

01;07

## Аналоги эффекта Брюстера и полного внутреннего отражения для цилиндрических волн

© М.А. Калитеевский, В.В. Николаев

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,  
194021 Санкт-Петербург, Россия

(Поступило в Редакцию 6 июля 1999 г.)

Исследованы аналоги эффекта Брюстера и полного внутреннего отражения для цилиндрических волн, проходящих сквозь цилиндрическую границу двух сред. Установлено, что в случае цилиндрической геометрии эффект Брюстера также имеет место, однако проявляется тем слабее, чем меньше угловой момент цилиндрической волны. Исследовано отражение волн от цилиндрической границы малого радиуса. Получены асимптотические выражения для коэффициента отражения цилиндрической волны при стремлении радиуса границы к нулю. Установлено, что при уменьшении радиуса границы коэффициент отражения цилиндрической волны с ненулевым угловым моментом стремится к единице, всегда оставаясь меньше ее.

### Введение

Падение плоской световой волны на плоскую границу раздела двух сред с показателями преломления  $n_1$  и  $n_2$  является, вероятно, наиболее детально исследованным физическим явлением [1,2]. Эффект Брюстера (т.е. точное равенство нулю коэффициента отражения  $p$ -поляризованной волны, падающей под углом  $\theta_{BR}$ , удовлетворяющим соотношению  $\text{tg } \theta_{BR} = n_2/n_1$ ) и эффект полного внутреннего отражения (т.е. точное равенство коэффициента отражения единице, когда  $n_1 > n_2$ , а угол падения превосходит критическое значение  $\theta_{tot}$ , определяемое выражением  $\sin \theta_{tot} = n_2/n_1$ ) широко используются в технике. В последние годы делаются попытки использовать цилиндрические системы для создания различных оптоэлектронных устройств [3,4]. Ряд теоретических работ был посвящен изучению распространения цилиндрических волн в слоистых цилиндрических структурах и через цилиндрическую границу двух сред [5–7]. Однако некоторые интересные особенности, например увеличение коэффициента отражения при малом радиусе границы, и зависимость оптических свойств от поляризации света требуют более детального изучения, чему и посвящена данная работа.

### Результаты и обсуждение

Рассмотрим падение цилиндрической световой волны частоты  $\omega$ , распространяющейся перпендикулярно оси симметрии системы  $z$ , на цилиндрическую границу раздела двух сред с показателями преломления  $n_1$  (внутренняя среда) и  $n_2$  (внешняя среда), бесконечно длинных в направлении оси симметрии структуры (рис. 1). Произвольно поляризованные цилиндрические волны можно разделить на волны, у которых либо электрический вектор  $\mathbf{E}$  параллелен оси симметрии (волна  $E$ -типа), либо магнитный вектор  $\mathbf{H}$  (волна  $H$ -типа) [7]. Амплитудный коэффициент отражения  $r_d$  (под которым мы понимаем отношение тангенциальных компонент электрического

поля в отраженной и падающей волнах) расходящейся  $E$ -поляризованной цилиндрической световой волны от цилиндрической границы радиуса  $\rho$  дается формулой [7]

$$r_d = \frac{n_2 C_{m2}^{(1)} - n_1 C_{m1}^{(1)}}{n_1 C_{m1}^{(2)} - n_2 C_{m2}^{(1)}}, \quad (1)$$

тогда как для  $H$ -поляризованной волны формулой

$$r_d = \frac{n_2/C_{m2}^{(1)} - n_1/C_{m1}^{(1)}}{n_1/C_{m1}^{(2)} - n_2/C_{m2}^{(1)}}, \quad (2)$$

