения задачи (17)–(26) необходимо подставить выражения (37)–(39) в (17)–(26), воспользоваться ортогональностью системы полиномов Лежандра $\{P_m(\cos \Theta)\}$, т.е. тем обстоятельством, что $P_m(\cos \Theta)$ — собственные функции угловой части оператора Лапласа в сферической системе координат ($\Delta_\Omega P_m(\cos \Theta) = -m(m+1)P_m(\cos \Theta)$), и сформулировать задачу Коши для однородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных $C_m(t)$, $F_m(t)$ и $Z_m(t)$. Определив эти неиз-

вестные и подставив их в (37)–(39), можно выписать выражения, описывающие устойчивые решения задачи первого порядка малости,

$$\xi_1 = \varepsilon \cos(\omega_2 t) P_2(\cos \Theta), \quad (40)$$

$$\psi_1 = -\frac{\varepsilon \omega_2}{2} \sin(\omega_2 t) P_2(\cos \Theta), \quad (41)$$

$$\Phi_1 = \varepsilon Q \cos(\omega_2 t) P_2(\cos \Theta), \quad (42)$$

$$\omega_2 = 8 - 2W, \quad W = \frac{Q^2}{4\pi} < 4. \quad (43)$$

Подставив (40)–(43) вместе с очевидными равенствами

$$P_2^2(\cos \Theta) = \frac{1}{5} + \frac{2}{7} P_2(\cos \Theta) + \frac{18}{35} P_4(\cos \Theta),$$

$$\left(\frac{\partial P_2(\cos \Theta)}{\partial \Theta} \right)^2 = \frac{6}{5} + \frac{6}{7} P_2(\cos \Theta) - \frac{72}{35} P_4(\cos \Theta),$$

в (31)–(34) легко получить соотношения

$$r = 1: -\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(\frac{d\Phi_2}{dr} \right) \sin \Theta d\Theta d\varphi = 0, \quad (31')$$

$$\begin{aligned} \Phi_2 + \xi_2 Q &= 2\varepsilon^2 Q \cos^2(\omega_2 t) \left[\frac{1}{5} + \frac{2P_2(\cos \Theta)}{7} + \frac{18P_4(\cos \Theta)}{35} \right], \end{aligned} \quad (32')$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_2}{\partial r} - \frac{\partial \xi_2}{\partial t} &= \varepsilon^2 \omega_2 \sin(2\omega_2 t) \left[-\frac{1}{5} - \frac{P_2(\cos \Theta)}{14} + \frac{27P_4(\cos \Theta)}{35} \right], \end{aligned} \quad (33')$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_2}{\partial t} + \frac{Q}{4\pi} \left[\frac{\partial \Phi_2}{\partial r} + 2\xi_2 Q \right] - 2\xi_2 - \Delta_\Omega \xi_2 \\ = \varepsilon^2 \left[\cos^2(\omega_2 t) \frac{9\omega_2^2 - 22W + 40}{20} - \frac{\omega_2^2}{4} + \left(\cos^2(\omega_2 t) \frac{15\omega_2^2 - 56W + 80}{28} - \frac{\omega_2^2}{4} \right) P_2(\cos \Theta) + \left(\cos^2(\omega_2 t) \frac{9(2\omega_2^2 - 21W + 20)}{28} - \frac{\omega_2^2}{4} \right) P_4(\cos \Theta) \right]. \end{aligned} \quad (34')$$

Система (27)–(30), (31')–(34'), (35), (36) является переформулированной задачей второго порядка малости, которая решается по той же схеме, что и задача первого порядка малости.

4. Чтобы не загромождать изложение выпишем сразу решение, получающееся при подстановке найденных добаков первого и второго порядков малости в (12)–(14),

