01;09

Резонансные частоты азимутально-однородных колебаний анизотропного шара

© Ю.Ф. Филиппов, З.Е. Еременко

Институт радиофизики и электроники им. А.Я. Усикова АН Украины,
310085 Харьков, Украина

(Поступило в Редакцию 1 декабря 1998 г.)

Диэлектрикам, применяемым при изготовлении высокодобротных резонаторов, свойственна анизотропия параметров. Развита теория азимутально-однородных резонансных колебаний в шаре, изготовленного из одноосного кристалла. Показано, что влияние анизотропии приводит к возникновению двух типов колебаний TM-моды в различными частотами. Приведены результаты численного исследования для колебаний, характеризующихся большими значениями полярных индексов.

Спектральные характеристики резонансных колебаний изучены лишь для изотропного шара [1,2]. Низшие типы колебаний в сферическом резонаторе из одноосного кристалла, ограниченного идеально проводящей поверхностью, исследованы в работе [3].

Диэлектрикам, применяемым при изготовлении высокодобротных резонаторов, свойственна анизотропия параметров. Исследование последней представляет интерес как для изучения деформации и появляющейся при этом напряженности электрического поля, так и степени упорядочения доменной структуры. Знание их необходимо при создании интегральных схем миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов. Все это приводит к важности изучения влияния анизотропии на резонансные колебания.

В технике широко используются одноосные монокристаллы рубина, лейкосапфира, кварца, обладающие малыми диэлектрическими потерями. Электрические параметры их описываются тензором диэлектрической проницаемости

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon_{ik}\delta_{ik} \qquad \text{при} \qquad \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} \neq \varepsilon_{zz}, \tag{1}$$

ε_{zz} и ε_{xx} — проницаемости в направлениях, параллельном и перпендикулярном к оси анизотропии.

В сферической системе координат (r, θ, φ) тензор $\hat{\varepsilon}$ приводится к виду

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} & -\varepsilon_{r\theta} & 0 \\ -\varepsilon_{r\theta} & \varepsilon_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{xx} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где $\varepsilon_{rr} = \varepsilon_+ + \varepsilon_- \cos 2\theta$, $\varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_+ - \varepsilon_- \cos 2\theta$, $\varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_- \sin 2\theta$, $2\varepsilon_\pm = \varepsilon_{zz} \pm \varepsilon_{xx}$.

В этой работе нами исследуются азимутально-однородные колебаний $(\partial E/\partial\varphi = \partial H/\partial\varphi = 0)$ шара, изготовленного из одноосного монокристалла. Система уравнений Максвелла для них разбивается на две независимые подсистемы, описывающие TE- $(E_r = E_\theta = H_\varphi = 0)$ и TM-моды $(H_r = H_\theta = E_\varphi = 0)$. Исследование их приводится к нахождению решений дифференциальных уравнений

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\varepsilon_{xx}}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)V = 0, \tag{3}$$

$$\left(\varepsilon_{rr}\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\varepsilon_{\theta\theta} - \varepsilon_{r\theta}\left(1 + r\frac{\partial}{\partial r}\right)\right)\right.$$
$$\left. - \frac{\varepsilon_{r\theta}}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta} - \frac{\varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz}}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)U = 0. \tag{4}$$

Компоненты полей резонансных колебаний выражаются через потенциальные функции U и V следующим образом:

$$H_r = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\varepsilon_{xx}}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)V; \quad rcE_\varphi = \varepsilon_{xx}\frac{\partial^2}{\partial t\partial\theta}V;$$
$$rH_\theta = \frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}V; \tag{5}$$

для TE-моды, а для TM

$$E_r = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\varepsilon_{\theta\theta}}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)U; \quad rE_\theta = \left(\frac{\partial^2}{\partial t\partial\theta} - \frac{\varepsilon_{r\theta}r}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)U;$$
$$rcH_\theta = \frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_{r\theta}\left(1 + r\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{\partial}{\partial\theta}\varepsilon_{\theta\theta}\right)U. \tag{6}$$

