

01;03

## О дроблении незаряженной капли в электростатическом поле

© С.И. Шукин, А.И. Григорьев

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,  
150000 Ярославль, Россия

(Поступило в Редакцию 10 марта 1999 г.)

В рамках принципа минимальности потенциальной энергии замкнутой системы при самопроизвольных виртуальных изменениях ее состояния проанализированы качественные закономерности распада незаряженной капли электропроводной жидкости в однородном внешнем электростатическом поле на две дочерние при сильных несфероидальных деформациях ее формы. Выяснилось, что обсуждаемый распад происходит с несимметричным распределением массы исходной капли между дочерними, которые оказываются устойчивыми по отношению к собственному заряду.

### Введение

Исследование особенностей реализации неустойчивости незаряженных капель и кластеров в интенсивных внешних электрических полях представляет интерес в связи с многочисленными приложениями в геофизике, жидкостной масс-спектрометрии, жидкометаллической эпитаксии и литографии [1–3]. В зависимости от величины и вида начальной деформации капли, ее размера, вязкости, электропроводности, интенсивности и степени неоднородности внешнего электрического поля реализация ее неустойчивости может идти по различным каналам [1–9].

Наиболее детально изученным является распад сильно заряженной капли маловязкой хорошо проводящей жидкости [1–4,6,9]. При таком распаде капля, несущая заряд, больший предельного в смысле устойчивости по отношению к поляризационному заряду, распадается, эмиттируя множество на два порядка более мелких сильно заряженных капелек. Заряженные и незаряженные капли сильно вязких или слабо проводящих жидкостей в интенсивных внешних электростатических полях могут распадаться на небольшое число фрагментов сравнимых размеров [1,5,10]. Второй из упомянутых каналов распада, реализующийся для весьма маленьких капелек любых жидкостей [3,11–13], до сих пор исследован недостаточно полно, хотя представляет значительный интерес в связи с многочисленными приложениями. Совсем не изучен распад во внешнем электрическом поле сильно деформированной несфероидальным образом капли, хотя отдельные экспериментальные работы по этому вопросу выполнены [14]. В этой связи будем решать на качественном уровне строгости задачу о делении во внешнем однородном электрическом поле при виртуальных несфероидальных деформациях незаряженной родительской капли на две дочерние по аналогии с тем, как это делалось в [10] в задаче о самопроизвольном распаде на две части при значительных сфероидальных деформациях заряженной капли.

1. Пусть сферическая капля идеально проводящей жидкости радиуса  $R$  с коэффициентом поверхностного

натяжения  $\alpha$  в однородном внешнем электрическом поле  $E_0$  распадается на две дочерние, как это показано на рис. 1, *a, b*. Считая, что дочерние капли, образовавшиеся после разрыва перемычки (длиной  $L$ ), имеют форму, близкую к сферической (с радиусами  $R_1$  и  $R_2$ ), и несут заряды  $-q$  и  $q$ , выпишем выражение для потенциальной энергии  $U_p$  сильно деформированной в соответствии с рис. 1, *b* родительской капли непосредственно перед распадом, вводя обозначения  $x = R_2/R_1$ ;  $z = L/R$

$$U_p = \frac{4\pi\alpha R^2(1+x^2)}{(1+x^3)^{2/3}} - \frac{qRE_0(1+x+z\sqrt[3]{1+x^3})}{\sqrt[3]{1+x^3}} - \frac{q^2\sqrt[3]{1+x^3}}{(1+x+z\sqrt[3]{1+x^3})R} + \frac{q^2\sqrt[3]{1+x^3}}{2R} \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2}E_0^2R^3 - \frac{R^3E_0^2x^3}{(1+x^3)(1+x+z\sqrt[3]{1+x^3})}. \quad (1)$$

Первое слагаемое в (1) определяет энергию сил поверхностного натяжения; второе — энергию диполя (состоящего из двух дочерних капель) с моментом  $q(R_1 + R_2 + L)$  в поле  $E_0$ ; третье — энергию взаимодействия двух точечных зарядов, находящихся на расстоянии  $(R_1 + R_2 + L)$  друг от друга в отсутствие внешнего поля; четвертое — собственную электростатическую энергию капель с радиусами  $R_1$  и  $R_2$ , несущих заряды  $q$  и  $-q$ ; пятое — энергию диполей, наведенных полем  $E_0$  в каждой из дочерних капель; шестое — энергию

