

Кросскорреляционный интеграл. Некоторые особенности и применение в задачах выявления нестационарностей во временных рядах

© И.В. Фельдштейн

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН,
125047 Москва, Россия

(Поступило в Редакцию 16 июня 1998 г. В окончательной редакции 7 декабря 1999 г.)

Предлагается обобщение понятия корреляционного интеграла, рассматриваются некоторые его свойства, вводится новая характеристика временного ряда, имеющая смысл размерности и характеризующая скорость заполнения аттрактора. Показано, что процедура вычисления кросскорреляционного интеграла аналогична wavelet-преобразованию плотности распределения точек на аттракторе. Рассматривается применение введенного понятия к задачам выявления нестационарности временных рядов, проводится его сравнение со статистическими методами.

Введение

Одним из базовых методов анализа временных рядов, получивших широкое распространение в последние 10–15 лет, является вычисление корреляционного интеграла [1]. На его основе были разработаны методы определения размерности вложения исследуемой системы, введено понятие корреляционной размерности, предложены процедуры, позволяющие отличить случайный шум от динамического хаоса, и многое другое. С его помощью анализировались данные самой различной природы: технические, медицинские, гидродинамические, астрофизические, финансовые и т.д. Однако наряду с задачами анализа отдельных систем и временных рядов, ими порожаемых, существует обширный класс задач, заключающихся в сравнении поведения двух разных систем или одной системы в разные моменты времени. Задачи последнего типа могут рассматриваться как выявление нестационарности.

В данной работе предлагается обобщение понятия корреляционного интеграла, рассматриваются некоторые его свойства, вводится новая характеристика временного ряда, имеющая смысл размерности и характеризующая скорость заполнения аттрактора. Рассматривается применение введенного понятия к задачам выявления нестационарности временных рядов, проводится его сравнение со статистическими методами.

1. Кросскорреляционный интеграл

В нелинейной динамике при анализе временных рядов широко используется корреляционный интеграл $C(r)$ [1]: если введено расстояние между фазовыми векторами y_i и $y_j - \rho(y_i, y_j)$, то $C(r)$ для временного ряда $\{y_i\}_N$, состоящего из N элементов, определяется следующим образом:

$$C(r) = \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N \Theta(r - \rho(y_i, y_j)),$$

где Θ — функция Хевисайда.

Если анализируется временной ряд скалярной переменной $\{x_i\}$, то ряд векторной переменной $\{y_i\}$ может быть получен методом Такенса [2]

$$y_j = (x_j, x_M, \dots, x_{j+(d-1)M})^T,$$

где d — размерность, M — величина задержки (см. также [3]).

Обобщим это понятие следующим образом. Пусть даны два векторных временных ряда, состоящих соответственно из n и m точек $\{y_i\}_n$ $\{z_i\}_m$, и введено расстояние $\rho(y_i, z_j)$. Кросскорреляционный интеграл $C^+(r)$

$$C_{y,z}^+(r) = \frac{1}{m \cdot n} \sum_{i,j=1}^{n,m} \Theta(r - \rho(y_i, z_j)) \quad (1)$$

(ясно, что $C_{y,y}^+(r) = C(r)$).

В дальнейшем будем рассматривать кросскорреляционный интеграл для участков одного временного ряда $\{x_i\}$, взятых со смещением. Соответствующие участки пронумеруем и C^+ для рядов, содержащих данные i -го и j -го участка, будем обозначать $C_{i,j}^+$. Наряду с кросскорреляционным интегралом $C_{i,j}^+$ удобно рассматривать следующие величины:

$$\Delta_{ij}(r) = \left| \ln C_{i,j}^+(r) - \ln C_{j,j}^+(r) \right|, \quad (2)$$

$$\delta_{ij} = \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \Delta_{ij}(r) dr, \quad (3)$$

отражающие изменение плотности распределения точек на аттракторе для i -го и j -го участков как с учетом масштаба, так и интегрально. Здесь r_{\max} — масштаб, соответствующий насыщению кросскорреляционного интеграла (порядка максимального размера аттрактора); r_{\min} — масштаб, соответствующий минимальному расстоянию между точками на аттракторе (для данной выборки) или для зашумленных данных амплитуде шума. Далее рассматривается случай $j = 1$, т.е. изменения по отношению к первому участку, и используются обозначения $\Delta_{i,1} = \Delta_i$, $\delta_{i,1} = \delta_i$.

