

Особенности резонансных колебаний упругих волноводов с инерционными включениями

© Д.А. Индейцев, А.Д. Сергеев, С.С. Литвин

Институт проблем машиноведения РАН,
199178 Санкт-Петербург, Россия

(Поступило в Редакцию 2 марта 1999 г.)

Практические проблемы резонансных колебаний инерционных включений, контактирующих с упругими волноводами, стали отправным пунктом ряда теоретических исследований, таких как [1-3], где показано, что анализ данного круга явлений связан с решением спектральной задачи для дифференциального уравнения, заданным на участке бесконечной протяженности. При определенных параметрах волновода и включения возможно наличие смешанного (непрерывного и дискретного) спектра собственных частот у составной системы, включающей в себя взаимодействующие объекты с дискретными и с распределенными параметрами. Дискретный спектр может располагаться как до частоты отсечки, так и за ней. В работах [3,4] указано, что наличие одиночного сосредоточенного инерционного элемента приводит к возникновению дискретного спектра собственных частот до частоты отсечки, которому отвечают так называемые ловушечные формы колебаний. Однако результатов упомянутых исследований пока недостаточно для полномасштабного и эффективного использования данного явления в прикладных целях. Прежде всего требуют обобщения условия существования ловушечных колебаний при наличии многоэлементных включений в бесконечные волноводы разных видов, а также вопросы влияния краевых условий на наличие дискретных спектров краевых условий у полубесконечных волноводов. Анализ этих вопросов, в частности, дает некоторые обоснованные критерии для поиска технических решений инженерных задач, связанных с взаимодействием железнодорожного пути и высокоскоростного подвижного состава, которые можно найти в [5]. Обсуждаемые в работе вопросы также затрагивают получившие самое широкое распространение в кристаллографии и разных других областях физики и техники методики сбора и обработки экспериментального материала о внутреннем строении исследуемого объекта путем анализа спектров его собственных частот.

Введение

Любые протяженные конструкции представляют собой объекты с достаточно сложной внутренней структурой. В таких объектах искусственным или естественным образом обеспечивается совместное деформирование элементов, обладающих весьма сильно различающимися плотностями, модулями жесткости, вязкостью и т.п. Одной из основных составляющих подобных объектов является так называемый "несущий" упруго-инерционный континуум, на который крепятся или в который помещаются остальные элементы, являющиеся атрибутами данной конструкции. Такой характерной искусственной конструкцией является рельсошпальная решетка, естественными объектами подобного рода являются кристаллы.

Эффективность теоретического исследования при решении прикладных или экспериментальных задач для таких объектов во многом зависит от обоснованности выбора физической модели реального объекта и последующего построения его адекватной математической модели. Наиболее ответственным является подбор адекватной модели несущего континуума. Выбору такой модели предшествует анализ опыта эксплуатации исследуемого объекта либо экспериментов с данным объектом. Может оказаться, что в ряде экспериментов альтернативные модели континуального инерционного объекта предсказывают одинаковый качественный и (с доступной для этих экспериментов точностью) количественный результат. В таких случаях предпочтение, как правило,

отдается или традиционной, или наиболее простейшей в смысле математического описания модели континуального инерционного объекта, которая затем уже дополняется инерционными, упругими и др. элементами с сосредоточенными параметрами для точного описания последующих экспериментов.

Возможно, этим объясняется распространенность уравнения балки Бернулли–Эйлера, лежащей на винклеровском основании, при исследовании взаимодействия пути и подвижного состава [5] или, например, волнового уравнения при исследовании задач физики кристаллических решеток, представленных в [6].

Однако выбор модели "несущего упруго-инерционного континуума" накладывает весьма жесткие ограничения на свойства используемых в дальнейшем для уточнения модели дискретных элементов. В частности, если континуум a priori наделяется свойствами струны, то при математическом моделировании экспериментальных ситуаций из рассмотрения сразу должны быть исключены моментные типы взаимодействия континуума с любыми другими инерционными и безынерционными элементами, входящими в его окружение. Это — весьма серьезное сужение перспектив развития математической модели, так как может оказаться, что в дальнейшем его не удастся исправить добавлением любого конечного числа элементов с сосредоточенными параметрами.

Известно, что спектры собственных частот являются одними из наиболее уважаемых экспериментаторами источников информации о свойствах реального объекта,

о его внутренней структуре. Известно, что условие близости спектров реального объекта и его математической модели — необходимое условие достоверности любой физической теории. Однако, когда речь идет о динамике объекта с априорно неизвестной сложной внутренней структурой, про который из эксперимента известны лишь спектры его собственных частот, построение математической модели с оператором, близким по спектру, оставляет достаточно много "темных пятен" в информации относительно способов объединения его элементарных инерционных звеньев в макроструктуры.

Особенности в поведении спектров собственных частот объектов со сложной структурой, обсуждаемые в настоящей работе, получены при точном решении формально поставленных задач математической физики. Обнаруженные эффекты расширяют возможности для экспериментальной проверки используемых в настоящее время математических моделей реальных объектов на адекватность, так как подобного рода особенности должны проявляться в экспериментах с любыми системами, представление о динамике которых опирается на моделирование происходящих процессов данными классами уравнений.

