

01;03

Нелинейное развитие капиллярных волн в струе вязкой жидкости

© Ю.Г. Чесноков

Санкт-Петербургский государственный технологический институт (Технический университет),
198013 Санкт-Петербург, Россия

(Поступило в Редакцию 9 марта 1999 г. В окончательной редакции 14 сентября 1999 г.)

При помощи приближенных одномерных уравнений динамики струи ньютоновской вязкой жидкости изучено нелинейное развитие капиллярных волн в струе. Показано, что размеры капель сателлитов, которые образуются при неоднородном распаде струи на капли, при фиксированном значении волнового числа уменьшаются с уменьшением числа Рейнольдса. При некотором значении числа Рейнольдса, зависящем от волнового числа и начального значения амплитуды возмущения, образование капель сателлитов при распаде струи прекращается.

Введение

Струя жидкости, вытекающая через сопло, может дробиться на капли в результате роста амплитуды возмущений под действием капиллярных сил. Такими возмущениями могут являться возмущения формы поверхности струи, флуктуации давления или расхода жидкости, а также возмущения физических характеристик жидкости. Указанное явление находит многочисленные технические применения, например в различных печатающих устройствах, в химической технологии и других областях [1]. По этой причине капиллярные волны на поверхности струи жидкости изучаются на протяжении многих лет как экспериментально, так и теоретически. Имеется ряд обзоров литературы [1,2], посвященной данному вопросу, и повторять здесь подобный обзор нет необходимости.

Еще Рэлеем было установлено, что струя жидкости, подверженная возмущению синусоидального вида, длина волны которого превышает длину окружности, ограничивающей сечение струи, неустойчива по отношению к этому возмущению. Неустойчивость возникает в результате действия капиллярных сил. Если в каком-либо месте возникает локальное уменьшение радиуса струи, капиллярные силы вызывают локальное увеличение давления. Наоборот, в том месте, где возникает локальное увеличение радиуса струи, давление вблизи поверхности уменьшается. В результате возникает течение жидкости из областей, где струя жидкости подверглась сжатию, в те области, где наблюдается расширение струи. По этой причине возникшее в какой-либо момент времени возмущение нарастает с течением времени. Основываясь на линеаризованных уравнениях гидромеханики, Рэлей получил соотношение, связывающее скорость роста амплитуды возмущения и длину волны возмущения. Как оказалось, время от момента возникновения возмущения до момента распада струи на капли, вычисленное при помощи линейной теории, неплохо согласуется с результатами опытов.

Основной недостаток линейной теории заключается в том, что по мере роста амплитуды возмущений лежащие в основе теории линеаризованные уравнения теряют

свою пригодность. По этой причине полученные на основе такой теории результаты справедливы, вообще говоря, лишь в течение небольшого промежутка времени, пока амплитуда возмущения остается малой. Существует два различных подхода, позволяющие учитывать нелинейное взаимодействие возмущений. Один из них основан на представлении искомого решения в виде рядов по малому параметру, которым является начальное значение амплитуды возмущения. Второй подход заключается в прямом численном интегрировании уравнений гидромеханики с соответствующими граничными условиями.

В ряде работ [3–9] рассматривалась задача о нелинейном развитии возмущений в цилиндрической струе идеальной жидкости. В частности, было показано, что в результате нелинейного взаимодействия возмущений может наблюдаться неоднородный распад струи жидкости на капли. Кроме относительно крупных капель в промежутках между ними образуются сравнительно мелкие капли, так называемые сателлиты. Лафранс [8] получил зависимости размеров основных капель и капель сателлитов от волнового числа и сопоставил эти зависимости с экспериментальными данными. Как оказалось, опытные данные неплохо согласуются с результатами теории.

Прямому численному моделированию процесса распада струи жидкости на капли посвящены работы [10–16]. В этих работах рассматривались как струи идеальной жидкости [13,14], так и струи вязкой жидкости [10–12,15,16]. В работе [15] проведено весьма детальное изучение влияния таких факторов, как значение числа Рейнольдса, волнового числа, начального значения амплитуды возмущения на закономерности процесса распада струи жидкости на капли. Тем не менее численное интегрирование уравнений гидромеханики не является универсальным методом. Большие затраты машинного времени не позволяют отказаться при расчетах от таких предположений, как наличие продольной периодичности течения, отсутствие начального профиля скорости и т. п. По этой причине во многих работах для теоретического исследования капиллярной неустойчивости струи жидкости используются приближенные одномерные уравнения, полученные на основе предположения о малости поперечного масштаба течения по сравнению с продольным масштабом.

К числу работ этой группы можно отнести, например, [17–26]. Среди указанных имеются работы, основанные на использовании методов возмущений [17–22], и работы, в которых одномерные уравнения решаются численно [23–26]. Эггерс [27,28] получил автоматическое решение одномерных уравнений, описывающее процесс распада струи жидкости на капли в моменты времени, непосредственно предшествующие распаду и следующие за ним. В работе [29] изучена устойчивость этого решения по отношению к малым возмущениям, а в работе [30] показано, что существует счетное множество подобных автоматических решений, из которых решение Эггерса наиболее устойчиво по отношению к возмущениям.

