01

Чувствительность к начальным условиям и ляпуновский показатель квазипериодической системы

© И.А. Хованов, Н.А. Хованова, В.С. Анищенко, П.В.Е. Мак-Клинток

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского,
410026 Саратов, Россия

(Поступило в Редакцию 7 апреля 1999 г.)

Рассматривается динамика квазипериодического отображения в отсутствие и при наличии малого шума. Показано, что при наличии малого шума в системе может существовать странный хаотический аттрактор с отрицательной ляпуновской экспонентой и чувствительной зависимостью траекторий к начальным условиям. Это свидетельствует о том, что при наличии флуктуаций в системе нельзя классифицировать тип движения только на основе знака старшего ляпуновского показателя.

В последние годы большое внимание ученых привлекает поведение квазипериодических колебательных систем, т. е. систем, возбуждаемых двумя гармоническими сигналами, частоты которых находятся в иррациональном отношении друг к другу. Это внимание обусловлено обнаружением в квазипериодических системах новых динамических эффектов, одним из которых является возникновение странного нехаотического аттрактора (СНА) [1,2]. СНА наблюдается обычно как промежуточное состояние между регулярным квазипериодическим аттрактором (тором) и хаотическим аттрактором [3–5]. Диагностика типа аттрактора ("хаотический", "нехаотический") осуществляется на основе анализа чувствительной зависимости траекторий от начальных условий. Это свойство, эквивалентное наличию или отсутствию экспоненциального разбегания близких траекторий в системе, характеризуется, как правило [6,7], знаком старшего ляпуновского показателя (СЛП): нехаотический аттрактор имеет отрицательный СЛП и его траектории нечувствительны к начальным условиям; хаотический аттрактор, напротив, характеризуется положительным СЛП и наличием чувствительности к начальным условиям. Однако, на наш взгляд, в квазипериодических системах указанное свойство траекторий не всегда коррелирует со знаком СЛП. Покажем это, исследуя квазипериодическую систему, свободную от флуктуаций, и затем эту же систему, находящуюся под действием малого шума.

Объектом исследования является логистическое отображение следующего вида:

$$x_{n+1} = \alpha(1+\varepsilon\cos\phi_n)x_n(1-x_n) + \sqrt{D}\,\xi_n,$$
$$\phi_{n+1} = \phi_n + \rho \operatorname{mod} 2\pi, \qquad (1)$$

в котором $x_n \in [0,1]$, $\rho = 2\pi\omega$; ξ_n — белый шум интенсивности D; α, ε, ω — параметры.

Отображение (1) описывает динамику квазипериодически возбуждаемой потоковой системы и в отсутствие шумового слагаемого является классическим для изучения СНА. Подробно СНА в этом отображении рассмотрен в [8]. Следуя работе [8], зафиксируем параметры $\varepsilon = 0.1$ и $\omega = (\sqrt{5}-1)/2$, а в качестве управляющего параметра выберем α.

Рассмотрим сначала динамику отображения в отсутствие шума. На рис. 1, *a* приведена зависимость ($\circ$) СЛП Λ от параметра α. В работе [8] показано, что в области значений $\alpha < 3.2714$ в отображении наблюдается тор; при $\alpha \approx 3.2714$ происходит кризис аттрактора — касание тора-репеллера с устойчивым тором, в результате чего возникает фрактальная структура ("странность"), и для значений параметра $\alpha > 3.2714$ аттрактор является странным. Видно (рис. 1, *a*), что для $\alpha < 3.2762$ ляпуновский показатель всюду отрицательный, за исключением небольшой области значений α в окрестности точки $\alpha \approx 3.2750$. На основании выводов работ [6–8] и результатов, приведенных на рис. 1, *a*, можно утверждать, что, во-первых, в области значений $3.2714 < \alpha < 3.2762$ должно отсутствовать экспоненциальное разбегание траекторий и, следовательно, должен наблюдаться СНА и, во-вторых, для $\alpha > 3.2762$ и в окрестности $\alpha \approx 3.2750$ в отображении должен наблюдаться странный хаотический аттрактор.