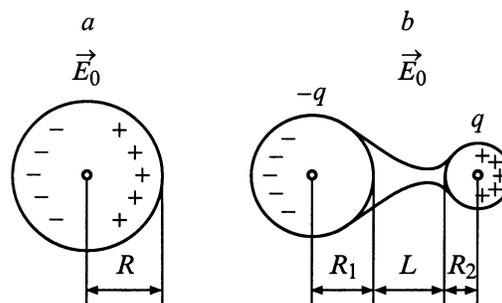


Рис. 1. Деформация капли при ее распаде на две части сравнимых размеров.

взаимодействия отстоящих друг от друга на расстоянии  $(R_1 + R_2 + L)$  диполей с моментами, равными дипольным моментам, наведенным полем  $E_0$  в сферических дочерних каплях.

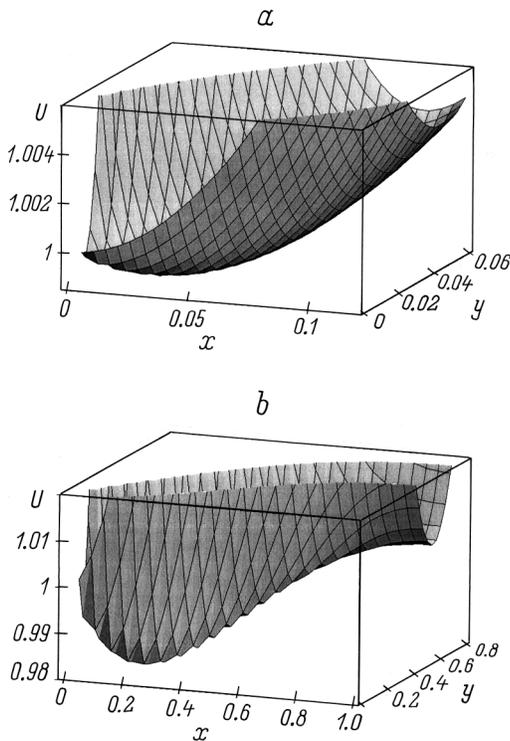
Обезразмерим  $U_p$  на полную потенциальную энергию исходной сферической капли в поле  $E_0$

$$U_s = 4\pi\alpha R^2 - \frac{1}{2}R^3 E_0^2$$

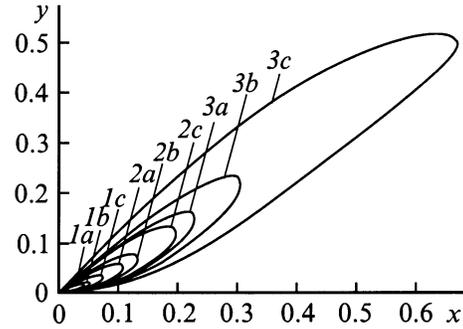
и перепишем (1) в виде

$$U = \left\{ \frac{1+x^2}{(1+x^3)^{2/3}} - \frac{(1+x+z\sqrt[3]{1+x^3})y}{\sqrt[3]{1+x^3}} \sqrt{\frac{w}{\pi}} - \sqrt[3]{1+x^3} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2x} - \frac{1}{(1+x+z\sqrt[3]{1+x^3})} \right) y^2 - \frac{w}{8\pi} - \frac{x^3 w}{4(1+x^3)(1+x+z\sqrt[3]{1+x^3})^3 \pi} \right\} \left( 1 - \frac{w}{8\pi} \right)^{-1}, \quad (2)$$

где  $w = E_0^2 R \alpha^{-1}$  — параметр Тэйлора исходной капли, характеризующий ее устойчивость по отношению к поляризованному заряду; капля претерпевает неустойчивость со сбросом поляризационного заряда путем эмиссии множества мелких сильно заряженных капелек при  $w \geq 2.62$  [2];  $y = q(4\pi\alpha R^3)^{-1/2}$  — безразмерный заряд дочерней капли.



**Рис. 2.** Зависимость полной потенциальной энергии разрушающейся капли  $U$  от отношения диаметров  $x$  и безразмерного заряда  $y$  дочерних капель:  $w = 0.8$  (а),  $2.4$  (б);  $z = 0.1$  (а),  $0.4$  (б).