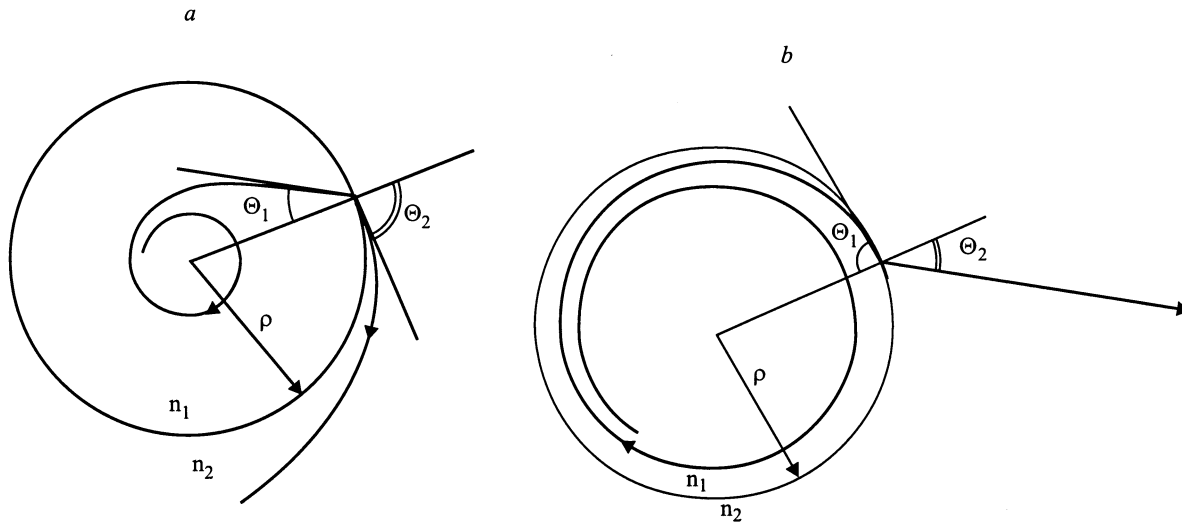
где  $C_{ml}^{(1,2)} = H_m^{(1,2)'}(n_l K \rho) / H_m^{(1,2)}(n_l K \rho)$ ,  $H_m^{(1,2)}(n_l K \rho)$  — функция Ханкеля,  $K = \omega/c$ ,  $c$  — скорость света, знак производной подразумевает дифференцирование по полному аргументу функции, а не только по  $\rho$ .

На рис. 2 и 3 показана зависимость фазы и квадрата модуля амплитудного коэффициента отражения расходящейся  $E$ -поляризованной цилиндрической волны от радиуса границы раздела сред с показателями преломления, равными 1.0 и 3.0. Три кривые на рисунках соответствуют значениям углового момента  $m = 0, 2$  и 5. Рис. 2 соответствует ситуации, когда оптически более плотной является внешняя среда, рис. 3 соответствует обратному чередованию слоев. На рис. 4 и 5 показаны соответствующие результаты для  $H$ -поляризованной волны.

В цилиндрической волне, в случае, когда угловой момент  $m = 0$ , вектор Пойтинга направлен радиально. Для ненулевых значений углового момента вектор Пойтинга образует с радиальным направлением угол  $\Theta$ , величина которого зависит от радиуса  $\rho$ , и удовлетворяет приближенному соотношению

$$\sin \Theta = m/nK\rho, \quad (3)$$

при этом азимутальная компонента вектора Пойтинга пропорциональна  $m/\rho$ . На малом участке границы раздела падение цилиндрической волны может быть уподоблено падению плоской волны на плоскую границу под



**Рис. 1.** Траектория переноса энергии в преломленной цилиндрической волне. *a* —  $n_1 = 3, n_2 = 1$ ; *b* —  $n_1 = 1, n_2 = 3$ . Радиус границы  $\rho = 0.55^*(2\pi/K), m = 5$ .

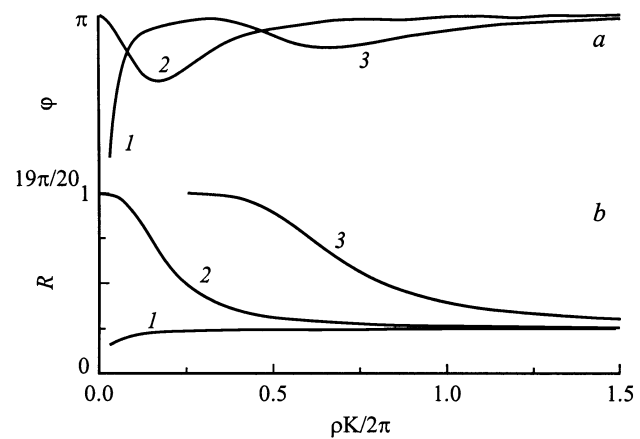
углом  $\Theta$ , что, как будет показано ниже, может приводить к качественно ошибочным результатам.