$$\begin{aligned}
 r = & 1 - \frac{\varepsilon^2}{5} \cos^2(\omega_2 t) + \varepsilon \cos(\omega_2 t) P_2(\cos \Theta) \\
 & + \frac{\varepsilon^2}{\omega_2^2} (\chi_1 - (\chi_1 + \chi_2) \\
 & \times \cos(\omega_2 t) + \chi_2 \cos(2\omega_2 t)) P_2(\cos \Theta) \\
 & + \frac{18}{35} \varepsilon^2 (\chi_3 - (\chi_3 + \chi_4) \\
 & \times \cos(\omega_4 t) + \chi_4 \cos(2\omega_2 t)) P_4(\cos \Theta), \quad (44)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Phi = & \pm 2\sqrt{\pi W} \left[\frac{1}{r} + \varepsilon \cos(\omega_2 t) \frac{P_2(\cos \Theta)}{r^3} \right. \\
 & + \frac{\varepsilon^2}{\omega_2^2} (\chi_1 + K - (\chi_1 + \chi_2) \cos(\omega_2 t) \\
 & + (\chi_2 + K) \cos(2\omega_2 t)) \frac{P_2(\cos \Theta)}{r^3} \\
 & + \frac{18}{35} \varepsilon^2 (\chi_3 + 1 - (\chi_3 + \chi_4) \cos(\omega_4 t) \\
 & \left. + (\chi_4 + 1) \cos(2\omega_2 t)) \frac{P_4(\cos \Theta)}{r^5} \right], \quad (45)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \psi = & -\frac{\varepsilon \omega_2}{2} \sin(\omega_2 t) r^2 P_2(\cos \Theta) + \frac{\varepsilon^2}{\omega_2^2} \left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2} \right. \\
 & \times \sin(\omega_2 t) + G \sin(2\omega_2 t) \left. \right) r^2 P_2(\cos \Theta) \\
 & + \frac{18}{35} \varepsilon^2 \left(\frac{\chi_3 + \chi_4}{\omega_4} \sin(\omega_4 t) + L \sin(2\omega_2 t) \right) \\
 & \times r^4 P_4(\cos \Theta), \quad (46)
 \end{aligned}$$

$$\chi_1 \equiv \frac{44 - 5W}{14}, \quad \chi_2 \equiv \frac{23W - 116}{42}, \quad \chi_3 \equiv \frac{36 - 5W}{\omega_4^2},$$

$$\chi_4 \equiv \frac{12 + W}{4(10 - W)}, \quad W \equiv \frac{Q^2}{4\pi}, \quad 0 \leq W \ll 4,$$

$$G \equiv \frac{2(26 - 5W)}{21}, \quad L \equiv \frac{(9 - 2W)\sqrt{2(4 - W)}}{2(10 - W)},$$

$$K \equiv \frac{2\omega_2^2}{7}, \quad \omega_2^2 \equiv 2(4 - W), \quad \omega_4^2 \equiv 12(6 - W).$$

Знак при потенциале (45) соответствует знаку заряда капли. В выражениях для Φ и ψ опущены слагаемые, зависящие только от времени.

Решение (44)–(46) является равномерно пригодным при $W \ll 4$, поскольку не содержит секулярных членов,

а при $W \ll 4$ не содержит и слагаемых с малыми знаменателями. Когда величина параметра Рэлея W приближается к значению $W_c = 4$, являющемуся критическим для реализации неустойчивости основной моды, в решении (44)–(46) $\omega_2^2 \rightarrow 0$ и нарушается его асимптотичность. Это обстоятельство и определяет область применимости (равномерной пригодности) выписанных решений. Случай сильно заряженной капли, когда $W \rightarrow 4$, рассмотрен в [2]. Выражение (44) совпадает с решением, найденным методами Линдштедта–Пуанкаре и многих масштабов [11].

5. Решение (4) обнаруживает некоторые интересные закономерности, не отмеченные ранее [2–6], но заслуживающие отдельного рассмотрения.

Уравнение осциллирующей поверхности (44) содержит непериодические по времени слагаемые. Связанную с ними поверхность

$$\begin{aligned}
 r_* = & 1 + \varepsilon^2 A P_2(\cos \Theta) + \varepsilon^4 B P_4(\cos \Theta), \\
 A = & \frac{44 - 5W}{28(4 - W)}, \quad B = \frac{18}{35} \frac{36 - 5W}{12(6 - W)} \quad (47)
 \end{aligned}$$

можно считать поверхностью, относительно которой происходит колебательное движение.