Как известно, в задаче о свободных колебаниях бесконечной упруго-инерционной линии, лежащей на винклеровском основании, имеет место непрерывный спектр частот собственных колебаний, которому отвечают формы собственных колебаний в виде распространяющихся незатухающих волн. Этот спектр является сплошным, он располагается выше так называемой частоты отсечки. Классическое винклеровское основание обуславливает наличие у системы единственной частоты отсечки при взаимодействии с такими бесконечными (или полубесконечными) одномерными упруго-инерционными контунами, поведение которых описывают уравнения струны, балки Бернулли–Эйлера или балки Тимошенко. Значение частоты отсечки определяется линейной плотностью массы упругой линии ρ и коэффициентом жесткости винклеровского основания k , т.е. $\omega_b = \sqrt{k/\rho}$. В работах [1,2] показано, что при наличии сосредоточенных упруго-инерционных включений в подобного рода бесконечных и полубесконечных системах помимо сплошного спектра частот могут существовать дискретные спектры частот собственных колебаний, которым отвечают локализованные формы колебаний, получившие названия ловушечных. В частности, установлено, что дискретные спектры исследованных типов включений для струны всегда располагаются ниже частоты отсечки, для балок при определенных сочетаниях упруго-инерционных свойств упругих линий и исследованных типов включений дискретные спектры могут появиться и выше частоты отсечки. Однако некоторые из сделанных в отдельных работах выводов, верные в конкретно рассмотренных ситуациях, требуют большей корректности при обобщении результатов. Это касается достаточности условий существования дискретных спектров и влияния краевых условий на поведение дискретных спектров при

варьировании параметров включения в зависимости от собственных свойств упруго-инерционной линии.

В настоящей работе рассматриваются задачи о нахождении спектров ловушечных колебаний в упругих системах бесконечной протяженности, представляющих собой струну или балку Бернулли–Эйлера, лежащих на винклеровском основании, при наличии разного рода чисто инерционных включений, не обладающих собственной колебательной динамикой. В этих случаях все дискретные спектры частот располагаются ниже частоты отсечки ω_b . В качестве включений берутся: а) две материальные точки с массами m_1 и m_2 , расположенные друг от друга на расстоянии L ; б) абсолютно твердое тело с массой m и моментом инерции J (заданным относительно центра масс), закрепленное на упругой линии безмоментным образом в двух точках, расстояние между которыми L ; в) два абсолютно твердых тела с массами m_1 и m_2 и моментами инерции J_1 и J_2 (заданным относительно центров масс этих тел), заземленные на упругой линии так, что перемещение центра масс тела совпадает с перемещением точки закрепления, а его угол поворота совпадает с углом поворота сечения в точке закрепления. Случаи а и б предполагают так называемый безмоментный тип контакта упругой линии и включения, случай в относится к моментному типу контактного взаимодействия. Отметим, что моментный тип контакта включения с упругой линией возможен в случае балки и невозможен для струны. Разного рода предельные переходы в перечисленных задачах позволяют получить ловушечные частоты для весьма представительного круга краевых условий. Это дает возможность выявить связи между явлением исчезновения того или иного ловушечного спектра и совокупностью таких факторов, как упругие свойства оснащенной линии, типы степеней свободы отдельного чисто инерционного включения, тип контакта между упругой линией и инерционным включением, геометрические параметры включения.

При исследовании стационарных колебаний двухэлементных точечных включений с массами m_1 и m_2 амплитуды поперечных смещений из положения равновесия их центров масс описываются функциями W_1 и W_2 . Для твердотельных включений к этим функциям добавляются амплитуды двух углов поворота Ψ_1 и Ψ_2 . Положение одноэлементного включения в виде одного твердого тела задается поперечным смещением его центра масс W и углом поворота Ψ . Другие обозначения: s — лагранжева координата сечения упруго-инерционной линии, отсчитываемая вдоль упругой линии; $(\prime) = \partial/\partial s$; $w = w(s)$ — амплитуда поперечного смещения сечения с координатой s ; $c^2 = T/\rho$ — скорость распространения поперечного возмущения в струне (T — сила продольного натяжения струны); $\beta^4 = C/\rho$ — упругий параметр балки Бернулли–Эйлера (где C — ее изгибная жесткость); N_1 и N_2 — амплитуды силовых воздействий на упругую линию в точках контакта с включениями.

Взаимодействие струнного и балочного волноводов с двумя точечными массами

Рассмотрим поведение спектров ловушечных колебаний при варьировании параметров включения в случае безмоментного контакта чисто инерционного включения и упруго-инерционной линии. Амплитуда стационарных колебаний упругой линии типа струны или балки Бернулли–Эйлера, лежащей на винклеровском основании и имеющей двухточечный безмоментный контакт с включением, при частотах колебаний, меньших частоты отсечки ω_b , удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} w'' - \lambda^2 w &= -\frac{N_1}{\rho c^2} \delta(s) - \frac{N_2}{\rho c^2} \delta(s-L), \\ \lambda^2 &= \frac{\omega_b^2 - \omega^2}{c^2} > 0, \quad \text{струна,} \\ w^{IV} + 4\lambda^4 w &= \frac{N_1}{\rho \beta^4} \delta(s) + \frac{N_2}{\rho \beta^4} \delta(s-L), \\ \lambda^4 &= \frac{\omega_b^2 - \omega^2}{4\beta^4} > 0, \quad \text{балка.} \end{aligned} \quad (1)$$

Амплитуды колебаний двухэлементного включения в виде двух частиц с массами m_1 и m_2 удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} m_1 \omega^2 W_1 &= N_1, \quad m_2 \omega^2 W_2 = N_2, \\ w(0) &= W_1, \quad w(L) = W_2. \end{aligned} \quad (2)$$