При больших значениях радиуса  $\rho$  азимутальная компонента вектора Пойтинга исчезает, угол  $\Theta$  стремится к нулю, т.е. падение цилиндрической волны на цилиндрическую границу большого радиуса аналогично нормальному падению плоской волны на плоскую границу раздела [7]. Действительно (рис. 2–5), при больших  $\rho$  квадрат модуля амплитудного коэффициента отражения стремится к 25%, а его фаза к нулю либо к  $\pi$  в зависимости от порядка чередования сред для обоих поляризаций света.

При уменьшении радиуса  $\rho$  величина угла  $\Theta$ , определяемая формулой (3), увеличивается и, в случае если  $n_1$  — показатель преломления внутренней среды, из которой падает свет, превосходит показатель преломления внешней среды  $n_2$ , и радиусом  $\rho$  (и соответственно углом  $\Theta$ ) достигает некоторых критических значений  $\rho_{tot}$  и  $\Theta_{tot}$ , должно наступить полное внутреннее отражение. Критическое значение радиуса  $\rho_{tot}$  определяется формулой  $K\rho_{tot} = m/n_2$ . В случае, когда  $n_1 < n_2$ , полное внутреннее отражение не должно наступать.

В противоречие с данным рассуждением вступают следующие свойства цилиндрических волн. Во-первых, используя формулу (1), можно показать (принимая во внимание, что  $C_{ml}^{(1)}$  есть комплексно-сопряженное к  $C_{ml}^{(2)}$ ), что энергетический коэффициент отражения не зависит от порядка чередования слоев, как для случая нормального падения плоской волны на плоскую границу раздела (рис. 2–5) [7]. Во-вторых, величина угла  $\Theta$  после перехода волной границы раздела, определяемая формулой (3), не зависит от показателя преломления слоя, из которого волна падает. Отметим, что, несмотря на это, углы  $\Theta$  по обе стороны границы раздела формально связаны законом Снеллиуса [1,2] (см. 3)).

На самом деле, при уменьшении радиуса границы раздела  $\rho$  энергетический коэффициент отражения волн с ненулевым угловым моментом  $m$  при достижении радиусом некоторой характерной величины, зависящей от  $m$ , начинает возрастать, асимптотически приближаясь к единице, но оставаясь меньше ее (см. рис. 2–5 и Приложение). Это явление было кратко описано в [5] и названо "полным отражением при малом радиусе", причем было указано, что амплитудный коэффициент отражения при малом (ненулевом!) радиусе принимает значение  $(-1)^{m+1}i$ . Согласно нашим расчетам, модуль коэффициента отражения, хотя и стремится к единице при приближении  $\rho$  к нулю, однако при любом ненуле-



**Рис. 2.** Зависимость фазы (*a*) и квадрата модуля (*b*) амплитудного коэффициента отражения расходящейся *E*-поляризованной цилиндрической волны от радиуса границы раздела двух сред. Значения углового момента  $m$ : 1 — 0; 2 — 2; 3 — 5;  $n_1 = 1, n_2 = 3$ .

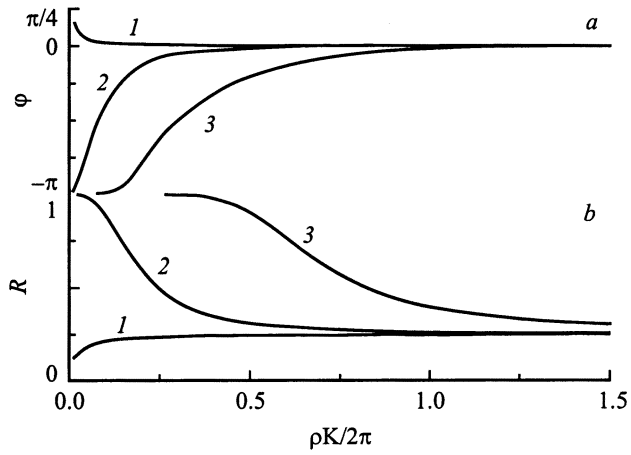


Рис. 3. То же, что на рис. 2, при  $n_1 = 3$ ,  $n_2 = 1$ .