Уравнение поверхности вытянутого сфероида с малым эксцентриситетом β можно аппроксимировать рядом по полной ортогональной системе $\{P_m(\cos \Theta)\}$. В приближении, квадратичном по эксцентриситету β , поверхность такого сфероида описывается уравнением

$$r = b \left(1 + \frac{1}{6} \beta^2 \right) + \frac{b\beta^2}{3} P_2(\cos \Theta).$$

Здесь b — малая полуось сфероида. Такой сфероид наилучшим образом аппроксимирует поверхность r_* , если

$$b \left(1 + \frac{1}{6} \beta^2 \right) = 1, \quad \frac{b\beta}{3} = \varepsilon^2 A.$$

Эти два соотношения можно рассматривать как систему уравнений для определения эксцентриситета и полуосей сфероида, приближающего поверхность (47). Если через a обозначить большую полуось этого сфероида, то

$$\begin{aligned}
 \beta = & \varepsilon(\sqrt{3A} + O(\varepsilon^3)), \quad b = 1 + O(\varepsilon^3), \\
 a = & 1 + \varepsilon^2 \frac{3A}{2} + O(\varepsilon^2), \quad A = \frac{44 - 5W}{28(4 - W)}. \quad (48)
 \end{aligned}$$

Согласно (48), даже электрически нейтральная капля с начальным возмущением $\sim P_2(\cos \Theta)$ колеблется около сфероида с эксцентриситетом $\beta = 1.1\varepsilon$, близким по величине к безразмерной амплитуде начального возмущения ε . Ясно, что для капли вязкой жидкости эксцентриситет сфероида, в окрестности которого происходят осцилляции, должен экспоненциально убывать со временем за счет диссипации энергии начальной деформации. Для капли же идеальной жидкости энергия начальной деформации лишь перераспределяется между взаимодействующими модами.

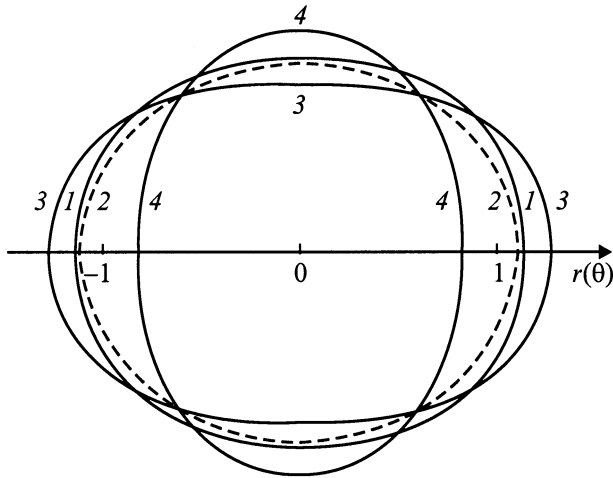


Рис. 1. Контуры возможных форм капли.

На рис. 1 кривыми 1 и 2 представлены поверхности (47) и (48) при $\varepsilon = 0.3$ для заряженной капли ($W = 3$). Численные расчеты показывают, что при $\varepsilon < 0.3$ эллипсоид (48) хорошо аппроксимирует поверхность (47), в окрестности которой происходят осцилляции. Точность такой аппроксимации увеличивается с уменьшением ε . Влияние параметра W на точность приближения неосциллирующей поверхности капли (47) сфероидом (48) при $\varepsilon = 0.3$ начинает заметно сказываться, начиная с $W \approx 3$. При уменьшении ε значение W , с превышением которого аппроксимация (48) становится неудовлетворительной, увеличивается, стремясь в пределе к $W = 4$.

Кроме того, на рис. 1 показаны контуры предельных деформаций осциллирующей капли (кривые 3 и 4). Фигура, наиболее вытянутая вдоль полярной оси (кривая 3), соответствует форме капли в моменты времени $t = T_2 m$ (где $m = 0, 1, 2, \dots$), кратные периоду $T_2 \approx 2.22$ второй моды капиллярных колебаний. В моменты времени $T_2/2 + T_2 m$ капля принимает максимально сплюснутую форму (кривая 4).