Решение системы (3), (4), конечное при $r = 0$ и удовлетворяющее условию уходящего излучения при $r \to \infty$, может быть представлено в таком виде $(S = U, V)$

$$\{S\} = \sum_n \exp(-i\omega t)P_n(\cos\theta)\begin{cases} A_{S,n}j_n(q_S r), & r \le r_0, \\ B_{S,n}h_n^{(1)}(kr), & r \ge r_0, \end{cases} \tag{7}$$

где $A_{S,n}$ и $B_{S,n}$ — постоянные, r_0 — радиус шара, $k = \omega/c$, n — полярный индекс, q_S — радиальная компонента волнового вектора внутри шара, $j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}}J_{n+\frac{1}{2}}(x)$, $h_n^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}}H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(x)$, $J_\nu(x)$ и $H_\nu^{(1)}(x)$ — цилиндрические функции Бесселя и Ханкеля первого рода, $P_n(\cos\theta)$ —

полиномы Лежандра, $j_n(x)$ и $P_n \equiv P_n(\cos\theta)$ удовлетворяют рекуррентным состояниям

$$\sin\theta\frac{\partial P_n}{d\theta} = n(P_n\cos\theta - P_{n-1}) = (n+1)(P_{n+1} - P_n\cos\theta),$$

$$x\frac{d\,j_n(x)}{dx} = (n+1)j_n(x) - xj_{n+1}(x) = xj_{n-1}(x) - nj_n(x). \quad (8)$$

Подставляя разложение (7) в уравнение (3), определяем радиальные компоненты волнового вектора TE-моды. Для азимутально-однородных колебаний в изотропных и акнизотропных резонаторах они совпадают и равны $q_V = k\sqrt{\varepsilon_{xx}}$.

Влияние анизотропии сказывается только на TM-моде. Подставляя (7) в (4), используя рекуррентные соотношения (8) и приравнивая коэффициенты при $j_n(qr)P_n(\cos\theta)$, приходим к системе алгебраических уравнений для коэффициентов разложения $A_{U,n}$

$$\left(\varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz}k^2 - \left(\varepsilon_+ - \frac{\varepsilon_-}{(2n-1)(2n+3)}\right)q_U^2\right)A_{U,n} + \frac{\varepsilon_- q_U^2}{2}\left(\left(1 + \frac{4n-3}{(2n-1)(2n-3)}\right)A_{U,n-2} + \left(1 - \frac{4n+7}{(2n+3)(2n+5)}\right)A_{U,n+2}\right) = 0. \quad (9)$$

Из (9) замечаем, что влияние анизотропии приводит к появлению взаимодействия парциальных колебаний с различными значениями полярных индексов n. Систему (9) после несложных, но громоздких преобразований приводим к виду

$$\left(\alpha_n - \frac{\gamma_{n-2}\beta_n}{Q_n} - \frac{\gamma_n\beta_{n+2}}{T_n}\right)A_n = 0, \quad (10)$$

$$A_{n+2} = -\rho_n A_n, \quad A_{n-2} = -g_n A_n, \quad (11)$$

где

$$\alpha_n = \alpha + \frac{\varepsilon_- q_U^2}{(2n-1)(2n+3)},$$

$$\beta_n = \beta\left(1 + \frac{4n-3}{(2n-1)(2n-3)}\right),$$

$$\gamma_n = \beta\left(1 - \frac{4n+7}{(2n+3)(2n+5)}\right),$$

$$\alpha = \varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz}k^2 - \varepsilon_+ q_U^2, \qquad \beta = \frac{\varepsilon_- q_U^2}{2},$$

$$\rho_n = \frac{\beta_{n+2}}{Q_n}, \qquad g_n = \frac{\gamma_{n-2}}{T_n},$$

$$Q_n = \alpha_{n-2} - \frac{\beta_{n-2}\gamma_{n-4}}{\alpha_{n-4} - \frac{\beta_{n-4}\gamma_{n-6}}{\alpha_{n-6} - \frac{\beta_{n-6}\gamma_{n-8}}{\dots R}}},$$

$$T_n = \alpha_{n+2} - \frac{\beta_{n+4}\gamma_{n+2}}{\alpha_{n+4} - \frac{\beta_{n+6}\gamma_{n+4}}{\alpha_{n+6} - \dots}}.$$