2. Кросскорреляционный интеграл и wavelet-преобразование

Рассмотрим процедуру вычисления кросскорреляционного интеграла для двух одномерных случайных величин ξ_1 и ξ_2 с функциями распределения соответственно F_1 и F_2 . Тогда вблизи x в интервале dx содержится $p_1(x)dx$ элементов ξ_1 (где p_1 — плотность функции распределения). Количество элементов ξ_2 , находящихся на расстоянии от x , не превышающем r , составляет $F_2(x+r) - F_2(x-r)$. Таким образом, кросскорреляционный интеграл $C_{\xi_1 \xi_2}^+$ может быть выписан в следующей форме:

$$C_{\xi_1 \xi_2}^+(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_1(x) (F_2(x+r) - F_2(x-r)) dx.$$

Запишем далее кросскорреляционный интеграл для случайной величины ξ_1 и величины ξ_2 с измененной в a раз шириной функции распределения (например, для нормально распределенной случайной величины с измененной в a раз дисперсией)

$$C_{\xi_1 \xi_2}^+(r, a) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_1(x) \times \left(F_2 \left(\frac{x+r}{a} \right) - F_2 \left(\frac{x-r}{a} \right) \right) dx. \quad (4)$$

Выражение (4) аналогично wavelet-преобразованию плотности функции распределения p_1 [4]

$$S(r, a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} p_1(x) F \left(\frac{r-b}{a} \right) dx. \quad (5)$$

Отличие (4) от (5) заключается в "симметричности" (с точностью до знака) преобразования (4) по параметру r , а также в том, что обычно накладываемое на ядро преобразования F требование равенства нулю интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) dx = 0,$$

а иногда и моментов более высоких порядков

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k F(x) dx = 0$$

выполняется для (4) по отношению к члену, содержащемуся в скобках,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k \left(F_2 \left(\frac{x+r}{a} \right) - F_2 \left(\frac{x-r}{a} \right) \right) dx = 0$$

при любых r и a . Требование нормировки (множитель $1/\sqrt{a}$) является формальным и может быть включено в соотношение (4).

Интегрируя (4) по частям, легко получить свойство симметричности кросскорреляционного интеграла $C_{\xi_1 \xi_2}^+ = C_{\xi_2 \xi_1}^+$. Ясно также, что многомерный случай может быть проанализирован аналогично.

Связь процедуры вычисления кросскорреляционного интеграла с wavelet-преобразованием функций распределения может представлять интерес в тех случаях, когда недоступны временные ряды, генерируемые исследуемой системой, или получение функций распределения связано с меньшими экспериментальными трудностями.

3. Скорость заполнения аттрактора

Конечность временного ряда и его дискретность приводят к тому, что для кросскорреляционного интеграла, вычисленного по двум участкам стационарного ряда, величина δ , вычисляемая по (3), не равна нулю. Рассмотрим, как δ зависит от длины участков N , по которым оценивается C^+ . На рис. 1 приведены результаты такой оценки для систем Лоренца и Реслера. Видно, что зависимость носит степенной характер $\delta \sim N^{-d_{fr}}$. Величина d_{fr} (fr — fill rate) характеризует скорость заполнения аттрактора для данной системы при заданной точности (вычислений или измерений) и имеет смысл размерности (по построению). Видно, что при больших N кривая загибается вниз. Величина N^* , при которой происходит заметное отклонение от степенной зависимости, может рассматриваться как максимальная длина временного ряда, которую имеет смысл использовать в методах, связанных с анализом плотности точек на аттракторе (т.е. дальнейшее увеличение длины не будет давать существенного уточнения).

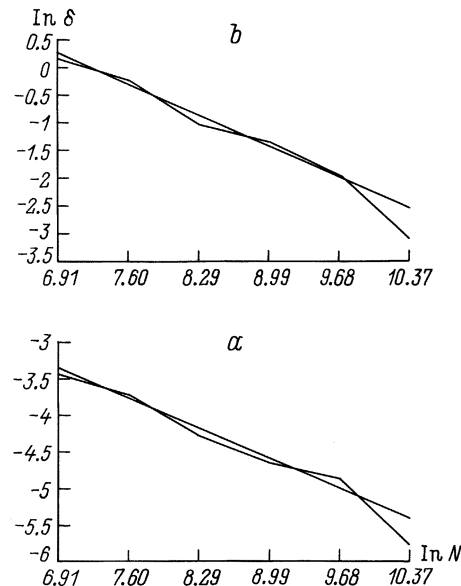


Рис. 1. Зависимость δ от длины выборки N и линейная аппроксимация: a — система Лоренца, b — система Реслера.

