

05:09

## Динамика флаксонов в джозефсоновских переходах под действием шумового тока

© Ф.Х. Абдуллаев, М.Р. Джумаев, Э.Н. Цой

Физико-технический институт АН Узбекистана,  
700084 Ташкент, Узбекистан

(Поступило в Редакцию 25 февраля 1999 г.)

Изучено движение квантов магнитного потока (флаксонов) в длинных джозефсоновских переходах под действием постоянного и случайного токов. Вычислена функция распределения скоростей флаксонов, которая является негауссовой даже в отсутствие постоянной компоненты тока. Как следствие, вольт-амперная характеристика шумового перехода отличается от данной зависимости для регулярного перехода. Показано, что зависимость разности напряжений для переходов с шумовой компонентой тока и без нее имеет немонотонный характер. Данные расчетов находятся в хорошем согласии с результатами численного моделирования.

В последнее время проводятся интенсивные исследования динамики квантов магнитного потока (флаксонов) в длинных джозефсоновских переходах (ДДП) (см., например, [1–3]). Это объясняется как возможностью проверки предсказаний теории нелинейных волн, так и перспективами разработки новых электронных устройств. Кроме того, в недавних работах [4] показано наличие джозефсоновской связи между слоями кристалла в высокотемпературных сверхпроводниках. Поэтому результаты исследования ДДП могут быть полезными и при анализе свойств новых сверхпроводников.

В настоящей работе исследуется влияние случайного тока на параметры флаксона. Данная задача тесно при-мыкает к проблеме поведения флаксонов, помещенных в термостат. Этот вопрос был исследован различными авторами [5–7]. В частности, было показано, что средняя кинетическая энергия флаксона равна  $\frac{1}{2}k_B T$ , а энергия, приходящаяся на одну фононную моду, соответствует  $k_B T$ , где  $k_B$  — постоянная Больцмана,  $T$  — температура системы. В экспериментах влияние флуктуаций может быть обнаружено по спектру излучения, снимаемого с торца джозефсоновского перехода. Для идеального перехода частота излучения определяется отношением  $u/(2L)$ , где  $u$  — скорость флаксона,  $L$  — длина перехода. Наличие шумов приводит к случайной добавке к скорости  $u$ , следовательно, к уширению линии в спектре. Расчет спектральных характеристик был проведен в работах [5,6]. Отметим, что в указанных работах в основном рассматривался случай малых скоростей флаксона. В экспериментах [8] было обнаружено уширение порядка десятков kHz резонансной линии на частоте 10 GHz, что согласуется с результатами расчетов. Исследование влияния флуктуаций на динамику связанных состояний флаксонов в многослойных ДДП проведено в работе [9]. Найдена функция распределения для параметров пары флаксонов.

Нами вычислена функция распределения (ФР) для произвольных скоростей ( $|u| < 1$ ), которая в общем случае является негауссовой. Данный факт является

существенным, поскольку пренебрежение им приводит к неверной интерпретации и расхождению результатов теории и (численного) эксперимента на порядок и более (см., например, [10]). На основе ФР рассчитана вольт-амперная характеристика (ВАХ) перехода. Данная зависимость сравнивается с ВАХ для перехода без шума. Показано, что зависимость разности напряжений от тока имеет немонотонный характер. При этом в случае малых интенсивностей шума положение максимума не зависит от параметров случайной компоненты тока. Сравнение полученных зависимостей с результатами численных исследований дает удовлетворительное согласие. Численный счет также показывает, что, когда скорость флаксонов близка к скорости Свихарта, происходит рождение новых возбуждений (бризеров, пар флаксон–антифлаксон), существенно меняющих динамику системы [1, гл. 15].

Динамика флаксонов в ДДП в большинстве случаев, реализуемых в экспериментах, хорошо описывается уравнением синус-гордон (СГ) [1]

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + \sin \varphi = -\alpha \varphi_t + \beta \varphi_{xxt} - \gamma(t), \quad (1)$$

где  $\varphi$  — разность фаз волновых функций сверхпроводящих слоев;  $\alpha$ ,  $\beta$  — коэффициенты диссипации;  $\gamma$  — плотность стороннего тока.