Ограниченное на бесконечности решение уравнения (1) для струны имеет вид

$$w(s) = \begin{cases} \frac{N_1 e^{\lambda s}}{2\lambda \rho c^2} + \frac{N_2 e^{-\lambda(L-s)}}{2\lambda \rho c^2}, & -\infty < s \leq 0; \\ \frac{N_1 e^{-\lambda s}}{2\lambda \rho c^2} + \frac{N_2 e^{-\lambda(L-s)}}{2\lambda \rho c^2}, & 0 \leq s \leq L; \\ \frac{N_1 e^{-\lambda s}}{2\lambda \rho c^2} + \frac{N_2 e^{\lambda(L-s)}}{2\lambda \rho c^2}, & L \leq s < \infty. \end{cases} \quad (3)$$

Аналогичное решение уравнения для балки Бернулли–Эйлера таково:

$$w(s) = \begin{cases} \frac{N_1 e^{\lambda s}}{8\lambda^3 \rho \beta^4} (\cos \lambda s - \sin \lambda s) + \frac{N_2 e^{\lambda(s-L)}}{8\lambda^3 \rho \beta^4} (\cos \lambda(s-L) - \sin \lambda(s-L)), & -\infty < s \leq 0; \\ \frac{N_1 e^{-\lambda s}}{8\lambda^3 \rho \beta^4} (\sin \lambda s + \cos \lambda s) + \frac{N_2 e^{\lambda(s-L)}}{8\lambda^3 \rho \beta^4} (\cos \lambda(s-L) - \sin \lambda(s-L)), & 0 \leq s \leq L; \\ \frac{N_1 e^{-\lambda s}}{8\lambda^3 \rho \beta^4} (\sin \lambda s + \cos \lambda s) + \frac{N_2 e^{-\lambda(s-L)}}{8\lambda^3 \rho \beta^4} (\sin \lambda(s-L) + \cos \lambda(s-L)), & L \leq s < \infty. \end{cases} \quad (4)$$

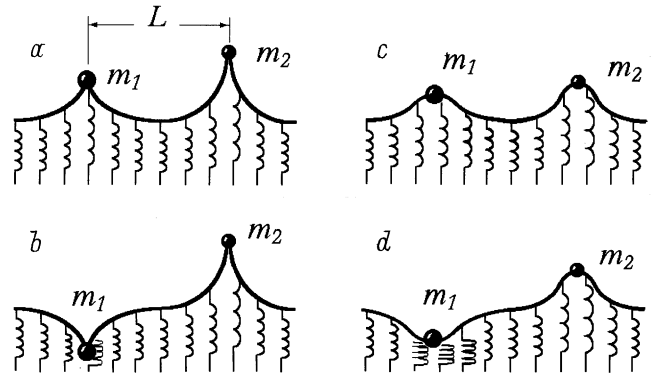


Рис. 1. Симметричная и антисимметричная локализованные формы колебаний в струнном (*a, b*) и балочном (*c, d*) волноводах с включением в виде двух материальных точек. Форма *b* "исчезает" при меньшем, чем L_* , расстоянии между материальными точками.

И в том, и в другом случае с удалением от области контакта упругой линии с включением амплитуда колебаний упругой линии экспоненциально убывает, что говорит о локализации колебаний волновода вблизи включения.

Выполнение условий сопряжения движения упругой линии и включения (2) дает два уравнения относительно спектрального параметра ω^2 . Для струны эти уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{m_1 m_2 \omega_{I,II}^2}{\lambda_{I,II} \rho c^2 (m_1 + m_2)} (1 - e^{-2\lambda_{I,II} L}) \\ = 1 \mp \sqrt{1 - \frac{4m_1 m_2 (1 - e^{-2\lambda_{I,II} L})}{(m_1 + m_2)^2}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Для балки получаем

$$\begin{aligned} \frac{m_1 m_2 \omega_{I,II}^2 (1 - e^{-2\lambda_{I,II} L} (1 + \sin 2\lambda_{I,II} L))}{4\lambda_{I,II}^3 \rho \beta^4 (m_1 + m_2)} \\ = 1 \mp \sqrt{1 - \frac{4m_1 m_2 (1 - e^{-2\lambda_{I,II} L} (1 + \sin 2\lambda_{I,II} L))}{(m_1 + m_2)^2}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Взяв в (5) и (6) знак "минус", находим собственную частоту ω_I^2 , отвечающую условно симметричной форме колебаний (рис. 1, *a, c*); взяв "плюс" — частоту ω_{II}^2 условно антисимметричной формы колебаний волновода (рис. 1, *b, d*) (речь идет о формах колебаний, в строгом смысле приобретающих симметричность и антисимметричность очертаний, если $m_1 = m_2$).