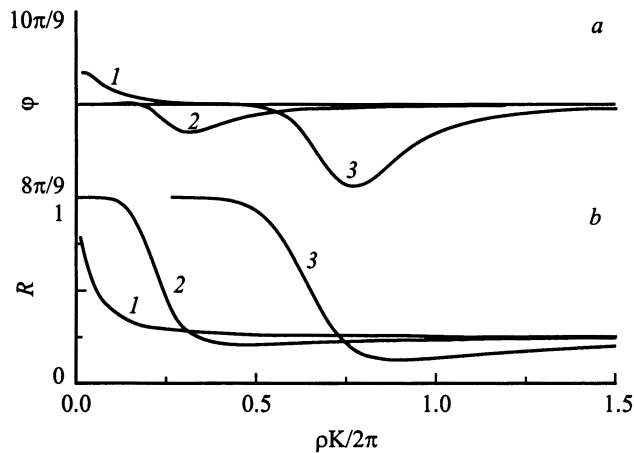


Рис. 4. То же, что на рис. 2, для  $H$ -поляризованной волны.

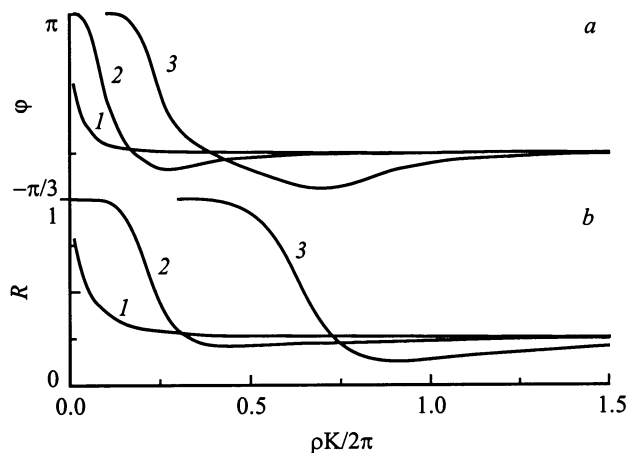


Рис. 5. То же, что на рис. 3, для  $H$ -поляризованной волны.

вом  $\rho$  остается меньше ее; фаза коэффициента отражения ведет себя совершенно другим образом, приближаясь к  $\pi$ . Малое отличие модуля коэффициента отражения от единицы может несильно изменить наблюдаемые оптиче-

ские свойства реальной цилиндрической системы, однако такая ошибка в учете фазы коэффициента отражения кардинально изменит расчетную структуру собственных оптических мод цилиндрической системы.

Таким образом, эффект полного внутреннего отражения не имеет места для цилиндрических волн, распространяющихся перпендикулярно оси симметрии системы,<sup>1</sup> что может быть пояснено с помощью простых физических аргументов. В "плоском" случае при полном внутреннем отражении свет через границу раздела входит в среду с меньшим показателем преломления, поворачивает и возвращается в среду с большим показателем преломления. В цилиндрическом случае этого не происходит, поскольку кривизна границы раздела больше, чем кривизна "траектории" света.

В случае  $H$ -поляризованных волн для каждого значения  $m$  можно подобрать такое значение радиуса границы  $\rho_{BR}$ , что угол  $\Theta$ , определяемый формулой (3), будет соответствовать углу Брюстера  $\Theta_{BR}$ . Легко получить, что такой "радиус Брюстера" удовлетворяет соотношению

$$K\rho_{BR} = m\sqrt{n_1^{-2} + n_2^{-2}}. \quad (4)$$

На рис. 4 и 5 можно видеть, что у зависимостей коэффициента отражения  $H$ -поляризованной волны от радиуса границы в случае, когда  $m \neq 0$ , имеются минимумы, положение которых близко к определяемым формулой (4). Это позволяет утверждать, что они являются проявлением эффекта Брюстера. Коэффициент отражения в минимуме не достигает нуля, но минимум для  $m = 5$  глубже, чем для  $m = 2$ . Это можно объяснить, принимая во внимание, что эффект Брюстера является следствием поперечности электромагнитных волн [1,2] и для цилиндрических волн, для которых поперечность вектора Пойтинга электрического и магнитного полей является локальным свойством, должен проявляться слабее. С увеличением углового момента  $m$  растет "радиус Брюстера", падает кривизна поверхности, ситуация становится более похожей на "плоскую" и минимум становится глубже.

Проведенный анализ показывает, что для цилиндрических систем имеет место эффект, аналогичный эффекту Брюстера, но вместо полного внутреннего отражения имеет место эффект увеличения коэффициента отражения при малом радиусе.

Авторы благодарят Российский фонд фундаментальных исследований и МНТП "Наноструктуры" за оказанную поддержку.

<sup>1</sup> Подчеркнем, что рассматриваемая здесь ситуация не имеет ничего общего с распространением света в оптическом волокне, где полное внутреннее отражение имеет место для света, распространяющегося вдоль оси симметрии структуры.