Пространственная переменная  $x$  соответствует направлению вдоль перехода и нормирована на джозефсоновскую глубину проникновения  $\lambda_j$ . Время  $t$  измеряется в величинах, обратных плазменной частоте перехода  $\omega_p^{-1}$  [1]. Ток нормирован на величину критического тока в переходе. В дальнейшем параметры  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  считаются малыыми.

В невозмущенной системе ( $\alpha = \beta = \gamma = 0$ ) флаксон описывается кинковым решением уравнения СГ

$$\varphi = 4 \arctg \left[ \exp \left( (x - ut) / \sqrt{1 - u^2} \right) \right], \quad (2)$$

где  $u$  — скорость флаксона.

Для анализа движения флаксона под действием диссипации и внешних токов воспользуемся адиабатической теорией возмущения для уравнения СГ [11]. Тогда для скорости получается следующее уравнение:

$$\frac{du}{dt} = -\alpha u(1-u^2) - \frac{\beta}{3}u + \frac{\pi\gamma(t)}{4}(1-u^2)^{3/2}. \quad (3)$$

Так как возмущение, связанное со случайной силой, в уравнении (1) не убывает на бесконечности, то необходимо сделать перенормировку, чтобы это требование выполнялось [12]. Физически это означает, что влияние шума на флаксон происходит через индуцированные колебания однородного состояния. Здесь также не учитывается изменение параметров флаксона за счет излучения линейных волн. Однако, как будет показано далее, для малых интенсивностей шума используемый в работе подход дает хорошее согласие с результатами численных расчетов. Будем считать, что сторонний ток состоит из постоянной и случайной компонент

$$\gamma(t) = \gamma_0 + f(t). \quad (4)$$

Случайная функция  $f(t)$  предполагается дельта-коррелированным гауссовым шумом со следующими характеристиками

$$\langle f(t) \rangle = 0, \quad \langle f(t)f(t') \rangle = 2\sigma_\gamma^2 \delta(t-t'). \quad (5)$$

Отметим, что в уравнении (3) случайная сила входит мультипликативно, однако переход к импульсным переменным ( $u = p/\sqrt{1+p^2}$ ) позволяет получить уравнение с аддитивным шумом

$$\frac{dp}{dt} = -\alpha p - \beta p(1+p^2)/3 + \pi\gamma(t)/4, \quad (6)$$

которое при  $\beta = 0$  описывает модель Ланжевена.

Используя стохастическое уравнение (6), легко получить уравнение Фоккера–Планка для ФР. Применяя известные методы решения данного уравнения (см., например, [13]), получаем ФР флаксонов по импульсам

$$F(p) = C \exp \left\{ \frac{1}{\sigma^2} \left[ \frac{\pi\gamma_0}{4} p - \frac{\alpha}{2} p^2 - \frac{\beta}{12} (2p^2 + p^4) \right] \right\}, \quad (7)$$

где  $\sigma^2 = (\pi/4)^2 \sigma_\gamma^2$ , а постоянная  $C$  определяется из условия нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(p) dp = 1.$$

Видно, что учет диссипации  $\beta$ , обусловленной током квазичастиц в сверхпроводящих электродах, приводит к тому, что функция распределения по импульсам, а также по скоростям становится негауссовой. Это означает, что среднее и наиболее вероятное значение импульса флаксона не совпадают и статистические моменты порядка и выше 2 отличны от нуля.

Проанализируем теперь различные физически интересные ситуации. Для простоты будем полагать, что параметр  $\beta = 0$ . Тогда ФР по импульсам имеет вид ( $-\infty < p < \infty$ )

$$F(p) = \sqrt{a/\pi} \exp[-a(p-b)^2], \quad (8)$$

где параметры  $a$  и  $b$  равны соответственно следующим выражениям:  $a = \alpha/(2\sigma^2)$ ,  $b = \pi\gamma_0/(4\alpha)$ .

Величину  $a^{-1/2}$  можно рассматривать как характерный масштаб импульса, связанный со случайной компонентой тока, тогда как величина  $b$  — масштаб, соответствующий постоянной компоненте тока.