4. Выявление нестационарностей временных рядов

Вопрос о стационарности временного ряда (понимаемой, например, как независимость от времени параметров порождающей его системы) представляет большой интерес для ряда задач. В частности, стационарность является необходимым условием применимости многих алгоритмов нелинейной динамики, таких как оценка размерностей, ляпуновских показателей и др.

Рассмотрим далее применение кросскорреляционного интеграла к выявлению нестационарностей временных рядов. Проведем сравнение предлагаемой методики с традиционно используемыми в этих задачах статистическими методами.

а) Статистические методы в задачах выявления нестационарностей. Наиболее распространенными методами выявления нестационарностей являются методы математической статистики, позволяющие оценить вероятность того, что две выборки являются реализациями случайных процессов с разными функциями распределения (гипотеза H_1). Наиболее эффективным среди них является метод Колмогорова–Смирнова [5], заключающийся в следующем. Пусть даны две выборки, состоящие соответственно из m и n элементов $\{x_i^1\}_m$ и $\{x_i^2\}_n$,

$$F_1(a) = \frac{\nu_1(a)}{m}, \quad F_2(a) = \frac{\nu_2(a)}{n},$$

где $\nu_1(a)$, $\nu_2(a)$ — число элементов $\{x_i^j\}$, таких что $x_i^j < a$;

$$D_{m,n} = \max_a |F_1(a) - F_2(a)|.$$

Показано, что распределение величины $\sqrt{mn/(m+n)} D_{m,n}$ стремится к распределению, задаваемому следующим образом:

$$K(q) = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-2q^2 k^2}. \quad (6)$$

На рис. 2 приведена зависимость $K(q)$. Таким образом, для величины $\sqrt{mn/(m+n)} D_{m,n} = K^*$ определяется из (6) $K(q^*) = K^*$, вероятность q^* того, что гипотеза H_1

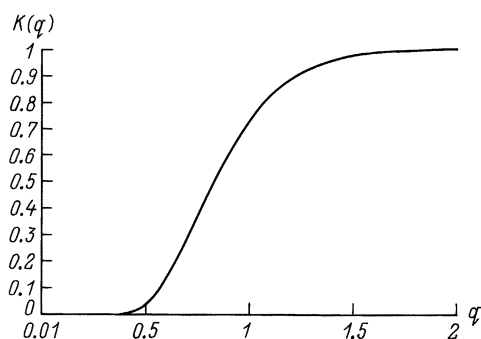


Рис. 2. Распределение Колмогорова–Смирнова $K(q)$.

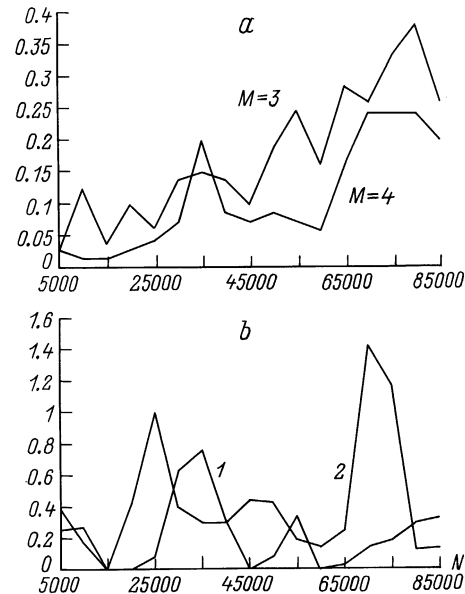


Рис. 3. $\sqrt{mn/(m+n)} D_{m,n}$ для системы R_1 при разных параметрах прорезивания (a) и для систем L_1 (1), L_2 (2) (b). По оси абсцисс — индекс начальной точки интервала, сравниваемого с первым.