Различными авторами использовались разные варианты приближенных одномерных уравнений. Из числа работ, посвященных систематическому выводу таких уравнений, упомянем [31,32], в которых произведено сравнение различных приближенных уравнений путем сопоставления результатов, полученных с их помощью, с точным решением задачи Рэлея. В [32] разработана процедура построения приближенных уравнений, справедливых для любого порядка по малому параметру, представляющему собой соотношение поперечного и продольного масштабов течения. Показано, что полученные там уравнения позволяют построить решение линейной задачи об устойчивости цилиндрической струи вязкой жидкости, согласующееся с решением Рэлея с точностью до членов, пропорциональных квадрату волнового числа.

Целью данной работы является решение нелинейной задачи о развитии возмущений в цилиндрической струе вязкой жидкости при помощи приближенных одномерных уравнений работы [32]. Решение аналогичной задачи, не основанное на использовании приближенных уравнений, известно только для случая струи идеальной жидкости. Здесь, как и в [32], рассматривается так называемая абсолютная или временная устойчивость струи жидкости. Это означает, что рассматривается бесконечная струя в системе координат, перемещающейся вместе с жидкостью. Пространственная или конвективная устойчивость струи вязкой жидкости, т.е. устойчивость полуограниченной струи при заданных начальных условиях на срезе сопла, рассматривалась в [19–21] при помощи так называемых уравнений Коссера. Эти уравнения, как и другие разновидности приближенных одномерных уравнений, могут использоваться при условии, что поперечный масштаб течения мал по сравнению с продольным масштабом. Такое условие выполняется для длинноволновых возмущений, т.е. в тех случаях, когда волновое число возмущения является малым. Следует отметить, что в приближенных уравнениях Коссера главные по этому малому параметру члены, которые содержат вязкость жидкости, не согласуются с точными уравнениями [31]. Поэтому изучить влияние вязкости жидкости на развитие возмущений при помощи указанных уравнений не представляется возможным. Изучение нелинейного взаимодействия капиллярных волн на поверхности цилиндрической струи вязкой жидкости при

помощи уравнений, предложенных в [32], позволит как исследовать влияние сил вязкого трения на развитие капиллярных волн, так и установить, в какой степени указанные уравнения применимы для описания нелинейного взаимодействия возмущений. Для ответа на последний вопрос необходимо сопоставить полученные здесь результаты с известными из литературы решениями задачи о нелинейном развитии капиллярных волн в струях идеальной жидкости, а также с результатами численного решения аналогичной задачи для струй вязкой жидкости.

Формулировка задачи

В данной работе рассматривается задача о капиллярной устойчивости струи несжимаемой вязкой ньютоновской жидкости, имеющей цилиндрическую форму. Как было показано еще Рэлеем, к распаду струи на капли приводит рост осесимметричных возмущений. Поэтому здесь будут рассматриваться именно такие возмущения. Предполагается, что скорость жидкости в струе достаточно велика. В этом случае влиянием силы тяжести на процесс распада жидкой струи под действием капиллярных сил можно пренебречь.

При решении задачи удобно использовать безразмерные переменные. Обозначим через a радиус струи, через ρ и μ — плотность и вязкость жидкости, через σ — поверхностное натяжение на границе раздела между жидкой струей и окружающей средой (газом). Тогда радиус струи a можно использовать в качестве линейного масштаба, в качестве масштаба времени введем величину $t_0 = (\rho a^3 / \sigma)^{1/2}$, в качестве масштаба скорости жидкости — величину $v_0 = (\sigma / \rho a)^{1/2}$, а в качестве характеристического масштаба давления жидкости — величину $p_0 = \sigma / a$. Введем в рассмотрение цилиндрическую систему координат (r, Θ, z) , ось z которой совпадает с осью симметрии. Обозначим через u и v осевую и радиальную составляющие вектора скорости жидкости, а через p — давление. Уравнения, описывающие течение жидкости в струе, представляют собой уравнение неразрывности

$$v_r + \frac{v}{r} + u_z = 0,$$

осевую составляющую уравнения Навье–Стокса

$$u_t + v u_r + u u_z = -p_z + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{1}{r} (r u_r)_r + u_{zz} \right],$$

радиальную составляющую уравнения Навье–Стокса:

$$v_t + v v_r + u v_z = -p_r + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{1}{r} (r v_r)_r - \frac{v}{r^2} + v_{zz} \right].$$

Здесь t — время, безразмерный параметр Re (число Рейнольдса) определяется при помощи соотношения

$$\text{Re} = (\rho a \sigma)^{1/2} / \mu.$$

При записи уравнений нижние индексы у переменных обозначают дифференцирование по соответствующей переменной, т. е. $v_r = \partial v / \partial r$ и т. п. Свободная поверхность струи задается при помощи уравнения

$$r = \eta(z, t).$$

На этой поверхности выставляется кинематическое граничное условие

$$\eta_t + u\eta_z = v \quad \text{при} \quad r = \eta$$

и два динамических граничных условия. Одно из них означает, что на поверхности струи обращается в нуль тангенциальная к поверхности составляющая вектора вязкого напряжения

$$2v_r\eta_z + (u_r + v_z)(1 - \eta_z^2) - 2u_z\eta_z = 0 \quad \text{при} \quad r = \eta.$$

Согласно второму условию, нормальная к поверхности составляющая вектора напряжения по разные стороны от поверхности различается на величину $\sigma(1/R_1 + 1/R_2)$, где R_1 и R_2 — главные радиусы кривизны поверхности струи в продольном и поперечном направлениях. В безразмерных переменных

$$p - \frac{1}{\text{Re}} [2v_r - (u_r + v_z)\eta_z] = p_a + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Здесь p_a — давление окружающей среды, которое предполагается постоянным. Главные радиусы кривизны в цилиндрической системе координат вычисляются по формулам