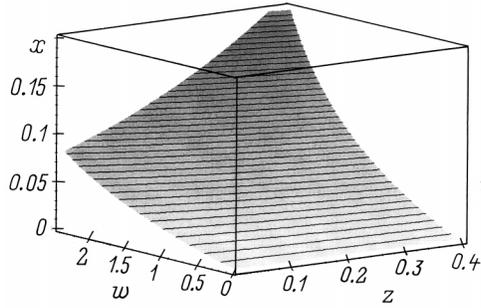
**Рис. 3.** Области возможных значений отношения размеров  $x$  и безразмерного заряда  $y$  образовавшихся капель.

Общий вид зависимости  $U = U(x, y)$  при  $w = \text{const}$ ,  $z = \text{const}$  проиллюстрирован рис. 2, а и б, из которого видно, что существуют такие комбинации  $w$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , при которых потенциальная энергия деформированной в соответствии с рис. 1 капли меньше потенциальной энергии исходной сферической капли  $U < 1$ . При таких комбинациях  $w$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $z$  энергия системы в конечном состоянии меньше энергии системы в начальном состоянии, а значит, возможен самопроизвольный виртуальный переход из начального состояния в конечное.

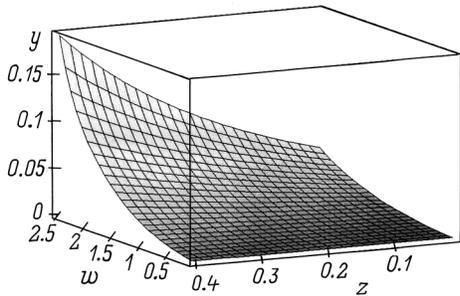
Приравнявая в (2) безразмерную энергию единице и решая уравнение  $U = 1$  при фиксированных  $z$  и  $w$ , можно определить геометрическое место значений параметров  $\{y, x\}$ , для которых полная потенциальная энергия системы из двух дочерних капель меньше потенциальной энергии родительской капли, т. е. когда деление родительской капли на две дочерние в соответствии с рис. 1 энергетически выгодно. На рис. 3 приведены зависимости  $y = y(x)$ , полученные при  $w = 0.8, 1.6$  и  $2.4$  (семейства кривых  $I$  — соответственно); индексы  $a, b$  и  $c$  в обозначениях кривых соответствуют значениям безразмерной длины перетяжки  $z = 0.1, 0.2$  и  $0.4$ . Области, ограниченные приведенными кривыми, являются областями возможных значений размеров и зарядов дочерних капель. Бросается в глаза, что, согласно рис. 3, при заданной рис. 1 исходной деформации родительской капли ее распад на две заряженные дочерние возможен при значениях параметра Тэйлора  $w$ , существенно меньших критического в смысле устойчивости капли к поляризованному заряду при чисто сфероидальных деформациях (равного  $2.62$  [2]). Это связано с тем, что распад родительской капли при ее деформации, заданной рис. 1, обеспечен выбором вида деформации и будет иметь место при сколь угодно малых зарядах  $q$  и полях  $E_0$ .

2. Как отмечалось выше, самопроизвольный распад капли в  $E_0$  происходит таким образом, чтобы энергия системы (которую принимаем замкнутой) в конечном состоянии (рис. 1, б) была минимальна по  $x$  и  $y$  при фиксированных  $w$  и  $z$ . Необходимые условия экстремальности имеют вид

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 0.$$



**Рис. 4.** Зависимость наиболее вероятного отношения размеров образовавшихся капель  $x$  от параметра Тэйлора исходной капли  $w$  и безразмерной длины перемычки  $z$ .



**Рис. 5.** Зависимость наиболее вероятного безразмерного заряда дочерней капли  $y$  от параметра Тэйлора исходной капли  $w$  и безразмерной длины перемычки  $z$ .