С ростом W удлинение фигуры, в окрестности которой происходят осцилляции (увеличение эксцентриситета сфероида (48)), заметно увеличивается, что видно из рис. 2, на котором приведены зависимости относительного удлинения величины большей полуоси сфероида (48) $\delta(\varepsilon, W)$ от величины W при различных значениях ε , где

$$\delta(\varepsilon, W) = 1.5\varepsilon^2(44 - 5W)/28(4 - W).$$

6. Несмотря на неасимптотический характер решения (44) при $W \approx 4$, оказывается интересным сравнение поведения этого решения с решением в первом приближении при $W \rightarrow 4$ по мере увеличения параметра W до критического значения. Действительно, в линейном приближении по ε уравнение поверхности

$$r_s(\varepsilon, W, \Theta, t) = 1 + \varepsilon \cos(\omega_2 t) \cdot P_2(\cos(\Theta))$$

имеет предельную форму при $W \rightarrow 4$

$$\lim_{W \rightarrow 4} r_s(\varepsilon, W, \Theta, t) = 1 + \varepsilon P_2(\cos \Theta), \quad (49)$$

где r_s обозначает уравнение поверхности капли в первом порядке возмущений по ε .

В этом приближении при $W = 4$ капля принимает вытянутую не осциллирующую форму. Слабое превышение параметром Рэлея W критического значения $W_c = 4$ влечет экспоненциальное во времени вытягивание этой формы, а при $W < 4$ капля устойчиво осциллирует.

В случае уравнения (44), в котором учтены добавки второго порядка малости, несложно вычислить предел

$$\lim_{W \rightarrow 4} r_s(\varepsilon, W, \Theta, t) = 1 + \varepsilon P_2(\cos(\Theta)) - \frac{\varepsilon^2}{5} + \varepsilon^2 \frac{18}{35} \sin^2(t\sqrt{6}) P_4(\cos \Theta) + \frac{12}{7} \varepsilon^2 t^2 P_2(\cos \Theta). \quad (50)$$

Если в первом приближении малая левая полуокрестность значения $W = 4$ представляла область устойчивости, то во втором приближении это область нарушения асимптотичности разложения: при околочритических значениях $W \rightarrow 4$ второй член разложения (44) оказывается растущим во времени, становясь за характерное время $t \sim O(\varepsilon^{-1/2})$ сравнимым с предыдущим членом разложения, а при дальнейшем росте t , превосходя его. На это указывает последнее слагаемое в (50).

Капли воды миллиметрового размера можно считать маловязкими и хорошо проводящими [1]. Для водной капельки ($\rho = 1 \text{ g/cm}^3$) с радиусом $R \sim 10^{-1} \text{ cm}$ капиллярные колебания с амплитудой порядка ангстрема, т.е. $\sim 10^{-8} \text{ cm}$ в безразмерных переменных характеризуются амплитудой $\varepsilon \sim 10^{-7}$. Поэтому безразмерное

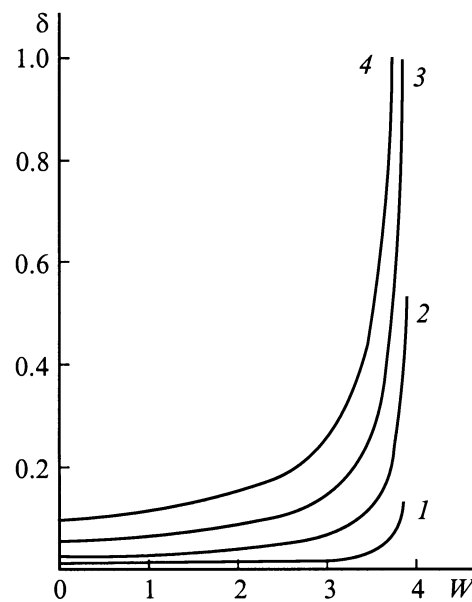


Рис. 2. Зависимости относительного удлинения величины большей полуоси сфероида (48) $\delta(\varepsilon, W)$ от величины параметра W при $\varepsilon = 0.1$ (1), 0.2 (2), 0.03 (3), 0.4 (4).

время $t \sim \varepsilon^{-1/2} \sim 3 \cdot 10^3$. В выбранных безразмерных переменных единицей временной шкалы является $t_* = ((\rho R^3)/\gamma)^{1/2} \sim 4 \cdot 10^{-3}$ s, поэтому реальное физическое время $t_1 = t \cdot t_* \sim 10$ s, что совпадает с оценкой [12], проведенной иным методом в рамках сфероидального приближения для формы неустойчивой капли. Это — время, в течение которого можно пользоваться разложением (50) для описания эволюции формы поверхности во времени после сообщения капельке критического заряда. Из физических соображений ясно, что критически заряженная капелька должна быть неустойчивой. Поэтому на полученное значение t_f можно смотреть как на оценку времени, прошедшего с момента зарядки этой капельки, до момента сброса части заряда для перехода в устойчивое состояние.