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{\eta(1 + \eta_z^2)^{1/2}}, \quad \frac{1}{R_2} = -\frac{\eta_{zz}}{(1 + \eta_z^2)^{3/2}}.$$

Сформулированная задача имеет решение следующего вида:

$$u = v = 0, \quad \eta = 1, \quad p = p_a + 1. \quad (1)$$

Эти формулы описывают движение жидкости в цилиндрической струе в системе координат, связанной с жидкостью. Такое решение непригодно для начального участка струи, где происходит вязкая релаксация профиля скорости, образовавшегося при движении жидкости через сопло. Как показывают оценки, имеющиеся, например, в работе [6], протяженность начального участка невелика по сравнению с расстоянием, на котором происходит капиллярный распад струи. Поэтому почти во всех работах, посвященных капиллярной устойчивости струй жидкости, изучается устойчивость по отношению к малым возмущениям именно такого решения.

Одномерные уравнения динамики капиллярной струи

Расчет нелинейного взаимодействия возмущений в струе вязкой жидкости наталкивается на определенные трудности. В том случае, когда решение строится в виде

рядов по малому параметру (амплитуде возмущения), во втором приближении по малому параметру оказывается невозможным получить явные аналитические решения уравнений, описывающих движение жидкости в струе. Однако в этом случае можно построить приближенное решение, основанное на предположении о том, что продольный масштаб изменения гидромеханических величин, т. е. масштаб изменения в направлении оси струи, значительно превосходит масштаб изменения гидромеханических величин в поперечном направлении. Приближенные одномерные уравнения, пригодные в этой ситуации, рассматривались многими авторами. В работе [32] разработана методика построения таких приближенных одномерных уравнений, справедливых для любого порядка по малому параметру, представляющему собой отношение поперечного и продольного масштабов течения. Фактически эти приближенные уравнения являются достаточно точными в том случае, когда длина волны возмущения велика, т. е. волновое число малое. Опишем кратко процедуру построения приближенных уравнений с той целью, чтобы ввести необходимые обозначения и указать на те допущения, которые лежат в основе теории.

При записи уравнений гидромеханики и граничных условий в безразмерной форме необходимо ввести различные масштабы поперечной r и продольной z координат. Тогда в указанных соотношениях появится малый параметр δ , представляющий собой отношение этих масштабов. Безразмерный параметр Re предполагается величиной порядка единицы (при $\delta \rightarrow 0$). Если переменные η , u , v и p искать в виде рядов

$$\eta = \sum_{m \geq 0} \delta^{2m} \eta^{(2m)}(z, t),$$

$$u = \sum_{n, m \geq 0} \delta^{2(n+m)} r^{2n} u^{n, 2m}(z, t),$$

$$v = \delta r \sum_{n, m \geq 0} \delta^{2(n+m)} r^{2n} v^{n, 2m}(z, t),$$

$$p - p_a = \sum_{n, m \geq 0} \delta^{2(n+m)} r^{2n} p^{n, 2m}(z, t),$$

то уравнения для коэффициентов этих разложений можно получить, подставляя указанные ряды в уравнения гидромеханики и граничные условия и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях r и δ . В работе [32] при помощи уравнений такого рода изучена устойчивость течения, описываемого формулами (1), по отношению к малым возмущениям в линейном приближении по малому параметру, представляющему собой начальное значение амплитуды возмущения. Предполагается, что в начальный момент времени имеется малое возмущение синусоидального вида, например возмущение поверхности струи,

$$\eta = 1 + \varepsilon \cos(kz) + O(\varepsilon^2) \quad \text{при} \quad t = 0,$$

где ε — малый параметр, k — волновое число.

Если ограничиться только главными членами асимптотических разложений, т.е. уравнениями для $\eta^{(0)}$ и $u^{0,0}$, то неустойчивыми окажутся возмущения с любым значением волнового числа. Это противоречит точным результатам Рэлея, согласно которым неустойчивы только те возмущения, для которых $k < 1$. Во втором приближении по малому параметру δ неустойчивыми окажутся только длинноволновые возмущения. Если значение волнового числа k превышает некоторую конечную величину, зависящую от Re , имеет место неустойчивость течения. Приближенное выражение для скорости роста возмущения совпадает с результатами Рэлея с точностью до членов порядка k^2 .

В данной работе используется несколько иная методика. Введем в рассмотрение новые переменные

$$\phi = \eta^{(0)} + \delta^2 \eta^{(2)} + O(\delta^4),$$

$$w = u^{0,0} + \delta^2 u^{0,2} + O(\delta^4).$$

Уравнения для коэффициентов разложений $\eta^{(0)}$, $\eta^{(2)}$, $u^{0,0}$ и $u^{0,2}$ имеются в [32]. Умножая правые и левые части уравнений для $\eta^{(2)}$ и $u^{0,2}$ на δ^2 и складывая полученные соотношения с уравнениями для $\eta^{(0)}$ и $u^{0,0}$ соответственно и пренебрегая слагаемыми порядка δ^4 , получаем уравнения для величин ϕ и w

$$\phi_t + \phi_z w + \frac{1}{2} \phi w_z + \frac{1}{16} \left[\phi^3 w_{zz} + 10 \phi_z \phi^2 w_{zz} + 6(\phi_{zz} \phi^2 + 3 \phi_z^2 \phi) w_z \right] = 0, \quad (2)$$