Используя уравнение (8), можно определить среднюю скорость флаксона  $\langle u \rangle = \langle p/\sqrt{1+p^2} \rangle$ . Выпишем асимптотические зависимости для случая малых интенсивностей шума  $a \gg 1$  и для  $\sqrt{a}b \ll 1$ , соответствующего сильному шуму или малым значениям постоянного тока,

$$\langle u \rangle = \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} \left[ 1 - \frac{3}{4a(1+b^2)^2} \right] \quad \text{при } a \gg 1, \quad (9)$$

$$\langle u \rangle = \sqrt{\frac{a \exp(a)}{\pi}} b \exp(-ab^2) \left[ 4K_1(a/2) + a(K_1(a/2) - K_2(a/2)) \right] \quad \text{при } \sqrt{a}b \ll 1, \quad (10)$$

где  $K_1(\mu)$  и  $K_2(\mu)$  — модифицированные функции Ганкеля.

Нормированное напряжение  $U$  на джозефсоновском переходе пропорционально средней скорости флаксона  $U \equiv \langle \varphi_t \rangle = 2\pi \langle u \rangle / L$ , где  $\langle \dots \rangle$  означает усреднение по времени и координате,  $L$  — длина перехода. Так как характерное время системы  $\omega_p \sim 10^{11} \text{ s}^{-1}$ , то напряжение, определяемое в эксперименте, соответствует величине, усредненной по большому промежутку времени. Следовательно, уравнения (9), (10) можно рассматривать как вольт-амперные характеристики перехода. Для малых интенсивностей шума, когда и справедливо наше рассмотрение, ВАХ перехода с шумом качественно не отличается от ВАХ перехода без шума. В обоих случаях происходит монотонный рост напряжения с увеличением тока  $\gamma_0$ . Однако, как следует из (9), для  $a \gg 1$  существует интересная особенность. Известно, что скорость флаксона (нормированное напряжение) в ДДП с постоянным током, без шума определяется следующим соотношением  $u_d = b/(1+b^2)^{1/2}$ . Рассмотрим разность скоростей  $\Delta u = u_d - \langle u \rangle$ . Тогда из (9) получаем, что зависимость  $\Delta u$  от тока  $\gamma_0$  имеет максимум, положение которого не зависит от параметров случайного тока и определяется условием  $|b_m| = 1/2$  или  $|\gamma_m| = 2\alpha/\pi$ . При этом значении максимальная разность равна  $\Delta u(\gamma_m) = 12\sqrt{5}/(125a)$ . Подчеркнем, что данное отличие ВАХ не является очевидным. Действительно, из (8) следует, что средний импульс и импульс флаксона в регулярной системе совпадают  $\langle p \rangle = p_d = b$ . Однако вследствие нелинейной зависимости  $u(p)$  ФР для  $u$  будет уже негауссовой, что и приведет к отличию ВАХ.

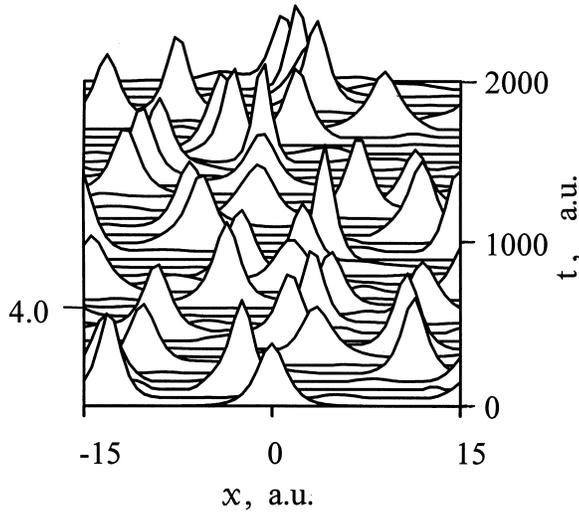


Рис. 1. Зависимость  $\varphi_x(x, t)$  для  $\sigma_x = 0.1$ ,  $\gamma_0 = \gamma_m = 0.0318$ .

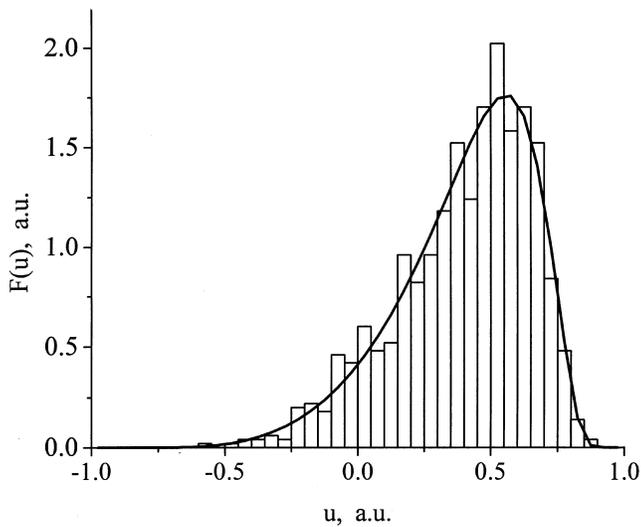


Рис. 2. Функция распределения по скоростям. Параметры те же, что и на рис. 1; кривая — теория (8), гистограмма — численный расчет.