При $n = 0$ и $n = 1$ параметр β_n обращается в нуль. Поэтому в выражении для Q_n

$$R = \alpha_2 - \frac{\beta_2\gamma_0}{\alpha_0}$$

при четных n и

$$R = \alpha_3 - \frac{\beta_3\gamma_5}{\alpha_1}$$

при нечетных n. В выражении для T_n часть дроби сворачивается. Действительно, при $(n+s) \gg 1$ влиянием зависимости от индекса в α_{n+s}, β_{n+s}, γ_{n+s} можно пренебречь. В этом случае

$$\Omega \equiv \alpha_{n+s} - \frac{\gamma_{n+s}\beta_{n+s+2}}{\alpha_{n+s+2} - \dots} = \alpha - \frac{\beta^2}{\alpha - \dots} = \alpha - \frac{\beta^2}{\Omega}. \quad (12)$$

Решая уравнение (12) относительно Ω, получаем

$$2\Omega_\pm = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\beta^2}. \quad (13)$$

Выражение для T_n при этом приводится к такому виду:

$$T_n = \alpha_{n+2} - \frac{\gamma_{n+2}\beta_{n+4}}{\alpha_{n+4} - \dots - \frac{\gamma_{n+s-2}\beta_{n+s}}{\Omega_\pm}}. \quad (14)$$

Условие существования нетривиального решения (10) приводит к функциональному соотношению

$$\alpha_n - \frac{\gamma_{n-2}\beta_n}{Q_n} - \frac{\gamma_n\beta_{n+2}}{T_n} = 0. \quad (15)$$

На поверхности шара ($r = r_0$) должны быть непрерывны тангенциальные компоненты полей резонансных колебаний полей E_θ и H_φ. Для TE-мод при удовлетворении этим условиям получаем уравнение, совпадающее с дисперсионным уравнением для изотропного шара,

$$y_V j_{n-1}(y_V)h_n^{(1)}(y_0) = y_0 j_n(y_V)h_{n-1}^{(1)}(y_0), \quad (16)$$

где $y_s = q_s r_0$, $y_0 = kr_0$.

Рассмотрим теперь TM-моды. Условие непрерывности при $r = r_0$ тангенциальных компонент E_θ и H_φ приводит к соотношениям

$$\sum_n\left(\left(y_U j_{n-1}(y_U) - nj_n(y_U)\right)\frac{dP_n}{d\theta} - \varepsilon_- y_0^2\sin 2\theta\, j_n(y_U)P_n\right)A_n = \sum_n\left(y_0 h_{n-1}^{(1)}(y_0) - nh_n^{(1)}(y_0)\right)\frac{dP_n}{d\theta}B_n,$$

$$\sum_n\left(j_n(y_U)\frac{d}{d\theta}(\varepsilon_+ - \varepsilon_-\cos 2\theta)P_n + \varepsilon_-\sin 2\theta\left((n+1)j_n(y_U) + y_U j_{n-1}(y_U)\right)\right)A_n = \sum_n h_n^{(1)}(y_0)\frac{dP_n}{d\theta}B_n. \quad (17)$$

Воспользовавшись рекуррентными соотношениями (8) можно показать, что

$$\sin 2\theta P_n = \frac{2}{2n+1}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{n}{2n-1}P_{n-2} - \frac{n+1}{2n+3}P_{n+2} - \frac{2n+1}{(2n-1)(2n+3)P_n}\right),$$

$$\cos 2\theta P_n = \frac{2}{2n+1}\left(\frac{n(n-1)}{2n+1}P_{n-2} + \frac{(n+1)(n+2)}{2n+3}P_{n+2} - \frac{2n+1}{(2n-1)(2n+3)P_n}\right). \quad (18)$$

Подставляя (18) в (17) и приравнивая коэффициенты при $dP_n/d\theta$, получаем систему алгебраических уравнений относительно A_n и B_n. Условие существования нетривиальных решений ее приводит к функциональному уравнению.

$$y_0 h_n^{(1)}(y_0) F_{U,n} = \left(y_0 h_{n-1}^{(1)}(y_0) - n h_n^{(1)}(y_0)\right) G_{U,n}, \quad (19)$$