Рассмотрим результаты, которые могут быть получены из соотношений (5) и (6) теми или иными предельными переходами. Перейдем к предельным уравнениям в (5) и (6), устремив $L \rightarrow 0$

$$\text{струна: } \frac{(m_1 + m_2) \omega_I^2}{2\rho c \sqrt{\omega_b^2 - \omega_I^2}} = 1, \quad \frac{m_1 m_2 L \omega_{II}^2}{\rho c^2 (m_1 + m_2)} = 1,$$

балка:
$$\frac{(m_1 + m_2)\omega_I^2}{2\sqrt{2}\rho\beta(\omega_b^2 - \omega_I^2)^{3/4}} = 1,$$

$$\frac{m_1 m_2 L \omega_{II}^2}{2\rho\beta^4(m_1 + m_2)(\omega_b^2 - \omega_{II}^2)^{1/2}} = 1. \quad (7)$$

Положив в (5) одну из масс (например, m_1), равной бесконечности, получим частотное уравнение для задачи о колебаниях бесконечной струны с точечным инерционным включением массы m_2 , помещенным на расстоянии L от шарнирно закрепленной точки волновода с координатой $s = 0$. Непосредственной проверкой легко убедиться, что получаемые таким образом результаты полностью совпадают с результатами для полубесконечной струны с единичным точечным инерционным включением массы m_2 , помещенным на расстоянии L от неподвижно закрепленного начала волновода $s = 0$. Устремив к бесконечности m_1 в задаче о балочном волноводе, т.е. в соотношениях (6), получим частотное уравнение для задачи о колебаниях бесконечной балки с точечным инерционным включением массы m_2 , помещенным на расстоянии L от шарнирно закрепленной точки волновода с координатой $s = 0$, но не для полубесконечной балки

струна:
$$\omega_I^2 = 0, \quad \frac{m_2 \omega_{II}^2}{\lambda_{II} \rho c^2} (1 - e^{-2\lambda_{II} L}) = 1,$$
 балка:
$$\omega_I^2 = 0, \quad \frac{m_2 \omega_{II}^2}{8\lambda_{II}^3 \rho \beta^4} (1 - e^{-2\lambda_{II} L} (1 + \sin 2\lambda_{II} L)) = 1. \quad (8)$$

При $L \rightarrow 0$ (8) дает предельные уравнения вида

струна:
$$\omega_I^2 = 0, \quad \frac{m_2 \omega_{II}^2 L}{\rho c^2} = 1,$$
 балка:
$$\omega_I^2 = 0, \quad \frac{m_2 \omega_{II}^2 L}{2\beta^2 (\omega_b^2 - \omega_{II}^2)^{1/2}} = 1. \quad (9)$$

Значению частоты $\omega_I = 0$ отвечает перемещение всей системы как жесткого целого. Так как наличие шарнирной опоры в точке с координатой $s = 0$ обеспечивает неподвижность бесконечно большой массы m_1 , то нулевой частоте соответствует в данном случае состояние покоя системы.

В случае струны уравнения (7) и (9), из которых определяются значения ловушечной частоты ω_{II} , при значениях расстояния между массами L меньших, чем

$$L_* \approx \frac{\rho c^2 (m_1 + m_2)}{m_1 m_2 \omega_b^2}, \quad L_* = L \Big|_{m_1=\infty} \approx \frac{\rho c^2}{m_2 \omega_b^2}, \quad (10)$$

дают вещественные значения ω_{II} , уже не удовлетворяющие условию $\omega_{II} < \omega_b$. Первое из равенств (10) дает L_* в случае струны с двухмассовым включением, второе — в случае с одной шарнирно закрепленной точкой и одномассовым включением.

Из соотношений (7) и (9) для струнного волновода вытекает возможность наличия такого расстояния между

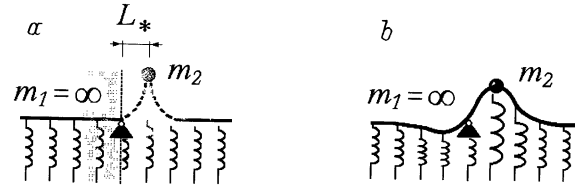


Рис. 2. Локализованные формы колебаний точечного инерционного включения в полубесконечном струнном волноводе (а) и в балочном волноводе с неподвижной шарнирной опорой (б). Форма а "исчезает" при меньшем, чем L_* , расстоянии между включением и границей волновода.

инерционными включениями, для которого не соблюдается условие вещественности и положительности квадрата частоты собственных колебаний. При этом соответствующий спектр собственных частот переходит в комплексную область, нарушаются критерии существования локализованных незатухающих колебаний, отвечающих этому собственному значению, и данная локализационная мода колебаний исчезает (рис. 1, б и 2, а).

Однако обобщение необходимых условий возникновения подобного явления требует более детального анализа. Аналогичные исследования для балки Бернулли–Эйлера, как следует из представленных выше результатов, при данном типе включения не предсказывают механизма ухода ω_{II} за частоту отсечки с уменьшением расстояния между массами или расстояния до неподвижной опоры (рис. 2, б).

Взаимодействие струнного и балочного волноводов с твердым телом при безмоментном двухточечном контакте

Обратимся к безмоментному взаимодействию рассматриваемых упругих линий с одиночным твердым телом. Напомним, что положение твердого тела задается положением его центра масс и углом поворота вокруг соответствующей оси. Для твердотельного включения при безмоментном симметричном контакте с упругой линией условия (2) заменяются условиями

$$m\omega^2 W_0 = N_1 + N_2, \quad J\omega^2 \Psi_0 = -\frac{L}{2} N_1 + \frac{L}{2} N_2,$$

$$w(0) = W_0 - \frac{L\Psi_0}{2}, \quad w(L) = W_0 + \frac{L\Psi_0}{2}. \quad (11)$$

Последние приводят к следующим уравнениям для частот, отвечающих симметричной (индекс I) и антисимметричной (индекс II) формам колебаний упругой линии