верна. Метод Колмогорова–Смирнова применялся в задачах идентификации аттракторов (см., например, [6]) и показал высокую эффективность для целого ряда модельных систем. Однако в некоторых случаях он оказывается неприменим или применим отграниченно. Рассмотрим возможные трудности для следующих типов зависимости параметра системы r от времени

$$r = f_1(t) = r_{\min} + (r_{\max} - r_{\min}) \cdot t / T_{\max},$$

$$r = f_2(t) = \begin{cases} r_{\min} & 0.45 \cdot T_{\max} \leq t \leq 0.55 \cdot T_{\max}, \\ r_{\max} & t < 0.45 \cdot T_{\max}, \quad t > 0.55 \cdot T_{\max} \end{cases}$$

для следующих систем. 1) система Лоренца L_1

$$\dot{x} = \sigma(y - x), \quad \dot{y} = rx - y - xz, \quad \dot{z} = xy - bz$$

при $b = 8/3$, $\sigma = 10$, $r = f_1(t)$, $T_{\max} = 5000$ (выборка состоит из 100 000 точек с шагом по времени 0.05), $r_{\max} = 29$, $r_{\min} = 28$; 2) система Лоренца L_2 , $r = f_2(t)$, остальные параметры, как в пункте 1; 3) система Реслера R_1

$$\dot{x} = -(y + z), \quad \dot{y} = x + 0.2y, \quad \dot{z} = 0.2 + z(x - r),$$

$r = f_2(t)$, $T_{\max} = 50000$ (выборка состоит из 100 000 точек с шагом по времени 0.5). $r_{\max} = 4.30$, $r_{\min} = 4.23$; 4) система Реслера R_2 , $r = f_2(t)$, остальные параметры, как в пункте 3.

Стационарность оценивается из сравнения по методу Колмогорова–Смирнова выборок из последовательных 10 000 точек, взятых со сдвигом 5000, т.е. 1-я выборка содержит точки 1–10 000, 2-я — 5001–15 000, 3-я — 10 001–20 000 и т.д.

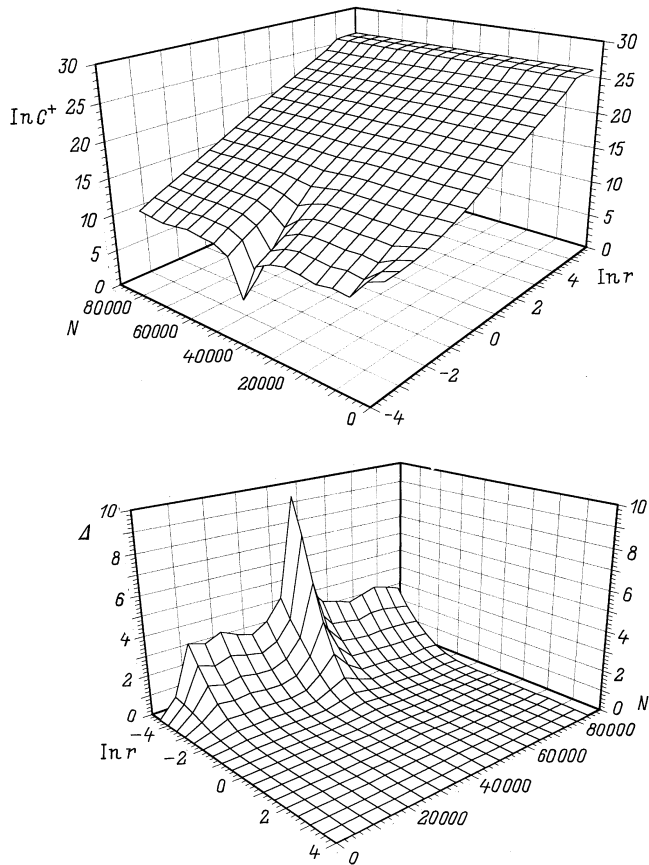


Рис. 4. $C_{i,1}^+$ и Δ_i для системы L_2 .

Для устранения внутренних корреляций исходный ряд $\{x_i\}$ "прореживается", т. е. берутся не все его элементы, а только каждый M -й: x_1, x_{M+1}, x_{2M+1} и т. д. Необходимость подобной процедуры, а также ее реализация подробно рассмотрены в [6].