где

$$F_{U,n} = y_U j_{n-1}(y_U) - n j_n(y_U) + 2\varepsilon_- y_0^2 \left(\frac{(n+2)\rho_n j_{n+2}(y_U)}{(2n+3)(2n+5)} - \frac{(n-1)g_n j_{n-2}(y_U)}{(2n-1)(2n-3)} - \frac{j_n(y_U)}{(2n-1)(2n-3)}\right),$$

$$G_{U,n} = \left[\varepsilon_+ - \frac{\varepsilon_-}{2n+3}\right] j_n(y_U) + 2\varepsilon_-\left(\frac{y_U j_{n-1}(y_U)}{2(2n-1)(2n+3)} + \frac{nR_{1,n}g_n}{(2n-1)(2n-3)} + \frac{(n+1)R_{2,n}\rho_n}{(2n+3)(2n+5)}\right),$$

$$R_{1,n} = \left(\frac{(2n-1)^2}{y_U} - y_U\right) j_{n-1}(y_U) - (2n-1) j_n(y_U),$$

$$R_{2,n} = \left(\frac{(2n+3)^2}{y_U} - y_U\right) j_{n+1}(y_U) - (2n+3) j_n(y_U).$$

Совместное решение (15) и (19) определяет в анизотропном шаре из одноосного кристалла радиальную компоненту волнового вектора и резонансную частоту колебаний TM-моды при произвольных значениях полярного индекса.

В изотропном шаре существуют высокодобротные колебания, характеризуемые большими значениями полярного индекса. Важнейшей специфической особенностью их является сосредоточение энергии поля колебаний в области, примыкающей к поверхности шара [4]. Высокая добротность и обнаружение областей энергии позволили предложить ряд устройств с новыми уникальными свойствами, измерить предельно малые потери в кристаллах и жидкостях [5–8].

При $n \gg 1$ выражения (11), (15) значительно упрощаются и приводятся к виду

$$A_{n+1} \approx \zeta A_{n-1}, \quad \zeta = \pm 1,$$

$$[\varepsilon_+ - \zeta\varepsilon_-] q_U^2 \approx \varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz} k^2. \quad (20)$$

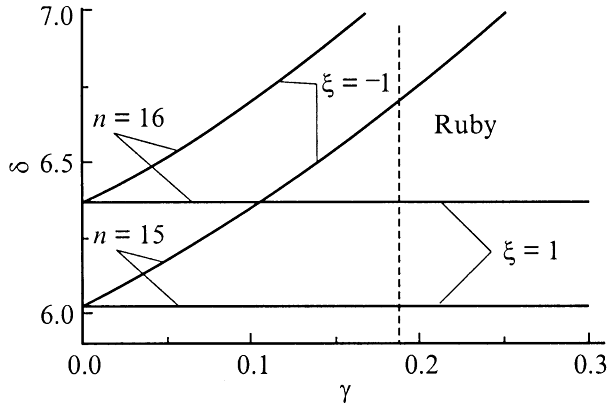

Рис. 1. Зависимость безразмерной резонансной частоты δ TM-моды анизотропного шара от параметра γ при $\varepsilon_{zz} = 11.53$.

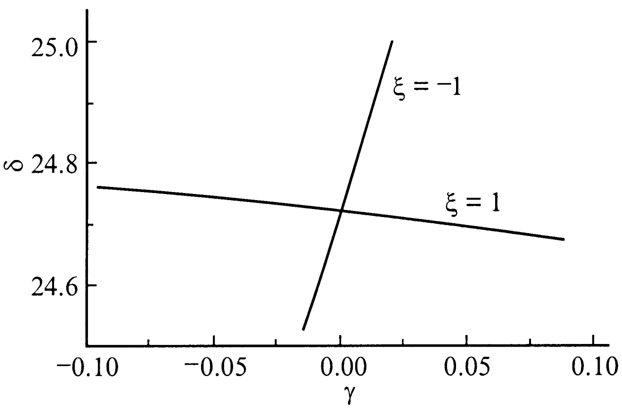

Рис. 2. То же, что и на рис. 1, при $\varepsilon_{zz} = 2.04$.