Это приводит к системе уравнения для нахождения отношения размеров  $x$  и зарядов  $y$ , соответствующих экстремальному состоянию,

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \left\{ \frac{3wx^2}{4\pi gh^3} \left( \frac{x^3}{g} + \frac{xr}{h} - 1 \right) + \frac{2x}{g^{2/3}} \left[ 1 - \frac{(1+x^2)x}{g} \right] - \frac{y}{2g^{1/3}} \sqrt{\frac{w}{\pi}} \left( r - \frac{hx^2}{g} \right) + \frac{x^2 y^2}{g^{2/3}} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2x} - \frac{1}{h} \right) + g^{1/3} \left( \frac{r}{h^2} - \frac{1}{2x^2} \right) y^2 \right\} \left( 1 - \frac{w}{8\pi} \right)^{-1} = 0; \quad (3)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \left\{ 2g^{1/3} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2x} - \frac{1}{h} \right) y - \frac{h}{2g^{1/3}} \sqrt{\frac{w}{\pi}} \right\} \times \left( 1 - \frac{w}{8\pi} \right)^{-1} = 0,$$

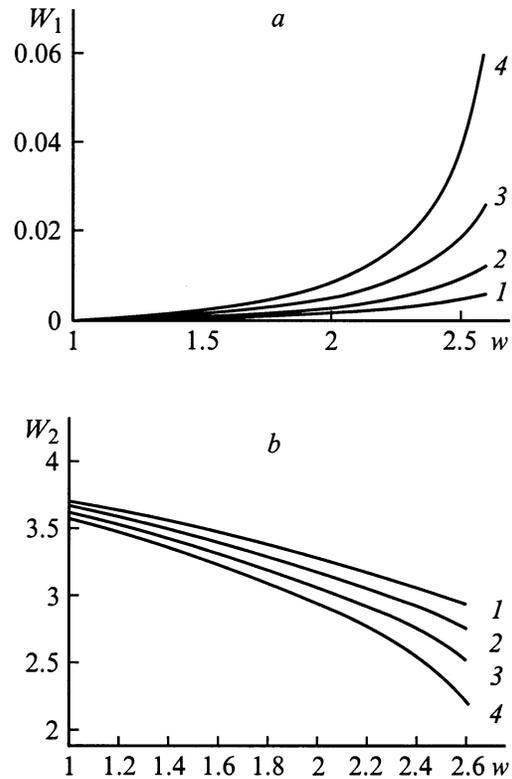
$$g \equiv 1 + x^3; \quad h \equiv 1 + x + zg^{1/3}; \quad r \equiv 1 + \frac{zx^2}{g^{2/3}}. \quad (4)$$

Решения системы уравнений (3), (4) приведены на рис. 4 и 5 в виде зависимостей  $x = x(w, z)$  и  $y = y(w, z)$ . Несложно видеть (см. также рис. 3), что в общем случае деление несимметрично в соответствии с данными экспериментов [14]. Видно, что зависимости  $x = x(w, z)$  и  $y = y(w, z)$  монотонны по  $z$  и по  $w$ . Рост параметра

Тэйлора  $w$  приводит к увеличению  $x$  и  $y$ , а также к проявлению тенденции к симметричному делению, т.е. к делению родительской капли на две дочерние близких размеров (рис. 3).

Зависимости параметров Рэлея большей ( $W_1 \equiv q^2/4\pi\alpha R_1^3$ ) и меньшей ( $W_2 \equiv q^2/4\pi\alpha R_2^3$ ) дочерних капель от исходного значения параметра Тэйлора  $w$ , полученные по (3), (4) численным расчетом, показаны на рис. 6, *a* и *b* соответственно. Кривые 1–4 соответствуют  $z = 0.1, 0.2, 0.3$  и  $0.4$ . Параметр Рэлея характеризует устойчивость капли по отношению к собственному заряду. Капля неустойчива при  $W \geq 4$  [3,15]. Из рис. 6 следует, что при рассматриваемом распаде незаряженной капли в сильном однородном электростатическом поле  $E_0$  обе дочерние капли устойчивы по отношению к собственному заряду, но меньшая из них весьма близка к состоянию неустойчивости и может претерпеть рэлеевский распад при достаточно большой виртуальной сфероидальной деформации, как отмечено в [3,16,17].