7. Нелинейный анализ капиллярных колебаний заряженной капли с точностью до слагаемых второго порядка включительно показывает, что усредненная по времени форма поверхности осциллирующей докритически заряженной капельки идеально проводящей жидкости хорошо аппроксимируется сфероидальной поверхностью (48). Эксцентриситет аппроксимирующего сфероида пропорционален амплитуде начального возмущения и заметно растет с увеличением собственного заряда капли. Относительное удлинение этого сфероида по сравнению с радиусом равновеликой идеально сферической капли пропорционально квадрату амплитуды начального возмущения и также растет с увеличением собственного заряда капельки.

Капелька воды миллиметрового размера, несущая критический в смысле устойчивости заряд, деформируется по закону (50) в течение времени порядка десятка секунд. Такой большой интервал времени легко регистрируется в эксперименте, и сам эффект может быть зафиксирован.

ПРИЛОЖЕНИЕ

А. Асимптотические разложения компонент вектора нормали к свободной поверхности капли и их производных

В сферической системе координат с ортами \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_Θ и \mathbf{e}_φ в момент времени t уравнение формы поверхности осциллирующей капли имеет вид

$$F(r, \Theta, t) = 0, \quad f(r, \Theta, t) = r - 1 - \xi(r, \Theta, t),$$

с помощью известного соотношения

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla F(r, \Theta, t)}{|\nabla F(r, \Theta, t)|},$$

несложно определить компоненты вектора нормали \mathbf{n} к этой поверхности и их производные по сферическим

координатам

$$r = 1: \quad n_r = \left[1 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \Theta} \right)^2 \right]^{-1/2}, \quad n_\varphi \equiv 0, \quad (1A)$$

$$n_\Theta = -\frac{1}{r} \left[1 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \Theta} \right)^2 \right] \frac{\partial \xi}{\partial \Theta}, \quad (2A)$$

$$\frac{\partial n_r}{\partial r} = \frac{1}{r^3} \left[1 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \Theta} \right)^2 \right]^{-3/2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \Theta} \right)^2, \quad (3A)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_\Theta}{\partial \Theta} = & -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \Theta^2} \left[1 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \Theta} \right)^2 \right]^{-1/2} \\ & + \frac{1}{r^3} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \Theta} \right)^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial \Theta^2} \left[1 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \Theta} \right)^2 \right]^{-3/2}. \end{aligned} \quad (4A)$$

Исходная задача решается в приближении, в котором справедливы следующие асимптотические оценки и разложения по малому параметру ε (ε — безразмерная амплитуда начальной деформации капли)

$$\xi \sim \frac{\partial \xi}{\partial \Theta} \sim \frac{\partial^2 \xi}{\partial \Theta^2} \sim O(\varepsilon), \quad r = 1 + \xi,$$

$$\frac{1}{r} = 1 - \xi + \xi^2 + O(\varepsilon^3), \quad \frac{1}{r^2} = 1 - 2\xi + 3\xi^2 + O(\varepsilon^3),$$

$$\frac{1}{r^3} = 1 - 3\xi + 6\xi^2 + O(\varepsilon^3). \quad (5A)$$

С помощью (5A) равенства (1A)–(4A) преобразуются в разложения

$$n_r = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \Theta} \right)^2 + O(\varepsilon^3), \quad (6A)$$

$$n_\Theta = -\frac{\partial \xi}{\partial \Theta} + \xi \frac{\partial \xi}{\partial \Theta} + O(\varepsilon^3), \quad (7A)$$

$$\frac{\partial n_r}{\partial r} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial \Theta} \right)^2 + O(\varepsilon^3), \quad (8A)$$

$$\frac{\partial n_\Theta}{\partial \Theta} = -\frac{\partial^2 \xi}{\partial \Theta^2} + \xi \frac{\partial^2 \xi}{\partial \Theta^2} + O(\varepsilon^3). \quad (9A)$$

В. Асимптотическое представление капиллярного давления под искаженной поверхностью капли