струна:
$$\frac{m\omega_I^2(1 + e^{-\lambda_I L})}{4\lambda_I \rho c^2} = 1, \quad \frac{J\omega_{II}^2(1 - e^{-\lambda_{II} L})}{\lambda_{II} \rho c^2 L^2} = 1,$$

$$\text{балка: } \frac{m\omega_1^2(1 + e^{-\lambda_1 L}(\cos \lambda_1 L + \sin \lambda_1 L))}{16\lambda_1^3 \rho \beta^4} = 1,$$

$$\frac{J\omega_{II}^2(1 - e^{-\lambda_{II} L}(\sin \lambda_{II} L + \cos \lambda_{II} L))}{4\lambda_{II}^3 \rho \beta^4 L^2} = 1. \quad (12)$$

Локализованные формы колебаний струны с закрепленным на ней твердым телом представлены на рис. 3, а. Аналогичные формы колебаний балки приведены на рис. 3, с, d.

Устремим $m \rightarrow \infty$ и перейдем в (12) к соответствующему пределу. Соотношения

$$\text{струна: } \omega_1^2 = 0, \quad \frac{J\omega_{II}^2(1 - e^{-\lambda_{II} L})}{\lambda_{II} \rho c^2 L^2} = 1,$$

$$\text{балка: } \omega_1^2 = 0,$$

$$\frac{J\omega_{II}^2(1 - e^{-\lambda_{II} L}(\sin \lambda_{II} L + \cos \lambda_{II} L))}{4\lambda_{II}^3 \rho \beta^4 L^2} = 1 \quad (13)$$

дают частотные уравнения в задаче о твердом теле с закрепленным центром масс и двумя точками контакта с упругой линией. Устремив в (12) $J \rightarrow \infty$, получим соотношения

$$\text{струна: } \frac{m\omega_1^2(1 + e^{-\lambda_1 L})}{4\lambda_1 \rho c^2} = 1, \quad \omega_{II}^2 = 0,$$

$$\text{балка: } \frac{m\omega_1^2(1 + e^{-\lambda_1 L}(\cos \lambda_1 L + \sin \lambda_1 L))}{16\lambda_1^3 \rho \beta^4} = 1,$$

$$\omega_{II}^2 = 0, \quad (14)$$

представляющие собой частотные уравнения для задачи о колебаниях твердого тела, которому запрещены повороты и которое безмоментным образом взаимодействует с упругой линией в двух точках.

Устремив $m \rightarrow \infty$ и $J \rightarrow \infty$ одновременно и перейдя в (12) к соответствующему пределу, и для струны, и для

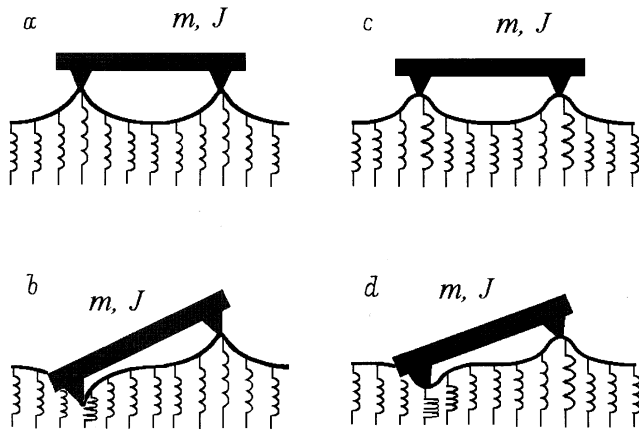


Рис. 3. Симметричная и антисимметричная локализованные формы колебаний в струнном (а, b) и в балочном (с, d) волноводах при безмоментном контакте с включением в виде твердого тела. Форма b является "исчезающей".

балки получим $\omega_1^2 = 0$, $\omega_{II}^2 = 0$, т.е. хорошо известный результат, показывающий, что у рассматриваемых струнной и балочной систем с двумя неподвижными шарнирными опорами нет лежащих ниже частоты отсечки дискретных спектров частот поперечных колебаний.

Устремим $L \rightarrow 0$ и перейдем в (12) к предельным уравнениям

$$\text{струна: } \frac{m\omega_1^2}{2\rho c \sqrt{\omega_b^2 - \omega_1^2}} = 1, \quad \frac{J\omega_{II}^2}{\rho c^2 L} = 1,$$

$$\text{балка: } \frac{m\omega_1^2}{2\sqrt{2} \rho \beta (\omega_b^2 - \omega_1^2)^{3/4}} = 1,$$

$$\frac{J\omega_{II}^2}{2\rho \beta^2 L \sqrt{\omega_b^2 - \omega_{II}^2}} = 1. \quad (15)$$

Таким образом, здесь также не наблюдается у балки, но обнаруживается у струны предельное (в данном случае максимальное) расстояние между точками контакта, увеличение которого приводит к описанному выше механизму исчезновения более высокой частоты локализованных колебаний у струнной системы с двухэлементным чисто массовым включением

$$\omega_b^2 > \omega_{II}^2 \approx \frac{\rho c^2 L}{J}, \quad \implies L_{**} \approx \frac{J\omega_b^2}{\rho c^2}. \quad (16)$$

Как выше продемонстрировано, наличие эффекта исчезновения или сохранения более высокого из ловушечных спектров самым непосредственным образом зависит от типа упруго-инерционного континуума. Оно также не является простым следствием увеличения числа степеней свободы одиночного включения или изменением типа контакта упругой линии и включения.