$$w_t + w w_z = \frac{3}{8} (\phi^2 w_z w_{zz} + 2 \phi \phi_z w_z^2) + \frac{3}{\text{Re}} \left[w_{zz} + \frac{2 \phi_z w_z}{\phi} + \frac{1}{8} \phi^2 w_{zzzz} + \frac{5}{4} \phi \phi_z w_{zzz} + \left(2 \phi \phi_z + \frac{5}{2} \phi_z^2 \right) w_{zz} + \left(\phi \phi_{zzz} + \frac{5}{2} \phi_z \phi_{zz} + \frac{1}{2} \frac{\phi_z^3}{\phi} \right) w_z \right] + \frac{\phi_z}{\phi^2} + \phi_{zzz} + \frac{3}{4} \frac{\phi_z \phi_{zz}}{\phi}. \quad (3)$$

При записи этих уравнений различные масштабы для переменных r и z не используются, т.е. $\delta \equiv 1$. Такой подход имеет то преимущество, что алгебраические вычисления несколько упрощаются. Как будет видно из дальнейшего изложения, в линейном по ε приближении в отличие от [32] граница между неустойчивыми и устойчивыми возмущениями оказывается точно такой же, как и в теории Рэлея, т.е. течение неустойчиво при $k < 1$.

Приближенные уравнения для амплитуд возмущений. Первое приближение

Будем предполагать, что в начальный момент времени $t = 0$ имеется возмущение поверхности струи, а возмущения скорости жидкости отсутствуют. Тогда

систему уравнений (2), (3) необходимо рассматривать со следующими начальными условиями:

$$\phi = 1 + \varepsilon \cos(kz) - \frac{\varepsilon^2}{4} + O(\varepsilon^4), \quad (4)$$

$$\phi_t = 0 \quad \text{при} \quad t = 0. \quad (5)$$

Здесь ε — некоторая малая величина (начальное значение амплитуды возмущения). Вывод соотношения (4) имеется в [3]. Оно вытекает из условия сохранения объема струи. Решение сформулированной задачи будем искать в следующем виде:

$$\phi = 1 + \varepsilon \phi_1 + \varepsilon^2 \phi_2 + O(\varepsilon^3), \quad w = \varepsilon w_1 + \varepsilon^2 w_2 + O(\varepsilon^3).$$

Подставляя эти разложения в уравнения (2), (3) и начальные условия и приравнявая коэффициенты в левой и правой частях при одинаковых степенях параметра ε , получаем уравнения и начальные условия для первого и второго приближений. В линейном по ε приближении

$$\phi_{1t} + \frac{1}{2} w_{1z} + \frac{1}{16} w_{1zzzz} = 0, \quad (6)$$

$$w_{1t} = \frac{3}{\text{Re}} \left[w_{1zz} + \frac{1}{8} w_{1zzzz} \right] + \phi_{1z} + \phi_{1zz}, \quad (7)$$

$$\phi_1 = \cos(kz), \quad \phi_{1t} = 0 \quad \text{при} \quad t = 0. \quad (8), (9)$$

Уравнения для ϕ_2 и w_2 таковы:

$$\phi_{2t} + \frac{1}{2} w_{2z} + \frac{1}{16} w_{2zzz} + \phi_{1z} w_1 + \frac{1}{2} \phi_1 w_{1z} + \frac{1}{16} (3 \phi_1 w_{1zzz} + 10 \phi_{1z} w_{1z} + 6 \phi_{1zz} w_{1z}) = 0, \quad (10)$$

$$w_{2t} + w_1 w_{1z} = \frac{3}{8} w_{1z} w_{1zz} + \frac{3}{\text{Re}} \left[w_{2zz} + \frac{1}{8} w_{2zzzz} + 2 \phi_{1z} w_{1z} + \frac{1}{4} \phi_1 w_{1zzzz} + \frac{5}{4} \phi_{1z} w_{1zz} + 2 \phi_{1zz} w_{1z} + \phi_{1zzz} w_{1z} \right] + \phi_{2z} + \phi_{2zz} - 2 \phi_1 \phi_{1z} + \frac{3}{4} \phi_{1z} \phi_{1zz}. \quad (11)$$

Начальные условия для этих уравнений

$$\phi_2 = -\frac{1}{4}, \quad \phi_{2t} = 0 \quad \text{при} \quad t = 0. \quad (12), (13)$$

Решение системы уравнений (6), (7) с начальными условиями (8), (9) можно искать в виде

$$\phi_1 = h_1(t) \text{ch}(ikz), \quad w_1 = i f_1(t) \text{sh}(ikz).$$

Здесь i — мнимая единица. Введем обозначение

$$A(k) = \frac{k}{2} - \frac{k^3}{16}.$$

Для величин h_1 и f_1 получим следующие выражения:

$$h_1(t) = \alpha_0 e^{\omega_1 t} + \beta_0 e^{\omega_2 t}, \quad f_1(t) = \frac{1}{A} (\alpha_0 \omega_1 e^{\omega_1 t} + \beta_0 \omega_2 e^{\omega_2 t}).$$

Здесь величины $\omega_1(k)$ и $\omega_2(k)$ представляют собой корни квадратного уравнения

$$\omega^2 + \frac{6kA(k)}{\text{Re}} \omega - k(1 - k^2)A(k) = 0, \quad (14)$$

а коэффициенты α_0 и β_0 вычисляются при помощи формул

$$\alpha_0 = \frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1}, \quad \beta_0 = \frac{\omega_1}{\omega_1 - \omega_2}.$$