Если известны средняя кривизна поверхности жидкости H и коэффициент поверхностного натяжения γ , то распределение лапласовского давления в приповерхностной области определяется соотношением $\mathfrak{F}_\gamma = 2H_\gamma$. Значение же H можно найти из выражения $2H = \operatorname{div} \mathbf{n}$. В безразмерных переменных, в которых $\gamma \equiv 1$, справедливо равенство $\mathfrak{F}_\gamma = \operatorname{div} \mathbf{n}$,

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \Theta} \frac{(\partial A_\Theta \sin \Theta)}{\partial \Theta} + \frac{1}{r \sin \Theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}.$$

Задача осесимметрична ($n_\varphi \equiv 0$), поэтому

$$\mathfrak{F}_\gamma = \frac{2n_r}{r} + \frac{\partial n_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial n_\Theta}{\partial \Theta} + \frac{n_\Theta}{r} \operatorname{ctg} \Theta.$$

При подстановке в это равенство аппроксимаций (5A)–(9A) получается разложение

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_\gamma = & 2 - 2\xi - \frac{\partial^2 \xi}{\partial \Theta^2} - \frac{\partial \xi}{\partial \Theta} \operatorname{ctg} \Theta \\ & + 2\xi \left[\xi + \frac{\partial^2 \xi}{\partial \Theta^2} + \frac{\partial \xi}{\partial \Theta} \operatorname{ctg} \Theta \right] + O(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Неизвестная функция ξ ищется в виде разложения $\xi = \xi_1 + \xi_2 + O(\varepsilon^3)$, $\xi_1 \sim O(\varepsilon)$, $\xi_2 \sim O(\varepsilon^2)$. Значит,

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_\gamma = & 2 - 2\xi_1 - \Delta_\Omega \xi_1 + 2\xi_1(\xi_1 + \Delta_\Omega \xi_1) + O(\varepsilon^3), \\ \Delta_\Omega = & \frac{\partial^2}{\partial \Theta^2} + \frac{\partial}{\partial \Theta} \operatorname{ctg} \Theta. \end{aligned} \quad (1B)$$

Здесь Δ_Ω — угловая часть оператора Лапласа в сферических координатах при $r = 1$.

С. Асимптотическое разложение начальных условий

Построим асимптотическое разложение интеграла (10) по объему капли в начальный момент времени

$$\begin{aligned} r = & 1 + \xi_* + \varepsilon P_2(\cos \Theta), \\ \frac{4}{3}\pi = & \int_V dv = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^r r^2 \sin \Theta dr d\Theta d\varphi \\ = & \frac{2\pi}{3} \int_0^\pi r^3 \sin \Theta d\Theta = \frac{2\pi}{3} \int_{-1}^1 r^3 d\mu \\ = & \frac{2\pi}{3} \int_{-1}^1 [1 + \xi_* + \varepsilon P_2(\mu)]^3 d\mu, \\ 2 = & (1 + \xi_*)^3 \int_{-1}^1 \left[1 + \frac{\varepsilon}{1 + \xi_*} P_2(\mu) \right]^3 d\mu, \\ 2 = & (1 + \xi_*)^3 \int_{-1}^1 \left[1 + \frac{3\varepsilon}{1 + \xi_*} P_2(\mu) \right. \\ & \left. + \frac{3\varepsilon^2}{(1 + \xi_*)^2} P_2^2(\mu) + O(\varepsilon^3) \right]^3 d\mu \end{aligned} \quad (1C)$$

или

$$2 = 2(1 + \xi_*)^3 \left[1 + \frac{3}{5} \frac{\varepsilon^2}{(1 + \xi_*)^2} \right] + O(\varepsilon^3),$$

$$\begin{aligned} 1 = & (1 + \xi_*) \left(\left[1 + \frac{3}{5} \frac{\varepsilon^2}{(1 + \xi_*)^2} \right] + O(\varepsilon^3) \right)^{1/3} \\ \approx & (1 + \xi_*) \left[1 + \frac{\varepsilon^2}{5(1 + \xi_*)^2} \right]. \end{aligned}$$

Получилось уравнение относительно ξ_* , которое имеет два корня: $-\varepsilon^2/5$ и $\varepsilon^2/5 - 1$. Выбирая из этого множества значение ξ_* , позволяющее записать начальное условие (9) в виде асимптотического по ε разложения, можно записать (9) и (10) в более простом виде

$$t = 0: \quad r = 1 + \varepsilon P_2(\cos \Theta) - \frac{\varepsilon^2}{5}. \quad (2C)$$