## Приложение

### Асимптотическое поведение коэффициента отражения при малом радиусе границы

Величина коэффициента отражения расходящейся *E*-поляризованной волны от границы сред 1 и 2 дается формулой

$$r = \frac{n_2 C_{m2}^{(1)} - n_1 C_{m1}^{(1)}}{n_1 C_{m1}^{(2)} - n_2 C_{m2}^{(1)}}.$$

Функции Ханкеля в выражении для  $C_m^{(1,2)}$  можно заменить комбинациями функций Бесселя  $J_m$  и Вебера  $Y_m$ , что при стремлении аргумента функций к нулю позволяет использовать приближенные выражения

$$C_m^{(1)} = \frac{J'_m + iY'_m}{J_m + iY_m} \cong \frac{Y'_m}{Y_m} + i \left( \frac{Y'_m J_m}{Y_m^2} - \frac{J'_m}{Y_m} \right) + \frac{J'_m J_m}{Y_m^2} - \frac{Y'_m J_m^2}{Y_m^3}, \quad (1\Pi)$$

$$C_m^{(2)} = \frac{J'_m - iY'_m}{J_m - iY_m} \cong \frac{Y'_m}{Y_m} - i \left( \frac{Y'_m J_m}{Y_m^2} - \frac{J'_m}{Y_m} \right) + \frac{J'_m J_m}{Y_m^2} - \frac{Y'_m J_m^2}{Y_m^3}, \quad (2\Pi)$$

так как при малых значениях аргумента функция Вебера стремится к бесконечности, тогда как функция Бесселя стремится к нулю (либо к единице для  $m = 0$ ). Выражение для  $C_m^{(1,2)}$  может быть записано в форме  $C_m^{(1,2)}(x) = F(x) + iG(x)$ . Для  $m = 0$   $F(x)$  и  $G(x)$  определяются выражениями

$$F(x) = \operatorname{Re} \left[ \frac{2i}{\pi + 2i(\ln(x/2) + \gamma)} \frac{1}{x} \right] + O(x), \quad (3\Pi)$$

$$G(x) = \operatorname{Im} \left[ \frac{2i}{\pi + 2i(\ln(x/2) + \gamma)} \frac{1}{x} \right] + O(x). \quad (4\Pi)$$

Для  $m = 1$

$$F(x) = -\frac{1}{x} - x \ln x + O(x), \quad (5\Pi)$$

$$G(x) = \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{4}(2 \ln(x/2) - 1 + 2\gamma)x^3 + O(x^5), \quad (6\Pi)$$

где  $\gamma$  — постоянная Эйлера.

Для  $m \geq 2$

$$F(x) = -m \left( \frac{1}{x} \right) + \frac{1}{2(m-1)}x + O(x^3). \quad (7\Pi)$$

$$G(x) = \frac{\pi}{(m-1)!2^{2m-1}}x^{2m-1} + O(x^{2m+1}). \quad (8\Pi)$$

Для *E*-поляризованной волны амплитудный коэффициент отражения может быть записан в форме:

$$r = -1 - i \frac{2n_1 G(n_1 K \rho)}{(n_1 F(n_1 K \rho) - n_2 F(n_2 K \rho))} + 2 \frac{\left( (n_1 G(n_1 K \rho))^2 + n_1 G(n_1 K \rho) * n_2 G(n_2 K \rho) \right)}{(n_2 F(n_2 K \rho) - n_1 F(n_1 K \rho))^2} + O \left( \left( \frac{G}{F} \right)^3 \right), \quad (9\Pi)$$

что при  $m = 0$  дает<sup>2</sup> для амплитудного коэффициента отражения  $r$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} (r) = \frac{i \ln(n_1/n_2)}{\pi - i \ln(n_1/n_2)} \quad (10\Pi)$$

и для энергетического коэффициента отражения  $R$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} (R) = \frac{\ln^2(n_2/n_1)}{\pi^2 + \ln^2(n_2/n_1)}. \quad (11\Pi)$$

При  $m = 1$

$$r = -1 + i \frac{\pi n_1^2}{(n_1^2 - n_2^2) \ln(K\rho)} + \frac{\pi^2 (n_1^4 + n_1^2 n_2^2)}{2(n_2^2 - n_1^2)^2 \ln^2(K\rho)} + O(K\rho) \quad (12\Pi)$$