Проверим этот вывод, исследуя чувствительность к начальным условиям. Для этого рассмотрим временну́ю эволюцию ансамбля близких начальных траекторий [9,10] в отображении (1): зафиксируем значение фазы ϕ_m, выберем набор точек $\{x_m^i\}$, равномерно заполняющих отрезок длиной $e = 0.0001$ с центром в точке, принадлежащей аттрактору, и проследим за временно́й эволюцией точек отрезка. Если точки разбегутся по аттрактору и, следовательно, увеличится первоначальная длина отрезка до размера аттрактора, то это будет свидетельствовать о наличии чувствительной зависимости к начальным условиям. В противном случае, если длина отрезка уменьшится до нуля, чувствительность будет отсутствовать.

Для описания эволюции ансамбля траекторий рассмотрим дисперсию $S(n)$ траекторий точек отрезка, которая вычисляется по формуле [9,10]

$$S(n) = \left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_n^i - \langle x_n^i\rangle\right)^2\right]^{1/2}. \qquad (2)$$

Здесь N — число траекторий в ансамбле, $\langle\rangle$ означает усреднение по ансамблю. Величина $S(n)$ характеризу-

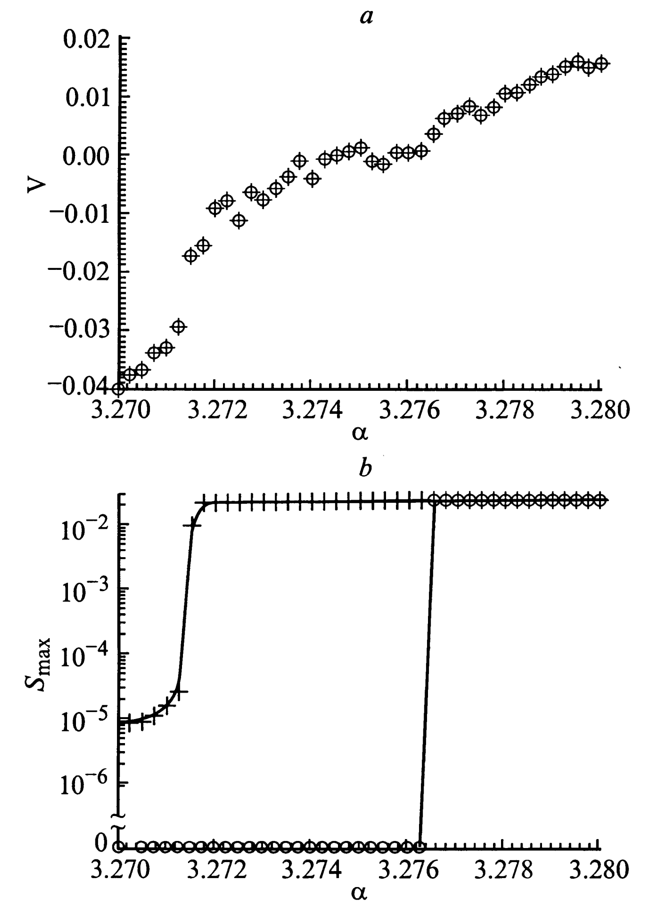

Рис. 1. Зависимость ляпуновского показателя (a) и максимальной дисперсии $S_{\max}$ (b) от параметра α в отсутствие ($\circ$) и при наличии ($+$) шума в системе.

ет длину отрезка, на котором собраны траектории ансамбля. Чувствительность к начальным условиям как функцию параметра α характеризует, например, максимальная величина дисперсии траекторий $S_{\max}$. Она вычислялась в течение 100 0000 итераций после периода релаксации такой же длительности. На рис. 1, b показана зависимость $S_{\max}$ от параметра α. Видно, что для значений $\alpha > 3.2762$ размер максимальной дисперсии отличен от нуля, поэтому в системе имеется чувствительность к начальным условиям и, следовательно, аттрактор является хаотическим. Для $\alpha < 3.2762$ чувствительность отсутствует, так как $S_{\max} = 0$. Анализ рис. 1, b и результаты работы [8] показывают, что, во-первых, в области значений $3.2714 < \alpha < 3.2762$ и в окрестности точки $\alpha \approx 3.2750$ существует СНА и, во-вторых, для $\alpha > 3.2762$ аттрактор является странным хаотическим.