В линейном приближении известно точное решение задачи о капиллярной устойчивости струи вязкой жидкости, полученное еще Рэлеем. Это решение позволяет найти соотношение для расчета скорости роста возмущений ω . Как показано в [32], данное соотношение может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \omega^2 \frac{F(k)}{2} + \omega \frac{k^2(2F(k) - 1)}{\text{Re}} + \frac{2k^4}{\text{Re}^2}(F(k) - F(k_1)) \\ = \frac{1}{2}k^2(1 - k^2), \end{aligned} \quad (15)$$

где $k_1^2 = k^2 + \omega \text{Re}$, $F(k) = kI_0(k)/I_1(k)$, $I_0(k)$ и $I_1(k)$ — модифицированные функции Бесселя нулевого и первого порядка соответственно.

Если функцию $F(k)$ разложить в ряд по степеням k и сохранить только два слагаемых, то

$$F(k) = 2 + \frac{k^2}{4} + O(k^4).$$

Используя это соотношение, сумму второго и третьего слагаемых в левой части (15) можно преобразовать к виду

$$\omega \frac{k^2(2F(k) - 1)}{\text{Re}} + \frac{2k^4}{\text{Re}^2}(F(k) - F(k_1)) = \frac{3k^2}{\text{Re}}\omega + O(k^6).$$

С другой стороны,

$$\frac{I_1(k)}{I_0(k)} = A(k) + O(k^5).$$

Таким образом, уравнение (4) при малых k получается из (15), если в последнем соотношении пренебречь членами порядка k^6 . Расчеты показывают, что между точным и приближенным решениями имеется хорошее согласование даже при сравнительно больших значениях k . Например, при $\text{Re} = 10$ и $k = 0.9$ точное и приближенное значения ω составляют соответственно 0.17547 и 0.17555.

Второе приближение

Во втором приближении решение системы уравнений (10), (11) с начальными условиями (12), (13) можно искать в виде

$$\phi_2 = h_2(t) \text{ch}(2ikz) + g_2(t), \quad w_2 = if_2(t) \text{sh}(2ikz).$$

Для того чтобы записать формулы для расчета величин h_2 , g_2 и f_2 в более компактном виде, введем следующие обозначения:

$$\Omega_i = 4\omega_i^2 - 2(\omega_3 - \omega_4)\omega_i + \omega_3\omega_4, \quad i = 1, 2;$$

$$\Omega_3 = (\omega_1 + \omega_2)^2 - (\omega_3 + \omega_4)(\omega_1 + \omega_2) + \omega_3\omega_4;$$

$$B_1 = kA(2k) \left(1 + \frac{3}{8}k^2\right);$$

$$B_2 = 3 - \frac{k^3}{A(k)}; \quad B_3 = \frac{6k^2}{\text{Re}} \left(1 - \frac{k^2}{16}\right) \frac{A(2k)}{A(k)}.$$

Выражения для величин g_2 , h_2 и f_2 таковы:

$$g_2 = -\frac{1}{4}h_1^2,$$

$$h_2 = c_1 e^{2\omega_1 t} + c_2 e^{2\omega_2 t} + c_3 e^{(\omega_1 + \omega_2)t} + c_4 e^{\omega_3 t} + c_5 e^{\omega_4 t},$$

$$\begin{aligned} f_2 = \frac{1}{A(2k)} \left[\omega_1 \left(2c_1 - \frac{\alpha_0^2 B_2}{2}\right) e^{2\omega_1 t} + \omega_2 \left(2c_2 - \frac{\beta_0^2 B_2}{2}\right) \right. \\ \times e^{2\omega_2 t} + (\omega_1 + \omega_2) \left(c_3 - \frac{\alpha_0 \beta_0 B_2}{2}\right) e^{(\omega_1 + \omega_2)t} \\ \left. + \omega_3 c_4 e^{\omega_3 t} + \omega_4 c_5 e^{\omega_4 t} \right]. \end{aligned}$$

Здесь $\omega_3 = \omega_1(2k)$, $\omega_4 = \omega_2(2k)$, а коэффициенты c_i ($i = 1, \dots, 5$) рассчитываются по формулам

$$c_1 = \frac{\alpha_0^2}{\Omega_1} \left[B_1 \left(\frac{\omega_1^2}{2A^2(k)} - 1 \right) + B_2 \omega_1^2 + B_3 \omega_1 \right],$$

$$c_2 = \frac{\beta_0^2}{\Omega_2} \left[B_1 \left(\frac{\omega_2^2}{2A^2(k)} - 1 \right) + B_2 \omega_2^2 + B_3 \omega_2 \right],$$

$$c_3 = \frac{\alpha_0 \beta_0}{\Omega_3} \left[2B_1 \left(\frac{\omega_1 \omega_2}{2A^2(k)} - 1 \right) + \frac{1}{2} B_2 (\omega_1 + \omega_2)^2 + B_3 (\omega_1 + \omega_2) \right],$$

$$c_4 = \frac{(2\omega_1 - \omega_4)c_1 + (2\omega_2 - \omega_4)c_2 + (\omega_1 + \omega_2 - \omega_4)c_3}{\omega_4 - \omega_3},$$

$$c_5 = \frac{(2\omega_1 - \omega_3)c_1 + (2\omega_2 - \omega_3)c_2 + (\omega_1 + \omega_2 - \omega_3)c_3}{\omega_3 - \omega_4}.$$