Для проверки полученных результатов проводилось численное моделирование стохастических уравнений (1) и (6). Для генерирования "белого" шума использовался стандартный метод преобразования равномерного распределения. Для уравнения (1) использовалась 3-слойная, 5-точечная схема с шагом  $\Delta x = 0.05$  и  $\Delta t = 0.02$ . Для интегрирования уравнения (6) применялся метод Рунге–Кутты 7-го порядка. Расчет проводился для двух значений дисперсии  $\sigma_\gamma = 0.05$  и  $0.1$ , при этом выбирались  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = 0$ , безразмерный ток  $\gamma$  изменялся от 0 до 0.5. На рис. 1 представлена эволюция флаксона под действием шума. Видно, что уровень излучаемых линейных волн мал по сравнению с амплитудой флаксона. Важно также, что в каждый

момент времени в системе имеется один флаксон. Таким образом, адиабатический подход, используемый в работе, является корректным в данной области параметров. На рис. 2 ФР, полученная из моделирования (6), сравнивается с аналитической зависимостью, найденной с помощью (8) и соотношения  $F(u) = F(p)|dp/du|$ . Видно, что ФР для  $u$ , построенная по 1000 реализаций, имеет выраженный асимметричный характер. На рис. 3 показана зависимость разности напряжений от значений постоянного тока. При численном счете уравнения (6) измерялась мгновенная скорость, которая усреднялась по 1000 реализаций. При интегрировании уравнения СГ (1) определялась средняя скорость по интервалу  $T = 1000$ , которая усреднялась по 20 реализациям. Отметим, что в каждой реализации наблюдались заметные флуктуации разности напряжений. Это означает, что в реальном эксперименте для получения подобной зависимости время измерения должно быть достаточно велико. На рис. 3 также приведены расчетная и численно найденные ВАХ. Видно, что в целом численные результаты для (1) и (6) качественно согласуются между собой, а также с расчетными зависимостями (9), (10). Также видно, что положение максимумов в зависимости  $\Delta u(\gamma)$  примерно одинаковое и не зависит от интенсивности шума. При малых значениях постоянного тока определяющую роль в динамике флаксонов играет случайная компонента, чем и объясняются заметные флуктуации в данной области. Отметим, что при больших значениях шума (например,  $\sigma_\gamma > 0.1$  для  $\alpha = 0.05$ ) в системе возбуждаются другие нелинейные моды и адиабатический подход становится неприменимым. В численном счете появление новых мод регистрировалось как по изменению профиля  $\varphi(x, t)$ , так и по резкому возрастанию напряжения на переходе.