В качестве иллюстрации последнего тезиса приводим выражения для ловушечных спектров свободных колебаний балочной системы с чисто инерционным включением, имеющим две собственные степени свободы и моментный контакт с балкой Бернулли–Эйлера. Это — дискретные спектры свободных колебаний системы, состоящей из твердого тела, закрепленного в точке, совпадающей с его центром масс, на лежащей на винклеровском основании балке Бернулли–Эйлера

$$\frac{\beta^3 m \omega_1^2}{\sqrt{2} \rho (\omega_b^2 - \omega_1^2)^{3/4}} = 1, \quad \frac{\beta J \omega_{II}^2}{2\sqrt{2} \rho (\omega_b^2 - \omega_{II}^2)^{1/4}} = 1. \quad (17)$$

Формы свободных колебаний, отвечающие данным частотам, показаны на рис. 4, а–с.

Положив в (17) массу $m = \infty$, получим частотное уравнение для задачи о колебаниях бесконечной балки, шарнирно закрепленной в точке с координатой $s = 0$, где также помещен центр масс взаимодействующего с волноводом абсолютно твердого тела с моментом инерции J

$$\omega_1^2 = 0, \quad \omega_{II}^2 = \frac{2\sqrt{2} \rho (\omega_b^2 - \omega_{II}^2)^{1/4}}{J\beta}. \quad (18)$$

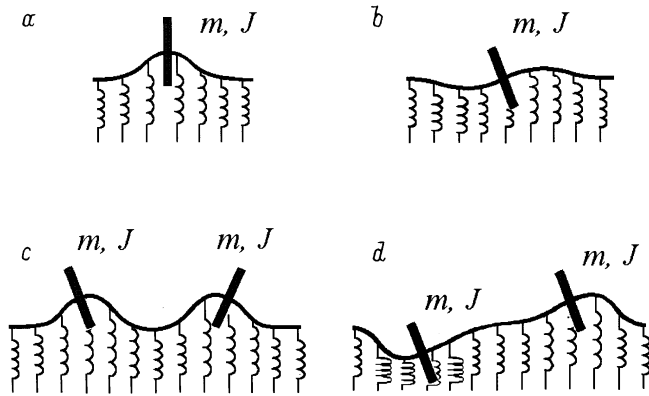


Рис. 4. Симметричная и антисимметричная локализованные формы колебаний в балочном волноводе при точечном моментном контакте с одноэлементным твердотельным включением (a, b) и при точечном моментном контакте с двухэлементным твердотельным включением (c, d).

Положив в (17) момент инерции $J = \infty$, получим частотное уравнение для задачи о колебаниях бесконечной балки, имеющей в точке с координатой $s = 0$ опору в виде инерционной скользящей заделки с массой m ,

$$\omega_1^2 = \frac{2\sqrt{2}\rho(\omega_b^2 - \omega_1^2)^{3/4}}{m\beta^3}, \quad \omega_{II}^2 = 0. \quad (19)$$

Легко заметить, что здесь ни в одной из ситуаций обнаруженного ранее для струны исчезновения локализованной моды колебаний не происходит.

Взаимодействие балочного волновода с двумя твердыми телами при моментном точечном контакте каждого тела с упруго-инерционным континуумом

Для выявления интересующего эффекта в балочной бесконечной системе рассмотрим задачу об определении частот стационарных колебаний лежащей на винклеровском основании балки, имеющей точечный моментный контакт с двойным твердотельным включением. Частоты рассматриваемых колебаний будем предполагать меньшими, чем частота отсечки ω_b . При ее постановке разобьем бесконечную область, занимаемую упругой линией на три участка: левее обоих твердотельных включений, между ними и правее обоих включений. Для каждого из участков записывается уравнение упругой линии и краевые условия

$$w^{IV} + 4\lambda^4 w = 0, \quad \lambda^4 = \frac{\omega_b^2 - \omega^2}{4\beta^4} > 0, \\ w(0) = W_1, \quad w(L) = W_2, \\ w'(0) = \Psi_1, \quad w'(L) = \Psi_2, \quad (20)$$

а также условия сшивания решений на всех участках

$$m_1\omega^2 W_1 = \rho\beta^4 w_+'''(0) - \rho\beta^4 w_-'''(0), \\ J_1\omega^2 \Psi_1 = -\rho\beta^4 w_+''(0) + \rho\beta^4 w_-''(0), \\ m_2\omega^2 W_2 = \rho\beta^4 w_+'''(L) - \rho\beta^4 w_-'''(L), \\ J_2\omega^2 \Psi_2 = -\rho\beta^4 w_+''(L) + \rho\beta^4 w_-''(L). \quad (21)$$

Ограниченное на бесконечности и локализованное в области контакта с двухэлементным включением решение задачи (20), (21) можно записать следующим образом:

$$w(s) = \begin{cases} \frac{e^{\lambda s}}{4\lambda^3\beta^4}(A_1 \cos \lambda s + D_1 \sin \lambda s), & -\infty < s \leq 0; \\ \frac{e^{-\lambda s}}{4\lambda^3\beta^4}(P \cos \lambda s + Q \sin \lambda s) + \\ + \frac{e^{\lambda(s-L)}}{4\lambda^3\beta^4}(H \cos \lambda(s-L) + K \sin \lambda(s-L)), & 0 \leq s \leq L; \\ \frac{e^{-\lambda(s-L)}}{4\lambda^3\beta^4}(B_2 \cos \lambda(s-L) + S_2 \sin \lambda(s-L)), & L \leq s < \infty, \end{cases} \quad (22)$$

где $A_1, D_1, P, Q, H, K, B_2, S_2$ — константы.