Во втором приближении для вязкой жидкости точное решение задачи, т.е. решение, не основанное на аппроксимации исходных уравнений, неизвестно. Однако полученные результаты могут быть сопоставлены с точным решением для идеальной жидкости. В этом случае $\omega_2 = -\omega_1$, $\omega_4 = -\omega_3$ и первые два члена разложений для величин ω_i по степеням k совпадают с точным решением, так что точное и приближенное решение различаются на величину порядка k^6 . Первые два слагаемых в разложении по степеням k коэффициента c_3 имеют вид

$$c_3 = \frac{1}{2} + \frac{63}{32}k^2 + O(k^4).$$

Сравнение с соответствующим слагаемым работы [5] показывает, что это разложение с точностью до членов порядка k^2 согласуется с точным разложением. Однако в выражениях для величин Ω_i ($i = 1, 2$), которые в данном случае имеют вид

$$\Omega_i = 4\omega_i^2 - \omega_3^2,$$

главные члены в разложениях первого и второго слагаемых по степеням k взаимно уничтожаются. По этой причине как в разложениях для величин Ω_i , так и в разложениях для величин c_i ($i = 1, 2$) оказываются правильными только главные члены разложений. Несмотря на это, результаты расчета формы струи при помощи точных и приближенных соотношений неплохо согласуются друг с другом.

Влияние волнового числа и числа Рейнольдса на развитие капиллярных волн

При помощи полученных выше соотношений можно изучить влияние вязкости жидкости на процесс развития возмущений. Наиболее заметно вязкость жидкости сказывается на величине промежутка времени от момента возникновения возмущения до момента распада струи жидкости на капли. Для нахождения этой величины поступим следующим образом. При фиксированных значениях волнового числа Рейнольдса и начального значения амплитуды возмущения будем вычислять координаты точек поверхности струи жидкости в различные моменты времени. Тот момент времени, в который радиальная координата одной из точек поверхности обратится в нуль, и будем считать искомым. Здесь следует отметить, что полученные выше формулы, вообще говоря, неприменимы для таких моментов времени. В момент распада струи на капли отбрасываемые при разложении по степеням малого параметра слагаемые оказываются такого же порядка величины, как и оставляемые. Тем не

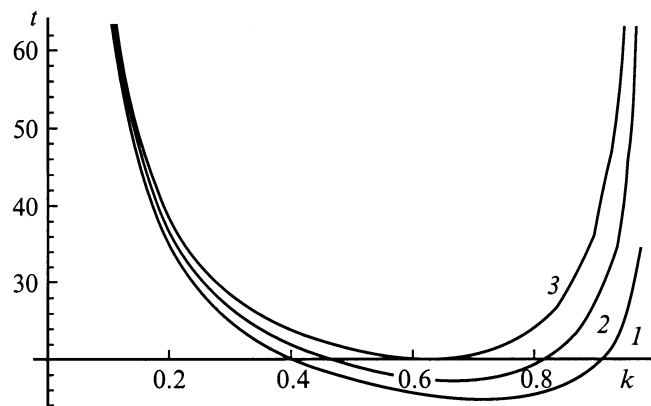


Рис. 1. Зависимости времени до распада струи на капли от волнового числа при различных значениях числа Рейнольдса. Re: 1 — ∞ , 2 — 10, 3 — 5.

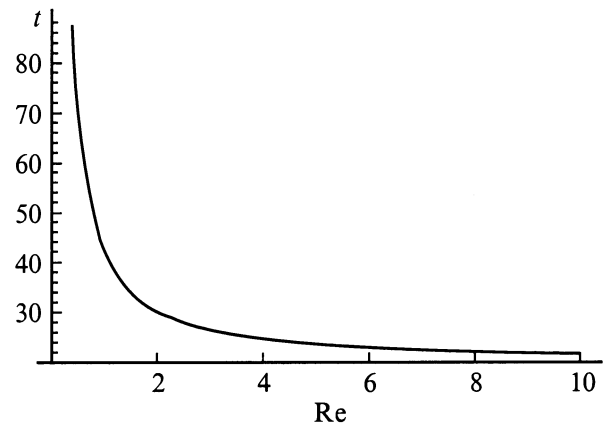


Рис. 2. Зависимость времени до распада струи от числа Рейнольдса при $k = 0.4$.

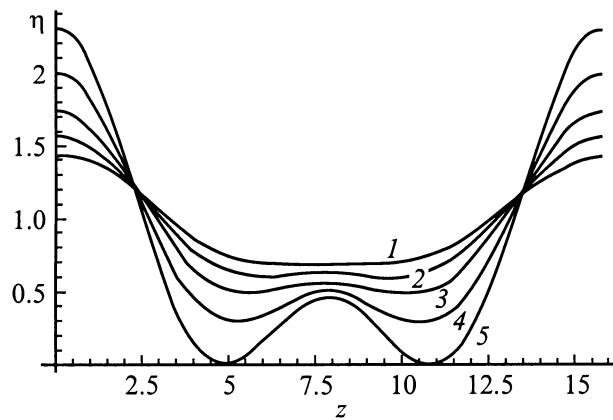


Рис. 3. Форма струи при $Re = 10$ и $k = 0.4$. t : 1 — 18, 2 — 19, 3 — 20, 4 — 21, 5 — 21.9305.