D. Разложения для потенциалов и связанных с ними величин в окрестности невозмущенной поверхности капли

Величина электростатического потенциала Φ на поверхности $r = 1 + \xi$ с требуемой точностью выражается через значения Φ и его частных производных на поверхности единичной сферы

$$r = 1 + \xi:$$

$$\begin{aligned} \Phi = & \Phi(r, \Theta, t) = \Phi(1 + \xi, \Theta, t) = \Phi(1, \Theta, t) \\ & + \frac{\partial \Phi}{\partial r}(1, \Theta, t)\xi + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}(1, \Theta, t)\xi^2 + O(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

С учетом (12), (14) и (15) выписанное разложение переписывается в виде

$$r = 1 + \xi:$$

$$\begin{aligned} \Phi = & \Phi_0|_{r=1} + \left(\Phi_1 + \xi_1 \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} \right)_{r=1} \\ & + \left[\Phi_2 + \xi_2 \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} + \xi_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} + \frac{1}{2} \xi_1^2 \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial r^2} \right]_{r=1} \\ & + O(\varepsilon^3). \end{aligned} \quad (1D)$$

Теперь величина Φ на поверхности $r = 1 + \xi$ с необходимой точностью совпадает со значением выписанной суммы, составляющие которой определены на поверхности $r = 1$.

Применяя аналогичную процедуру и используя для компонент орта нормали соотношения (6A) и (7A), несложно построить разложения

$$r = 1 + \xi:$$

$$\begin{aligned} \nabla \Phi = & \nabla \Phi_0|_{r=1} + \left(\nabla \Phi_1 + \xi_1 \frac{\partial \nabla \Phi_0}{\partial r} \right)_{r=1} + \left[\nabla \Phi_2 \right. \\ & \left. + \xi_2 \frac{\partial \nabla \Phi_0}{\partial r} + \xi_1 \frac{\partial \nabla \Phi_1}{\partial r} + \frac{1}{2} \xi_1^2 \frac{\partial^2 \nabla \Phi_0}{\partial r^2} \right]_{r=1} \\ & + \mathbf{e}_r O(\varepsilon^3) + \mathbf{e}_\Theta O(\varepsilon^3), \end{aligned} \quad (2D)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial n} &= n_r \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{n_\Theta}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \Theta} = \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \Theta} \right)^2 \right] \\ &\times \left[\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \xi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{\xi^2}{2} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial r^3} \right]_{r=1} \\ &+ (1 - \xi + \xi^2) \left[-\frac{\partial \xi}{\partial \Theta} + \xi \frac{\partial \xi}{\partial \Theta} \right] \\ &\times \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \Theta} + \xi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \Theta} + \frac{\xi^2}{2} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial r^2 \partial \Theta} \right] + O(\varepsilon^3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial n} &= \left[\frac{\partial \Phi_0}{\partial r} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} + \xi_1 \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial r^2} - \frac{\partial \xi_1}{\partial \Theta} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \Theta} \right. \\ &+ \xi_2 \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial \Theta} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \Theta} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \\ &+ \xi_1 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r^2} + \frac{\xi_1^2}{2} \frac{\partial^3 \Phi_0}{\partial r^3} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial \Theta} \right)^2 \frac{\partial \Phi_0}{\partial \Theta} \\ &\left. - \frac{\partial \xi_1}{\partial \Theta} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \Theta} - \xi_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial \Theta} \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial r \partial \Theta} + 2\xi_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial \Theta} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \Theta} \right]_{r=1} \\ &+ O(\varepsilon^3). \end{aligned} \quad (3D)$$

Для $S\{(r, \Theta, \varphi) \equiv r = 1 + \xi(\Theta, t); 0 \leq \Theta < \pi; 0 \leq \varphi < 2\pi\}$

$$\begin{aligned} dS &= \frac{r^2 \sin \Theta}{\cos \gamma} d\Theta d\varphi = \frac{r^2 \sin \Theta}{(\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{n})} d\Theta d\varphi \\ &= \frac{(1 + 2\xi + \xi^2) \sin \Theta}{1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \Theta} \right)^2} d\Theta d\varphi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dS &= \left(1 + 2\xi_1 + 2\xi_2 + \xi_1^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial \Theta} \right)^2 \right) \\ &\times \sin \Theta d\Theta d\varphi. \end{aligned} \quad (4D)$$