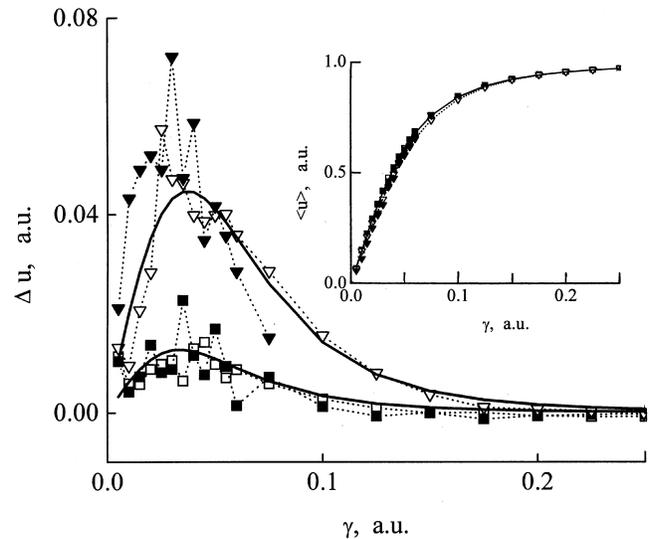
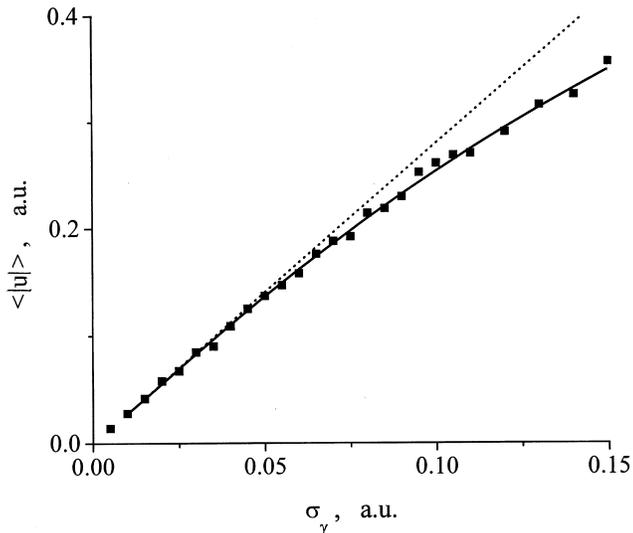
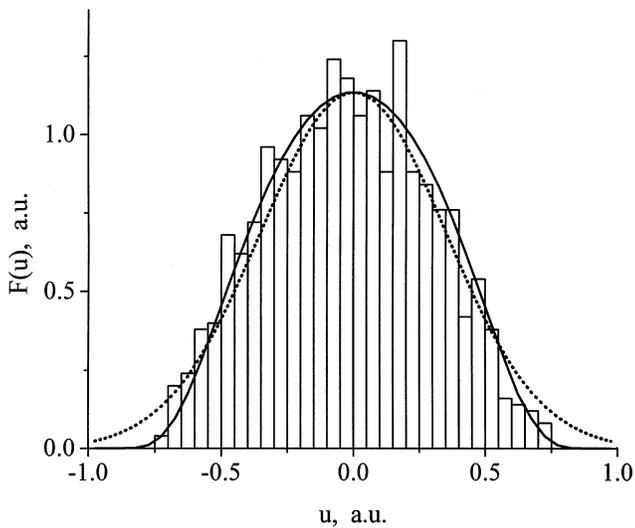


Рис. 3. Зависимость  $\Delta u$  от  $\gamma$ . На вставке расчетная и численно найденные ВАХ. Сплошные линии — теория, темные значки — численный расчет по (1), светлые — численный расчет по (6);  $\sigma_\gamma$ :  $\square$  — 0.1,  $\nabla$  — 0.05.



**Рис. 4.** Зависимость абсолютной скорости флаксона от  $\sigma_\gamma$ . ■ — численный расчет уравнения (6); сплошная кривая — формула (12); пунктир — абсолютная скорость  $\langle |u_{cl}| \rangle$ , найденная по гауссовой ФР.



**Рис. 5.** Функция распределения по скоростям  $\Phi(u)$  для  $\sigma_x = 0.1$ ,  $\gamma_0 = 0$ . Сплошная кривая — теория (11), пунктир —  $\Phi_{cl}(u)$ , гистограмма — численный расчет (6).

Рассмотрим теперь случай, когда постоянный ток отсутствует,  $\gamma_0 = 0$ . В этом случае средняя скорость флаксона, а значит, и напряжение равны 0. Однако в экспериментах вполне возможно измерять абсолютное значение напряжения или квадрат напряжения. В этом случае динамика полностью определяется случайным током и непосредственно могут быть найдены характеристики шума, в частности  $\sigma_\gamma$ . Функция распределения по скорости имеет вид ( $\gamma_0 = 0$ )

$$\Phi(u) = \sqrt{a/\pi}(1-u^2)^{-3/2} \exp[-au^2/(1-u^2)]. \quad (11)$$

Используя ФР (11), получаем для среднего квадрата скорости флаксона следующее выражение:

$$\langle u^2 \rangle = 1 - \sqrt{\pi a} \exp(a) \operatorname{erfc}(\sqrt{a}) \equiv 1 - \sqrt{\pi a} \langle |u| \rangle, \quad (12)$$

где  $\operatorname{erfc}(x)$  — дополнительная функция ошибок.