менее с помощью полученных формул можно получить вполне реалистическую оценку для интересующих нас величин. Известно, что для расчета времени до распада струи жидкости на капли с хорошей точностью можно пользоваться даже не слабо нелинейной, а линейной теорией. Расчет формы струи в момент распада также может быть произведен достаточно удовлетворительно с помощью теории возмущений. Это показывает сравнение результатов расчета размеров основных капель и капель сателлитов в зависимости от волнового числа с данными эксперимента [8].

Как видно из рис. 1, при каждом значении числа Рейнольдса с увеличением волнового числа время до распада струи на капли сперва убывает, достигает минимума и затем увеличивается. Как и следовало ожидать, влияние числа Re тем сильнее, чем больше значение волнового числа. Это связано с тем, что в случае коротковолновых возмущений производные скорости жидкости по координатам принимают большие значения и вязкость жидкости сказывается на течении сильнее. Положение минимума на графике зависимости времени до распада струи от волнового числа при увеличении Re смещается

в сторону меньших значений волнового числа. Такая же картина наблюдается и в линейной теории. Расчеты, не представленные на этом рисунке, показывают, что на время до распада струи на капли существенно влияет начальное значение амплитуды возмущения. Все рисунки построены для начального значения амплитуды возмущения $\varepsilon = 0.01$.

Рис. 2 показывает, что в широком диапазоне значений числа Рейнольдса зависимость времени до распада от числа Re слабая. Лишь при сравнительно малых значениях числа Re время до распада очень сильно увеличивается. В этом случае, хотя течение и является неустойчивым, развитие неустойчивости происходит очень медленно и с тем большим основанием для его описания можно использовать полученные здесь результаты.

Форма струи жидкости в моменты времени, близкие к моменту распада на капли, существенно зависит от значения волнового числа. Для длинноволновых возмущений на графике зависимости радиуса струи от продольной координаты в некоторый момент времени появляется второй максимум (рис. 3). Для коротковолновых возмущений такое явление не наблюдается (рис. 4).

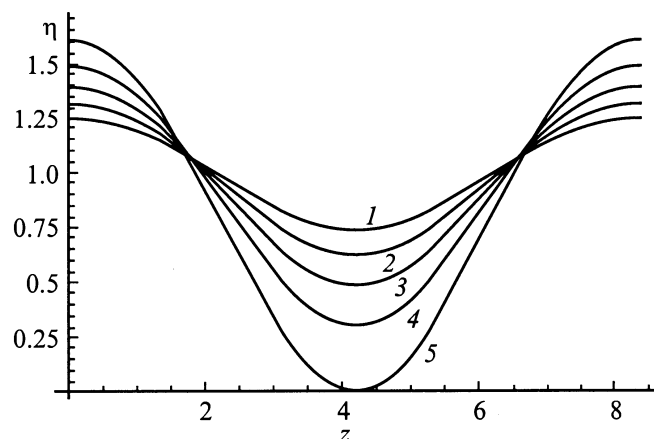


Рис. 4. Форма струи при $Re = 10$ и $k = 0.75$. t : 1 — 14, 2 — 15, 3 — 16, 4 — 17, 5 — 18.149.

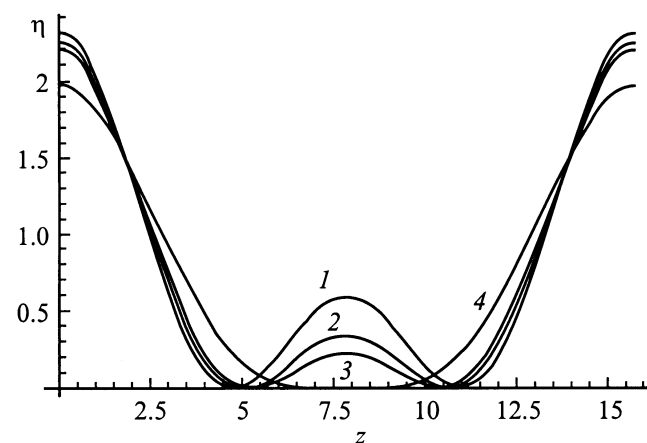


Рис. 5. Форма струи в момент распада на капли при $k = 0.4$. Re : 1 — 100, 2 — 5, 3 — 3, 4 — 0.3.

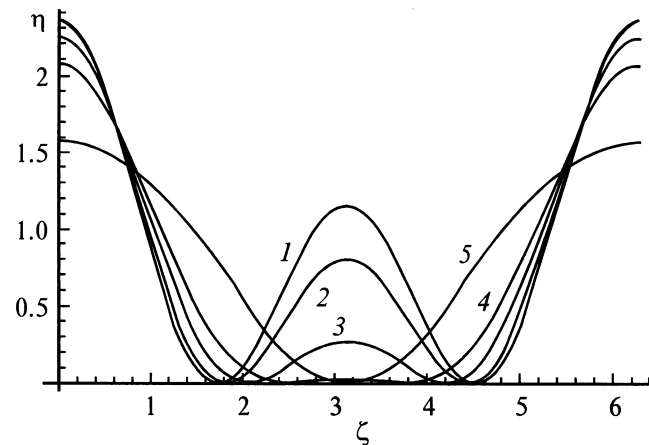


Рис. 6. Форма струи в момент распада на капли при $Re = 10$. k : 1 — 0.1, 2 — 0.3, 3 — 0.45, 4 — 0.525, 5 — 0.8.