Выполнение условий сшивки дает систему уравнений

$$\frac{m_1\omega^2 W_1}{2\rho\beta^4} = P, \quad \frac{m_2\omega^2 W_2}{2\rho\beta^4} = H, \\ \frac{\lambda J_1\omega^2 \Psi_1}{\rho\beta^4} = -P + Q, \quad \frac{\lambda J_2\omega^2 \Psi_2}{\rho\beta^4} = H + K. \quad (23)$$

Рассмотрим такое двухэлементное включение, у которого оба твердых тела одинаковы. Это дает возможность независимо искать частоты, отвечающие симметричным формам колебаний, и частоты антисимметричных колебаний. В свете изучаемой возможности исчезновения локализованных форм при уменьшении расстояния между отдельными элементами включения наиболее интересным оказывается поведение этих спектров при $L \rightarrow 0$.

Для отыскания частоты, отвечающих симметричным формам колебаний системы, надо положить $W_1 = W_2 = W_s, \Psi_1 = -\Psi_2 = \Psi_s$. В этом случае при $L \rightarrow 0$ система (23) дает

$$\lambda L \left(\frac{m\omega^2}{4\lambda^3\rho\beta^4} - 1 \right) \lambda W_s + \Psi_s = 0, \\ \lambda L \lambda W_s + \left(\frac{LJ\omega^2}{2\rho\beta^4} - 1 \right) \Psi_s = 0. \quad (24)$$

Частоты симметричных форм свободных колебаний балочного волновода с двумя твердотельными включениями, полученные из условия существования нетривиального решения системы (24), таковы:

$$\omega_{sI}^2 = 0, \quad \omega_{sII}^2 = \frac{2\rho\beta^4}{JL} + \frac{4\lambda_{sII}^3\rho\beta^4}{m}. \quad (25)$$

Симметричные формы колебаний имеют очертания, показанные на рис. 4, с.

Обращает на себя внимание присутствие среди корней характеристического уравнения нулевой частоты. Как известно, нулевой частоте отвечает движение системы как жесткого целого. Однако в рассматриваемой системе бесконечной протяженности неограниченные смещения ее инерционных включений невозможны, так как этому препятствует винклеровское основание. Кажущееся противоречие возникло в результате вычисления частот на основе предельных уравнений, получаемых из (23) при $L \rightarrow 0$. Более точные вычисления дают для ω_{s1}^2 частотное уравнение, совпадающее с первым уравнением в (17). Соответствующая данной частоте форма колебаний системы принимает очертания, близкие к показанным на рис. 4, а.

Поиск частот, отвечающих антисимметричным формам, требует положить $W_1 = -W_2 = W_a$, $\Psi_1 = \Psi_2 = \Psi_a$. При $L \rightarrow 0$ система (23) дает

$$\begin{aligned} \left(\frac{L^2 m \omega^2}{8 \lambda \rho \beta^4} - 1 \right) 2 \lambda W_a - \lambda L \Psi_a &= 0, \\ -2 \lambda W_a + \left(\frac{L J \omega^2}{2 \rho \beta^4} - 1 \right) \lambda L \Psi_a &= 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Частоты антисимметричных форм свободных колебаний балочного волновода с двумя твердотельными включениями следующие:

$$\omega_{a1}^2 = 0, \quad \omega_{a11}^2 = \frac{2 \rho \beta^4}{J L} + \frac{8 \lambda_{a11} \rho \beta^4}{m L^2}. \quad (27)$$

Соответствующие антисимметричные формы представлены на рис. 4, d. Как и в ситуации со спектром симметричных колебаний, здесь имеется нулевая собственная частота. Отвечающая ей форма есть вращение обоих инерционных элементов включения с одинаковыми и постоянными угловыми скоростями. Причины ее появления те же, что и в предыдущем случае. Точные вычисления дают для ω_{a1}^2 частотное уравнение, совпадающее со вторым уравнением в (17). При этом получается форма, очертания которой близки к представленным на рис. 4, b.

Обеим нулевым частотам может быть дана достаточно важная в физическом отношении интерпретация: при уменьшении расстояния между включениями приближенные частотные уравнения перестают "чувствовать" наличие винклеровского основания. В этой ситуации приближенные уравнения системы могут предсказать наличие у системы движений, характерных для системы, являющейся жестким целым.