Видно, что в пределе сильных флуктуаций формулам (12) дает конечные значения  $\langle u^2 \rangle$ , тогда как классическое рассмотрение дает неограниченный рост среднего квадрата скорости. На рис. 4 приведена зависимость  $\langle |u| \rangle$  от  $\sigma_\gamma$ , найденная по формуле (12) и численно (6). Видно достаточно хорошее согласие полученных результатов. Данную кривую можно рассматривать как шумовую ВАХ, по которой можно определить параметры случайного тока. Кривая соответствует зависимости с использованием гауссовой функции распределения  $\Phi_{cl}(u) = \sqrt{a/\pi} \exp[-au^2]$ , которая применима только при малых скоростях. На рис. 5 численно найденная ФР сравнивается с зависимостью (11) и  $\Phi_{cl}(u)$ . Видно, что, как и в случае  $\gamma \neq 0$ , функция распределения является негауссовой. Это особенно заметно при больших скоростях. Отметим, что  $\Phi(u)$  при  $0 < a < 3/2$ , соответствующая сильному шуму, имеет два максимума, расположенных симметрично относительно начала координат, тогда как при  $a > 3/2$  имеется единственный максимум при  $u = 0$ . Значение  $a = 3/2$  может рассматриваться как пороговое значение, разделяющее сильные и слабые флуктуации.

Таким образом, в настоящей работе найдена функция распределения флаксонов по импульсам. На ее основе вычислена вольт-амперная характеристика шумового перехода. Показан немонотонный характер зависимости разности напряжений от величины постоянного тока. Показана возможность определения параметров шумового сигнала по измерению абсолютной величины или квадрата напряжения. Результаты работы могут быть применены и в случае, если вместо случайного возмущения имеется многомодовая накачка.

Авторы выражают благодарность фонду CRDF (U.S. Civilian Research and Development Foundation) (грант № ZM1-342) и Фонду фундаментальных исследований ГКНТ (грант № 21/98) за частичную поддержку данных исследований, а также сотрудникам Лаборатории теории твердого тела и полупроводников ФТИ АН РУз за полезные обсуждения.

## Список литературы

- [1] Лухарев К.К. Введение в динамику джозефсоновских переходов. М.: Наука, 1985. 320 с.
- [2] Pedersen N.F., Ustinov A.V. // *Supersond. Sci. Technol.* 1995. Vol. 8. P. 389.
- [3] Parmentier R.D. Proc. of the Workshop "Nonlinear Physics: Theory and Experiment" / Eds E. Alfinito, M. Boiti, L. Martina, F. Pempinelli. Singapore: World Scientific, 1996. P. 582.
- [4] Kleiner R., Müller P. // *Phys. Rev. B.* 1994. Vol. 49. P. 1327.
- [5] Kaup. D.J. // *Phys. Rev. B.* 1983. Vol. 27. P. 6787.

- [6] *Salerno M., Joergensen E., Samuelsen M.R.* // Phys. Rev. B. 1984. Vol. 30. P. 2635. Salerno M., Samuelsen M.R., Svensmark H.// Phys. Rev. B. 1988. Vol. 38. P. 593.
- [7] *Басс Ф.Г., Кононов В.В., Сеницин Ю.А.* // ЖЭТФ. 1985. Т. 38. Вып. 2. С. 541.
- [8] *Joergensen E., Koshelets V.P., Monaco R.* et al. // R. Phys. Rev. Lett. 1982. Vol. 49. P. 1093.
- [9] *Abdullaev F.Kh., Navotny D.N., Umarov B.A.* // Phys. Lett. A. 1998. Vol. 244. P. 155.
- [10] *If F., Christiansen P.L., Parmentier R.D., Skovgaard O., Soerensen M.P.* // Phys. Rev. B. 1985. Vol. 32. P. 1512.
- [11] *Карпман В.И., Маслов Е.М.* // ЖЭТФ. 1977. Т. 73. С. 537. *McLaughlin D.W., Scott A.C.* // Phys. Rev. A. 1978. Vol. 18. P. 1652.
- [12] *Olsen O.H., Samuelsen M.R.* // Phys. Rev. Lett. 1982. Vol. 48. P. 1569.
- [13] *Ван Кампен Н.Г.* Стохастические процессы в физике и химии. М.: Мир, 1994.