Здесь $\cos \gamma$ — косинус угла между радиальным ортом \mathbf{e}_r и ортом нормали к поверхности капли \mathbf{n} . С помощью (1D)–(4D), (1B) и (12)–(15) легко выделяются составляющие нулевого порядка малости в (1)–(11). Полная математическая формулировка задачи нулевого порядка малости представлена выражениями (16). Ее решение $\Phi_0 = Q/r$ значительно упрощает вид выражений (1D)–(4D) и позволяет выписать аппроксимации

$r = 1 + \xi$:

$$\begin{aligned} \Phi &= Q + (\Phi_1 - Q\xi_1)_{r=1} + \left[\Phi_2 - Q\xi_2 \right. \\ &\left. + \xi_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} + \xi_1^2 Q \right]_{r=1} + O(\xi^3), \end{aligned} \quad (5D)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_E &= \frac{E^2}{8\pi} = \frac{(\nabla \Phi)^2}{8\pi} = \frac{Q^2}{4\pi} - \frac{Q}{4\pi} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} + 2\xi_1 Q \right)_{r=1} \\ &- \frac{Q}{4\pi} \left[\frac{\partial \Phi_2}{\partial r} + 2\xi_2 Q + \xi_1 Q \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r^2} \right. \\ &\left. - 2\xi_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} - 5\xi_1^2 \right]_{r=1} + \frac{1}{8\pi} \left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \right]_{r=1}^2 \\ &+ \frac{1}{8\pi} \left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial \Theta} \right]_{r=1}^2 + O(\varepsilon^3), \end{aligned} \quad (6D)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS &= \left\{ -Q + \left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} + 2\xi_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \right. \right. \\ &\left. \left. + \xi_1 \frac{\partial \Phi_1^2}{\partial r^2} - \frac{\partial \xi_1}{\partial \Theta} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \Theta} \right]_{r=1} \right\} d\Theta d\varphi. \end{aligned} \quad (7D)$$

Для потенциала скоростей ψ и его частных производных процедура построения разложений на поверхности капли такая же, как и при построении разложения (1D),

$$r = 1 + \xi: \quad \psi = \left[\psi_1 + \psi_2 + \xi_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \right]_{r=1} + O(\varepsilon^3), \quad (8D)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \left[\frac{\partial \psi_1}{\partial r} + \frac{\partial \psi_2}{\partial r} + \xi_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r^2} \right]_{r=1} + O(\varepsilon^3), \quad (9D)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial \Theta} \frac{\partial \psi}{\partial \Theta} = \left[\frac{\partial \xi_1}{\partial \Theta} \frac{\partial \psi_1}{\partial \Theta} \right]_{r=1} + O(\varepsilon^3),$$

$$(\nabla \cdot \psi)^2 = \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial r} \right)_{r=1} + \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial \Theta} \right)_{r=1} + O(\varepsilon^3). \quad (10D)$$

Список литературы

- [1] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // Изв. РАН. МЖТ. 1994. № 3. С. 3–22.
- [2] Tsamopoulos J.A., Brawn R.A. // J. Fluid Mech. 1984. Vol. 147. P. 373–395.
- [3] Natarayan R., Brawn R.A. // Proc. R. Soc. Lond. 1987. Vol. A410. P. 209–227.
- [4] Pelecas W.A., Tsamopoulos J.A. // Phys. Fluid. 1990. Vol. A2. N 8. P. 1328–1340.
- [5] Feng J.Q., Beard K.V. // J. Fluid. Mech. 1991. Vol. 227. P. 429–447.
- [6] Wong T.G., Anilkumar A.V., Lee C.P. // J. Fluid Mech. 1996. Vol. 308. P. 1–14.
- [7] Feng Z.C. // J. Fluid Mech. 1997. Vol. 333. P. 1–21.
- [8] Reyleigh (Strett J.W.) // Phil. Mag. 1882. Vol. 14. P. 184–186.
- [9] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.
- [10] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 733 с.
- [11] Найфе А.Х. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.
- [12] Ширяева С.О., Григорьев А.И., Григорьева И.Д. // ЖТФ. 1995. Т. 65. Вып. 9. С. 39–45.