Образование второго максимума указывает на появление в промежутках между крупными основными каплями капель-сателлитов. При возрастании числа Re величина второго максимума на графике зависимости радиуса струи от продольной координаты в момент распада струи (рис. 5) уменьшается, а точка, в которой радиус струи обращается в нуль, смещается по направлению к середине отрезка между двумя главными максимумами. При некотором значении числа Re второй максимум пропадает вовсе. Это означает, что при увеличении числа Re размер капель-сателлитов уменьшается, а при некотором Re неоднородный распад струи прекращается. Вязкость жидкости подавляет развитие второй гармоники, и капель-сателлиты не образуются. На рис. 6 построены зависимости радиуса струи от величины $\zeta = kz$ при различных k . Видно, что при увеличении волнового числа точка, в которой обращается в нуль радиус струи в момент распада струи на капли, смещается по направлению к центру, а радиус струи в середине отрезка между двумя основными максимумами уменьшается. Следовательно, размер капель-сателлитов уменьшается при уменьшении длины волны возмущения. Отметим, что полученные здесь результаты согласуются с результатами численных расчетов работы [15].

Список литературы

- [1] Монодиспергирование вещества: принципы и применение / Под ред. Е.В. Аметистова, В.В. Блаженкова, А.К. Городова и др. М.: Энергоиздат, 1991. 336 с.
- [2] Bogy D.B. // Ann. Rev. Fluid. Mech. 1971. Vol. 11. P. 207–228.
- [3] Yuen M.-C. // J. Fluid Mech. 1968. Vol. 33. Pt 1. P. 151–163.
- [4] Wang D.P. // J. Fluid Mech. 1968. Vol. 34. Pt 2. P. 299–313.
- [5] Nayfeh A.H. // Phys. Fluids. 1970. Vol. 13. Pt 4. P. 841–847.
- [6] Маркова М.П., Шкадов В.Я. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1972. № 3. С. 30–37.
- [7] Kakutani T., Inoue Y., Kan T. // J. Phys. Soc. Japan. 1974. Vol. 38. N 2. P. 529–538.
- [8] Lafrance P. // Phys. Fluids. 1975. Vol. 18. N 4. P. 428–432.

- [9] *Chaudhary K.C., Redekopp L.G.* // J. Fluid Mech. 1980. Vol. 96. Pt 2. P. 257–274.
- [10] *Fromm J.E.* // IBM J. Res. Dev. 1984. Vol. 28. P. 322–333.
- [11] *Bousfield D.W., Keunings R., Marrucci G., Denn M.M.* // J. Non-Newt. Fluid Mech. 1986. Vol. 21. N 1. P. 79–97.
- [12] *Shokoohi F., Elrod H.G.* // J. Comput. Phys. 1987. Vol. 71. P. 324–342.
- [13] *Mansour N.N., Lundgren T.S.* // Phys. Fluids. 1990. Vol. A2. N 7. P. 1141–1144.
- [14] *Владимиров В.В., Горшков В.Н.* // ЖТФ. 1990. Т. 60. Вып. 11. С. 197–200.
- [15] *Ashgriz N., Mashayek F.* // J. Fluid Mech. 1995. Vol. 291. P. 163–190.
- [16] *Huynh H., Ashgriz N., Mashaek F.* // J. Fluid Mech. 1996. Vol. 320. P. 185–210.
- [17] *Lee H.C.* // IBM J. Res. Dev. 1974. Vol. 18. P. 364–369.
- [18] *Pimbley W.Y.* // IBM J. Res. Dev. 1976. Vol. 20. P. 148–156.
- [19] *Bogy D.B.* // Phys. Fluids. 1978. Vol. 21. N 2. P. 190–197.
- [20] *Bogy D.B.* // Trans. ASME E. 1978. Vol. 45. P. 469–474.
- [21] *Bogy D.B.* // IBM J. Res. Dev. 1979. Vol. 23. P. 87–91.
- [22] *Блаженков В.В., Гиневский А.Ф., Гунбин В.Ф., Дмитриев А.С.* // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 2. С. 53–61.
- [23] *Епихин В.Е., Шкадов В.Я.* // Изв. РАН. МЖГ. 1993. № 2. С. 12–17.
- [24] *Блаженков В.В., Гиневский А.Ф., Гунбин В.Ф. и др.* // Изв. РАН. МЖГ. 1993. № 3. С. 54–60.
- [25] *Разумовский Н.А.* // ЖТФ. 1993. Т. 63. Вып. 9. С. 26–45.
- [26] *Eggers J., Dupont T.F.* // J. Fluid Mech. 1994. Vol. 262. P. 205–221.
- [27] *Eggers J.* // Phys. Rev. Lett. 1993. Vol. 71. N 21. P. 3458–3460.
- [28] *Eggers J.* // Phys. Fluids. 1995. Vol. 7. N 5. P. 941–953.
- [29] *Brenner M.P., Shi X.D., Nagel S.R.* // Phys. Rev. Lett. 1994. Vol. 73. N 25. P. 3391–3394.
- [30] *Brenner M.P., Lister J.R., Stone H.A.* // Phys. Fluids. 1996. Vol. 8. N 11. P. 2827–2836.
- [31] *Garsia F.J., Castellanos A.* // Phys. Fluids. 1994. Vol. 6. N 8. P. 2676–2689.
- [32] *Bechtel S.E., Carlson C.D., Forest M.G.* // Phys. Fluids. 1995. Vol. 7. N 12. P. 2956–2971.