На рис. 3, *a* приведены результаты оценок $\sqrt{mn/(m+n)} D_{m,n}$ для системы R_1 при параметре прореживания $M = 3$ и 4 (M выбирается из условия нуля автокорреляционного интеграла, который для системы Реслера при выбранном шаге по времени $\tau = 0.5$ при 3τ положителен, а при 4τ — отрицателен). Видно, что оценки различаются значительно, а поведение кривой не дает представления о характере изменения параметров системы. Ясно, что для формально заданной системы (например, как система обыкновенных дифференциальных уравнений) корреляционную длину можно оценить точнее, но для реальных данных это не так. Для системы Лоренца корреляционная длина T_{corr} , оцениваемая по компоненте x , чрезвычайно велика и прореживание с M соответствующим T_{corr} оставит слишком мало данных для оценки функций распределения. За параметр прореживания M можно условно принять величину порядка $1/4$ квазипериода (среднего расстояния между последовательными максимумами). Для рассматриваемых рядов это соответствует $M \sim 5$. На рис. 3, *b* приведена оценка

$\sqrt{mn/(m+n)} D_{m,n}$ для L_1 и L_2 (кривая 1 соответствует первому типу нестационарности, кривая 2 — второму). Видно, что результаты не отражают изменения параметра системы и могут указывать на его отличие в случаях, когда он совпадает для двух сравниваемых выборок.

Таким образом, подходы, основанные на методе Колмогорова–Смирнова, чувствительны, например, к параметру M . В [6] отмечается также чувствительность аналогичных методик идентификации аттракторов в случае системы Лоренца к начальным данным. В данной работе предлагается альтернативный подход, основанный на вводимом понятии кросскорреляционного интеграла.

б) Кросс корреляционный интеграл в задачах выявления нестационарностей. Далее рассматривается применение введенного понятия кросскорреляционного интеграла к выявлению нестационарностей в тех же системах, что рассматривались в разделе 4 а.

На рис. 4 приведены $C_{i,1}^+$ и Δ_i для системы L_2 . Видно, что максимальное отклонение соответствует участку с максимальным по времени отклонением параметра. На рис. 5, *a* приведены δ_i для систем L_1, L_2 , на рис. 5, *b* — для R_1 и R_2 . Видно, что изменение δ_i адекватно отражает изменение параметра системы.

Рассмотрим чувствительность метода к параметру реконструкции M (размерность d принималась равной 5). На рис. 6, *a* приведены результаты оценок δ_i для системы Лоренца (L_2) при $M = 2, 4, 6$, а на рис. 6, *b* — для системы Реслера (R_2) при $M = 2, 3, 4, 5$. Видно, что результаты качественно не отличаются и соответствуют характеру изменения параметра системы.

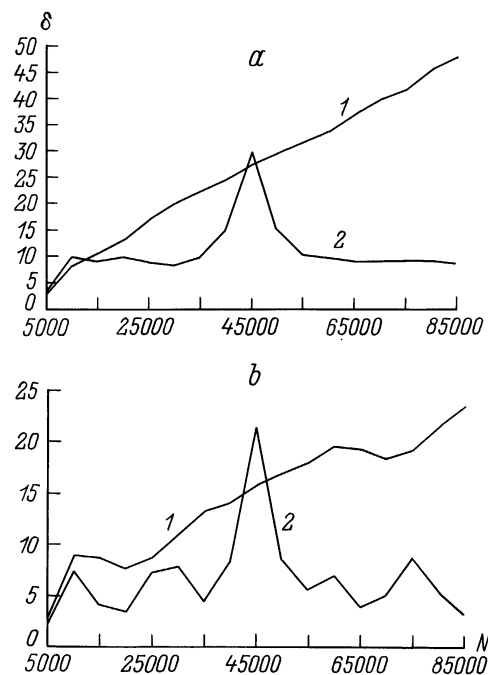


Рис. 5. δ для систем L_1 и L_2 (*a*) и для систем R_1 и R_2 (*b*). По оси абсцисс — то же, что и на рис. 3.