Последнее соотношение определяет компоненту волнового вектора для TM-мод

$$q_U = k\sqrt{\frac{\varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz}}{\varepsilon_+ - \zeta\varepsilon_-}}. \quad (21)$$

Соотношение (19) приводится к виду

$$\left((y_V^2 - 2\varepsilon_- y_0^2) j_{n-1}(y_V) - n y_V j_n(y_V)\right) h_n^{(1)}(y_0) = (\varepsilon_+ - \zeta\varepsilon_-) y_V j_n(y_V) \left(y_0 h_{n-1}^{(1)}(y_0) - n h_n^{(1)}(y_0)\right). \quad (22)$$

В дисперсионное уравнение (22) входит параметр ζ, принимающий значения $+1$ и -1. Это соответствует тому, что в шаре под влиянием анизотропии возникают два независимых колебания TM-моды с различными частотами.

На рис. 1 представлена зависимость приведенной резонансной частоты $\delta = r_0\omega/c$ от параметра $\gamma = (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xx})/\varepsilon_{xx}$ при n, равном 15 и 16; $r_0 = 1\,\mathrm{cm}$; $\varepsilon_{zz} = 11.53$; $\mathrm{tg}\,\delta = 10^{-4}$. В изотропном шаре ($\gamma = 0$) возникают одно колебание TE-моды и одно колебание TM-моды. Влияние анизотропии ($\gamma \neq 0$) приводит к

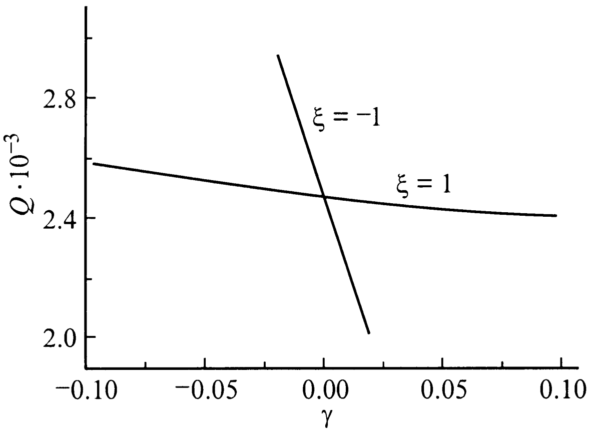

Рис. 3. Зависимость добротности Q резонансных колебаний TM-моды анизотропного шара от параметра γ при $\varepsilon_{zz} = 2.04$.

расщеплению TM на два колебания с различными частотами и радиальными компонентами волнового вектора ω. В частности, для шара из рубина их частоты равны $(n = 15)$ 28.7 и 32.3 GHz.

На рис. 2 и 3 представлена зависимость безразмерной частоты δ и добротности Q от параметра γ анизотропного шара при $\varepsilon_{zz} = 2.08$ (тефлон), $r_0 = 3.9$ cm, $n = 30$, $\mathrm{tg} = 1.786 \cdot 10^{-4}$. Известно, что тефлон является изотропным материалом. Влияние анизотропии, возникающей при его изготовлении, приводит к расщеплению резонансных частот TM-колебаний, что может быть использовано на практике.

Список литературы

[1] *Stratton J.A.* Electromagnetic Theory. New York: Mc Graw-Hill, 1941. 554 p.
[2] *Makkinejad Babak, Ford George W.* // Phys. Rev. 1991. Vol. B. 44. P. 8536–8546.
[3] *Gastine M., Gourtois L., Dormann J.* // IEEE Trans. On Microwave Theory and Tech. 1967. Vol. MTT-15. N 12. P. 694–700.
[4] *Вайнштейн Л.А.* Открытые резонаторы и открытые волноводы. М.: Сов. радио, 1966. 475 с.
[5] *Брагинский В.В., Ильченко В.С.* // ДАН СССР. 1987. Т. 293. № 6. С. 1358–1361.
[6] *Sottini S., Giogetti E., Marcelino C.* // Pure and Apll. Opt. 1992. Vol. 1. N 6. P. 359–372.
[7] *Ганапольский Е.М., Голик А.В., Королюк А.П.* // ФНТ. 1993. Т. 19. № 11. С. 1255–1262.
[8] *Харьковский С.Н., Когут А.Е., Кутузов В.В.* // Письма в ЖТФ. 1997. Т. 23. Вып. 15. С. 25–29.