Таким образом, в квазипериодической системе без шума поведение СЛП и чувствительность к начальным условиям коррелируют между собой: обе эти характеристики диагностируют существование СНА и хаотического аттрактора в определенных областях значений параметра α. Исключение составляет небольшая область в окрестности $\alpha \approx 3.2750$: СЛП положительный, однако чувствительность к начальным условиям отсутствует.

Рассмотрим более подробно эволюцию ансамбля траекторий. Будем наблюдать за эволюцией дисперсии траекторий хаотического аттрактора (рис. 2, a) и СНА (рис. 2, b). Для хаотического аттрактора дисперсия S сильно флуктуирует, показывая, что траектории то разбегаются по всему аттрактору, то собираются на очень малом отрезке. Таким образом, в квазипериодически возбуждаемой системе процесс разбегания близких траекторий хаотического аттрактора чередуется с процессом собирания траекторий. Отметим, что это поведение отличается от эволюции ансамбля траекторий хаотических аттракторов в неквазипериодических системах, в

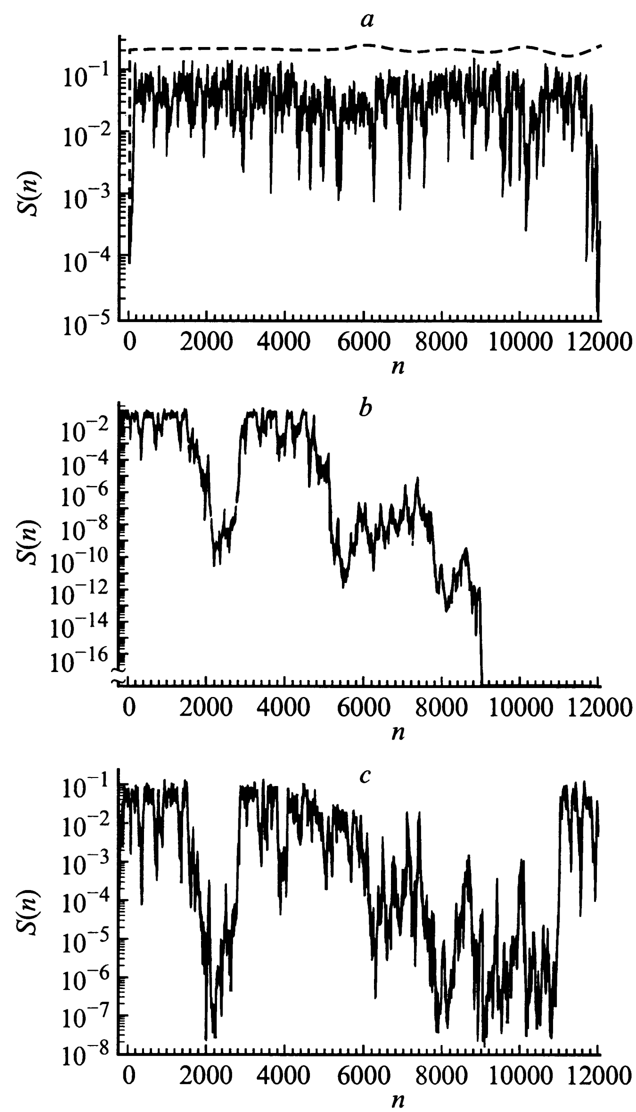

Рис. 2. Эволюция дисперсии траекторий для различных значений параметра α и интенсивности шума D: $\alpha = 3.277$, $D = 0$ (a, сплошная линия); $\alpha = 3.274$, $D = 0$ (b); $\alpha = 3.274$, $D = 1.E - 08$ (c). Штриховой линией (a) показана эволюция дисперсии траекторий в неквазипериодическом режиме ($\alpha = 3.7$, $\varepsilon = 0$).