Что касается высокочастотных составляющих ловушечных спектров, то приближенные частотные уравнения (25) и (27) дают для них одну и ту же оценку расстояния между твердыми телами, при котором эти спектры "исчезают", уходя за частоту отсечки,

$$L_* \approx \frac{2 \rho \beta^4}{J \omega_b^2}. \quad (28)$$

Рассмотрим теперь предельный случай, отвечающий взаимодействию тела с полубесконечной балкой, начало которой неподвижно зашпелено. Для этого устремим и массу, и момент инерции тела, закрепленного в точке $s = 0$ к бесконечности. Тогда надо положить $W_1 = 0$, $\Psi_1 = 0$. В этом случае частотное уравнение, получаемое из (23) при $L \rightarrow \infty$, дает все тот же эффект "растворения" верхней частоты дискретного спектра за частотой отсечки

$$\omega_I^2 = \frac{\rho \beta^2 \sqrt{\omega_b^2 - \omega_I^2}}{m_2 L_b}, \quad \omega_{II}^2 = \frac{\rho \beta^4}{J_2 L_b}. \quad (29)$$

С помощью системы (23) можно получить спектры частот локализованных свободных колебаний для следующих задач о двух посаженных на балку телах: когда центры масс обоих тел неподвижны; когда каждому телу запрещены повороты; когда центр масс одного тела неподвижен, а второму телу запрещены повороты, и т.д. Исчезновение локализованных мод колебаний балочного волновода в этих задачах также имеет место. Дело в том, что для этого достаточно, чтобы по меньшей мере один из двух инерционных элементов двухэлементного инерционного включения, взаимодействующего с балкой Бернулли–Эйлера, обладал бы инерционными свойствами твердого тела, а взаимодействие балки с твердотельным включением носило бы моментный характер.

Обсуждение

Рассмотренные в работе струнные и балочные волноводы являются частными математическими моделями. Однако в какой-то степени приближения они все-таки отражают те свойства реальных объектов, которые могут быть обнаружены (или не обнаружены) в процессе эксплуатации или экспериментальных исследований. Эффект исчезновения одного из дискретных спектров при варьировании параметров инерционного включения представляется достаточно любопытным с этой точки зрения. Так как собственные частоты линейной системы оказываются резонансными при наличии внешнего гармонического воздействия на систему, данный эффект может быть использован для выявления деталей внутреннего строения континуальной системы с массивными инерционными включениями. В частности, экспериментальное обнаружение данного эффекта уже свидетельствует о существовании дискретно-континуальном строении объекта. Однако такое утверждение требует конкретизации и детализации относительно его континуальных элементов, относительно дискретных включений и относительно характера взаимодействия между ними. Если об одном из них какая-либо информация уже получена, эффект исчезновения или появления ловушечной моды можно использовать для выяснения свойств остальных составляющих. Как видно из вышеизложенных результатов, только весьма специальным образом согласованное со свойствами всех трех типов элементов сложных

систем, состоящих из упруго-инерционного континуума, безынерционного упругого континуума и чисто инерционных включений, варьирование геометрических и инерционных параметров включения, обеспечивает "потерю" или "приобретение" новой ловушечной резонансной частоты. Ссылаясь на [1–3], можно говорить о том, что в первом случае должно иметь место "перекачивание" энергии источника возмущений из окрестности включения в упруго-инерционный континуум, во втором — сохранение ее в локализованной окрестности источника.

На примере самых простых механических моделей продемонстрирована ситуация, когда спектры двух весьма похожих друг на друга упругих систем могут вести себя принципиально различным в качественном отношении образом при одинаковом варьировании какой-то части параметров обеих систем. Причем качественное различие, указывающее на принципиальную разницу во внутренних свойствах объектов, наблюдается лишь в достаточно узком диапазоне частот. Особое значение это приобретает для систем, где варьирование возникает естественным образом, т.е. параметры системы обязательно меняются на ее рабочих режимах. В частности, речь может идти об использовании имеющейся информации при исследовании транспортных задач. Действительно, приближение рельсового экипажа к той или иной неоднородности железнодорожного пути, например к мосту, путепроводу или стрелочному переводу, обуславливает такую совместную динамику пути и подвижного состава, теоретическое исследование которой с неизбежностью приводит к решению задач, аналогичных тем, которые рассмотрены в данной работе. Очевидно, многие из этих задач еще более сложны из-за необходимости учета непрерывного изменения расстояния между включениями и по этой причине недоступны для полноценного аналитического исследования. В этих условиях возрастает роль тестовых задач, позволяющих предсказать качественные стороны ожидаемого результата, помогающие правильно их интерпретировать.

Аналитические методы здесь удастся использовать только для одномерных упруго-инерционных (струна, балка) и безынерционных (винклеровское основание) континуумов с всего лишь двухэлементными включениями. В этих случаях действительно удастся построить аналитические решения ряда однотипных задач для каждой из упругих линий и сравнить их. Это — достаточно редкое исключение. На наш взгляд, основное значение этих результатов состоит в том, что они помогают понять природу механизмов аналогичных явлений в двумерных и трехмерных континуумах со сложной структурой, например в верхнем строении железнодорожного пути или в кристаллах, где на подобное построение аналитического решения содержательной модельной задачи особенно рассчитывать не приходится.

Список литературы

- [1] *Бабешко В.А., Глушков Б.В., Винченко Н.Ф.* Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 332 с.
- [2] *Абрамян А.К., Андреев В.Л., Индейцев Д.А.* // Моделирование в механике. 1992. Т. 6. С. 34.
- [3] *Абрамян А.К., Алексеев В.В., Индейцев Д.А.* // ЖТФ. 1998. Т. 68. Вып. 3. С. 15–19.
- [4] *Денисов Г.Г., Кугушева Е.К., Новиков В.В.* // ПММ. 1985. Т. 49. № 4. С. 691–696.
- [5] *Шахуняц Г.М.* Железнодорожный путь. 3-е изд. М.: Транспорт, 1987. 479 с.
- [6] *Бриллюэн Л., Пароди М.* Распространение волн в периодических структурах. М.: ИЛ, 1959. 457 с.