и

$$R = 1 - \frac{\pi^2 n_1^2 n_2^2}{(n_2^2 - n_1^2)^2 \ln^2(K\rho)} + O((K\rho)^2). \quad (13\Pi)$$

При  $m \geq 2$

$$r = -1 + i \frac{\pi(m-1)n_1^{2m}}{(m-1)!2^{2m-3}(n_2^2 - n_1^2)} (K\rho)^{2m-2} + \frac{\pi^2(m-1)^2}{(m-1)!2^{4m-5}} \frac{(n_1^{4m} + n_1^{2m}n_2^{2m})}{(n_2^2 - n_1^2)^2} (K\rho)^{4m-4} + O((K\rho)^{6m-6}) \quad (14\Pi)$$

и

$$R = 1 - \frac{\pi^2(m-1)^2 n_1^{2m} n_2^{2m}}{(m-1)!2^{4m-6}(n_2^2 - n_1^2)^2} (K\rho)^{4m-4} + O((K\rho)^{8m-8}). \quad (15\Pi)$$

<sup>2</sup> Асимптотическое приближение для случая  $m = 0$  настолько громоздко, что вместо него легче использовать точную формулу (1).

Для  $H$ -поляризованной волны амплитудный коэффициент отражения может быть представлен в виде:

$$r = -1 - i \frac{2n_2^{-1}G(n_1k_0\rho)}{(n_1^{-1}F(n_1k_0\rho) - n_2^{-1}F(n_2k_0\rho))} + 2 \frac{\left( (n_2^{-1}G(n_1K\rho))^2 + n_1^{-1}G(n_1K\rho) * n_2^{-1}G(n_2K\rho) \right)}{(n_2^{-1}F(n_2K\rho) - n_1^{-1}F(n_1K\rho))^2} + O\left(\left(\frac{G}{F}\right)^2\right), \quad (16\Pi)$$

что при  $m = 0$  дает [9]

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} (r) = 1 \quad (17\Pi)$$

и

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} (R) = 1. \quad (18\Pi)$$

При  $m = 1$

$$r = -1 - i \frac{\pi n_1^3 n_2}{(n_2^2 - n_1^2)} (K\rho)^2 + \frac{\pi^2 n_1^4 n_2^2 (n_2^2 + n_1^2)}{2(n_2^2 - n_1^2)^2} (K\rho)^4 + O((K\rho)^6) \quad (19\Pi)$$

и

$$R = 1 - \frac{\pi^2 n_1^4 n_2^4}{(n_2^2 - n_1^2)^2} (K\rho)^4 + O((K\rho)^8). \quad (20\Pi)$$

При  $m \geq 2$

$$r = -1 - i \frac{\pi n_1^{2m+1} n_2}{(m-1)! 2^m 2^{2m-2} (n_2^2 - n_1^2)} (K\rho)^{2m} + \frac{\pi^2 (n_1^{4m} + n_1^{2m} n_2^{2m}) n_1^2 n_2^2}{(m-1)!^4 m^2 2^{4m-3} (n_2^2 - n_1^2)^2} (K\rho)^{4m} + O((K\rho)^6) \quad (21\Pi)$$

и

$$R = 1 - \frac{\pi^2 n_1^{2m+2} n_2^{2m+2}}{(m-1)!^4 m^2 2^{4m-4} (n_2^2 - n_1^2)^2} (K\rho)^{4m} + O((K\rho)^{8m}). \quad (22\Pi)$$

## Список литературы

- [1] Борн М., Вольф Е. Основы оптики. М.: Наука, 1970. 77 с.
- [2] Калитеевский Н.И. Волновая оптика. М.: Наука, 1971.
- [3] Egrogan T., Hall D.G. // J. Appl. Phys. 1990. Vol. 43. P. 2327–2333.
- [4] Libilloy D., Benisty H., Weisbuch C. et al. // Appl. Phys. Lett. 1998. Vol. 73. P. 1314–1322.
- [5] Jiang Yuan, Hacker Jill // Appl. Opt. 1994. Vol. 33. P. 7431–7442.
- [6] Tovar A.A., Clark G.H. // J. Opt. Soc. Am. A. 1997. Vol. 12. P. 3333–3340.
- [7] Николаев В.В., Калитеевский М.А., Соколовский Г.С. // ФТП. 1999. Т. 33. Вып. 2. С. 174–179.