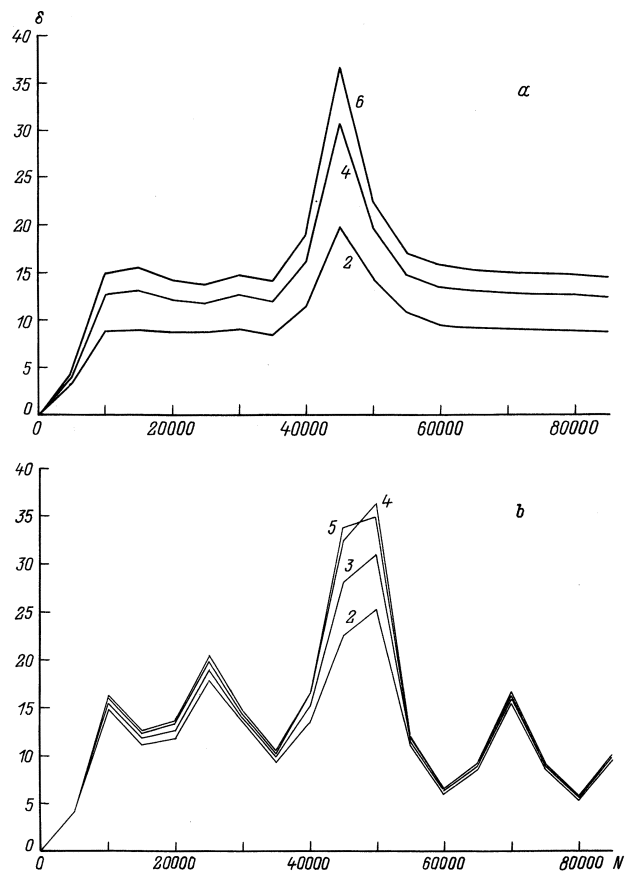


Рис. 6. δ для системы L_2 при $M = 2, 4, 6$ (a) и для системы R_2 при $M = 2, 3, 4, 5$ (b). По оси абсцисс — то же, что и на рис. 3.

Рис. 7 показывает зависимость δ_i для системы Лоренца (L_1, L_2) при наличии аддитивного шума, равномерно распределенного в интервале $(-a, a)$ при a , равном 10% стандартного отклонения временного ряда. Результат оказывается качественно устойчивым по отношению к шуму.

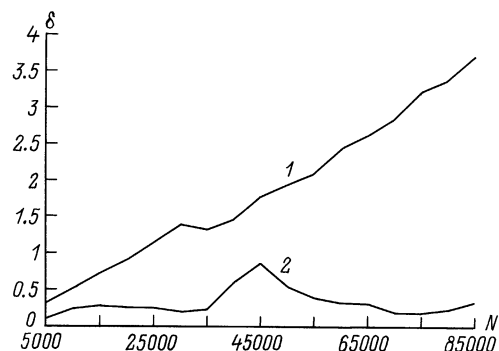


Рис. 7. δ для систем L_1 и L_2 при наложенном аддитивном шуме. 1 — случай линейного изменения параметра системы ($f_1(t)$), 2 — случай ступенчатого изменения параметра системы ($f_2(t)$). По оси абсцисс — индекс начальной точки интервала, сравниваемого с первым.

Применение кросскорреляционного интеграла к выявлению нестационарностей в случаях временных рядов, являющихся реализациями нестационарных случайных процессов, дает аналогичные результаты.

Выводы

В работе введено обобщение корреляционного интеграла. Рассмотрена процедура его вычисления и показано, что она аналогична процедуре wavelet-преобразования функций распределения. Исследовано влияние длин выборок на получаемые результаты. Получено, что величина, характеризующая интегральную разницу корреляционного и кросскорреляционного интеграла, степенным образом зависит от длины выборки. Показатель степени определяет скорость заполнения аттрактора, а длина выборки, при которой возникает отклонение от степенного закона, может рассматриваться как максимальная, которую имеет смысл использовать при данной точности задания временного ряда для проведения анализа, связанного с оценкой плотности точек на аттракторе. Рассмотрено применение кросскорреляционного интеграла к задаче выявления нестационарностей временных рядов. Проведено сравнение со статическими методами и показано, что предлагаемый подход в ряде случаев имеет преимущества. Рассмотрено влияние аддитивного шума.

Автор очень признателен А.Б.Потапову и Г.Г.Малинецкому за ценное обсуждение и сделанные замечания.

Работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, гранты № 96-02-18689 и 97-01-00396.

Список литературы

- [1] Grassberger P., Procaccia I. // Physica D. 1983. Vol. 9. P. 189–208.
- [2] Takens F. Lect. Notes in Math. Berlin: Springer, 1981. Vol. 898. P. 336–381.
- [3] Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б., Рахманов А.И. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. № 10. М., 1993.
- [4] Grossmann A., Kronland-Martinet R., Morlet J. Wavelet. Springer Verlag, 1991. P. 2–21.
- [5] Хеннекен П.Л., Тортра А. Теория вероятностей и некоторые ее приложения. М.: Наука, 1974.
- [6] Дмитриев А.С., Крупский О.Л. // ЖТФ. 1993. Вып. 10. С. 1–11.