которых величина S увеличивается от первоначального значения, достигая некоторого максимума, а затем с течением времени изменяется в небольшом интервале значений (рис. 2, a, штриховая кривая) [11]. Поведение дисперсии траекторий СНА (рис. 2, b) показывает, что после некоторого времени релаксации, в течение которого наблюдается процесс разбегания и собирания (как в хаотическом аттракторе), траектории собираются и далее одинаковым образом эволюционируют во времени. Действительно, в работах [9,12] показано, что как хаотический аттрактор, так и СНА имеют области с "разбеганием" и "собиранием" траекторий. Отличие этих аттракторов в том, что первые области преобладают у хаотического аттрактора, вторые — у СНА. Именно поэтому после некоторого времени релаксации траектории СНА начинают эволюционировать как единая траектория, несмотря на наличие областей с разбеганием. Если после времени релаксации возмутить траектории ансамбля, то они снова разбегутся. Возмущение неизбежно произойдет в реальных системах, в которых всегда присутствуют флуктуации. Таким образом, в системах с шумом в областях существования странных аттракторов должно наблюдаться разбегание траекторий или, другими словами, чувствительность к начальным условиям.

В подтверждение правильности этого вывода исследуем эволюцию ансамбля траекторий и поведение СЛП при наличии малого гауссова шума интенсивности $D = 1.e - 08$. Видно (рис. 1, a, $+$), что значения СЛП не зависят от того, есть малый шум в отображении или он отсутствует. Максимальная дисперсия (рис. 1, $b, +$) в системе с шумом всюду отлична от нуля, а в области значений $\alpha > 3.2714$ она сравнима с размерами аттрактора. Последнее указывает на наличие чувствительной зависимости траекторий от начальных условий, т. е. на "хаотичность" аттрактора. Напомним, что в свободном от шума отображении в этой области ($\alpha > 3.2714$) можно было наблюдать как СНА ($3.2714 < \alpha < 3.2762$), так и странный хаотический аттрактор ($\alpha > 3.2762$). Эволюция ансамбля траекторий для значения α, принадлежащего интервалу $3.2714 < \alpha < 3.2762$, приведенная на рис. 2, c, качественно не отличается от той же на рис. 2, a.

Таким образом, малый шум, не влияя на фрактальность ("странность") аттрактора, превращает СНА квазипериодической системы в аттрактор, который обладает чувствительностью к начальным условиям, т. е. является странным хаотическим, но в то же время характеризуется отрицательным СЛП. Это означает, что в квазипериодических системах с шумом невозможна классификация типа движения с помощью СЛП, и для этой цели нужно использовать другие характеристики. Кроме того, можно предположить, что в реальных (при наличии флуктуаций) квазипериодических системах переход к хаосу от тора наблюдается без промежуточного этапа, т. е. без возникновения СНА.

Аналогичные результаты получены для потоковой системы — осциллятора Дуффинга, возбуждаемого квазипериодическим сигналом.

Данная работа поддержана Международными фондами INTAS (грант № 96-0305) и EPSRC (Великобритания), Королевским обществом (Лондон).

Один из авторов (И.А. Хованов) благодарит институт Макса–Планка (Дрезден, Германия) за предоставленную возможность стажировки.

Список литературы

[1] *Grebogi C., Ott E., Yorke J.A.* // Physica D. 1984. Vol. 13. P. 261–268.
[2] *Анищенко В.С.* // Изв. вузов. ПНД. 1997. Т. 5. № 1. С. 109–127.
[3] *Bondeson A., Ott E., Antonsen T.M.* // Phys. Rev. Lett. 1985. Vol. 55. P. 2103–2106.
[4] *Pikovsky A.S., Feudel U.* // Chaos. 1995. Vol. 5. P. 253–260.
[5] *Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Sosnovtseva O.* // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 53. P. 4451–4457.
[6] *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984. 528 с.
[7] *Хакен Г.* Синергетика. М.: Мир, 1985. 423 с.
[8] *Heagy J.F., Hammel S.M.* // Physica D. 1994. Vol. 70. P. 140–153.
[9] *Lai Y.-C., Feudel U., Grebogi C.* // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 54. P. 6070–6075.
[10] *Romeiras F.J., Grebogi C., Ott E.* // Phys. Rev. A. 1990. Vol. 41. P. 784–799.
[11] *Nicolis C., Nicolis G.* // Phys. Rev. A. 1991. Vol. 43. P. 5720–5723.
[12] *Lai Y.-C.* // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 53. P. 57–61.