Следует отметить, что рассчитанные значения размеров  $x$  и зарядов  $y$  дочерних капель получены для заранее принятой в форме, приведенной на рис. 1, деформации, предшествующей разрыву родительской капли на две, соответствуют лишь экстремальной энергии системы и не связаны с самосогласованной эволюцией деформации капли в поле  $E_0$ , как это имеет место для тэйлоровского распада капли [11]. Источник создания исходной несфе-



**Рис. 6.** Зависимость параметра Рэлея дочерних капель от параметра Тэйлора  $w$  исходной капли: *a* — большая капля, *b* — меньшая.

роидальной деформации капли в виде рис. 1, *b* остается за рамками проведенного рассмотрения, равно как и механизм происхождения зарядов дочерних капелек, принимаемый поляризационным. Если в качестве источника для такой деформации предположить действие сторонних сил неэлектрической природы, то проведенное рассмотрение имеет смысл. Если же связывать наличие обусуждаемой деформации с полем  $E_0$ , то все рассмотрение становится некорректным, поскольку заряды дочерних капелек  $q$  должны стремиться к нулю при уменьшении до нуля напряженности внешнего поля  $E_0$ . В отличие от проведенного качественного рассмотрения ситуация с распадом сильно деформированной в соответствии с рис. 1 капли в слабом электрическом поле  $E_0$ , когда одна из капель много меньше другой, должна анализироваться с учетом взаимовлияния поляризационных зарядов, чтобы обеспечить физически корректный асимптотический переход зарядов дочерних капель  $q \rightarrow 0$  при  $E_0 \rightarrow 0$ .

## Заключение

В проведенном анализе выяснилось, что при сильных несфероидальных деформациях капли электропроводной жидкости в однородном внешнем электростатическом поле величина напряженности поля  $E_0$ , при которой капля распадается, может быть существенно ниже критической в смысле тэйлоровского распада сфероидально деформированной капли и зависит от выбора вида начальной несфероидальной деформации. Масса родительской капли делится между дочерними несимметричным образом, что согласуется с экспериментальными данными [14]. Однако по мере увеличения параметра Тэйлора  $w$  для исходной родительской капли и расстояния  $z$  между центрами дочерних капель в момент разрыва связывающей их перемычки проявляется тенденция к симметричному делению. Собственные заряды дочерних капелек не превышают критических в смысле устойчивости по Рэлею.

## Список литературы

- [1] *Mackay W.A.* // Proc. Roy. Soc. (London). 1931. Vol. 133. N A822. P. 565–587.
- [2] *Taylor G.* // Proc. Roy. Soc. A. 1964. Vol. 280. P. 565–587.
- [3] *Григорьев А.И., Синкевич О.А.* // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 6. С. 10–15.
- [4] *Elgin J.N.* // Phys. Lett. A. 1985. Vol. 110. P. 441–445.
- [5] *Sherwood J.D.* // J. Fluid Mech. 1988. Vol. 188. P. 133–146.
- [6] *Grigor'ev A.I., Shiryayeva S.O.* // J. Phys. D. 1991. Vol. 23. N 11. P. 1361–1370.
- [7] *Ширяева С.О., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 1992. Т. 62. Вып. 3. С. 35–39.
- [8] *Ширяева С.О., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 1992. Т. 62. Вып. 11. С. 49–56.
- [9] *Ширяева С.О., Григорьев А.И.* // ПЖТФ. 1992. Т. 29. Вып. 18. С. 87–92.
- [10] *Коромыслов В.А., Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // ЖТФ. 1998. Т. 68. Вып. 8. С. 31–38.
- [11] *Ширяева С.О., Григорьев А.И.* // ПЖТФ. 1995. Т. 21. Вып. 9. С. 67–71.
- [12] *Ширяева С.О., Григорьев О.А., Муничев М.И., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 1996. Т. 66. Вып. 10. С. 47–62.
- [13] *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Белоножко Д.Ф.* // ПЖТФ. 1997. Т. 23. Вып. 16. С. 32–37.
- [14] *Adam J.R., Lindblad N.R., Hendries C.D.* // J. Appl. Phys. 1968. Vol. 39. N 11. P. 5173–5180.
- [15] *Ryalegh (Lord Strett)* // Physl. Mag. 1882. Vol. 14. P. 182–186.
- [16] *Щукин С.И., Григорьев А.И.* // ПЖТФ. 1998. Т. 24. Вып. 7. С. 73–78.
- [17] *Щукин С.И., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 1998. Т. 68. Вып. 11. С. 48–51.