

01;03

## Ветвление равновесных форм капель в электрическом поле

© В.А. Саранин

Глазовский государственный педагогический институт им. В.Г. Короленко, 427600 Глазов, Удмуртия, Россия

(Поступило в Редакцию 19 октября 1998 г.)

Показано, что у незаряженных и заряженных капель жидкостей во внешнем электрическом поле могут существовать две ветви устойчивых в смысле существования минимума энергии эллипсоидальных форм, между которыми возможны жесткие переходы, сопровождающиеся гистерезисом.

Исследования поведения заряженных и незаряженных капель жидкости в электрическом поле важны в связи с тем, что такие капли играют решающую роль во многих технологических и природных процессах [1]. Хорошо известно, что сферическая форма заряженной проводящей капли становится неустойчивой при достижении зарядом критического значения (Рэлей [2]). Так же и равновесная форма проводящей капли в виде вытянутого эллипсоида вращения становится неустойчивой при достижении полем критической величины (Тейлор [3]). Аналогичное же изучение поведения капель магнитных жидкостей во внешнем магнитном поле показало, что наравне с неустойчивостью одних эллипсоидальных форм существует семейство других, устойчивых форм, т. е. имеет место ветвление равновесных форм капель, сопровождающееся гистерезисом [4]. Ниже показано, что у незаряженных и заряженных капель в электрическом поле также в принципе возможно ветвление равновесных эллипсоидальных форм, сопровождающееся гистерезисом.

Рассмотрим сначала случай диэлектрической капли в однородном электрическом поле. Будем считать, что капля имеет форму вытянутого эллипсоида вращения так, что его большая полуось параллельна линиям напряженности. Действием силы тяжести пренебрежем.

Для определения возможных равновесных эллипсоидальных форм капель найдем потенциальную энергию эллипсоида во внешнем поле. Если поле однородно, то электрическая составляющая энергии равна [5]

$$W_e = -\frac{1}{2}E_0 P_x = -\frac{2\pi\varepsilon_0 ab^2 E_0 (\varepsilon - 1)}{3(1 + (\varepsilon - 1)n_x)}, \quad (1)$$

$P_x$  — проекция дипольного момента эллипсоида на направление поля;  $\varepsilon$  — отношение диэлектрических проницаемостей капли и внешней среды;  $a, b$  — большая и меньшая полуоси эллипсоида;  $n_x$  — коэффициент деполяризации, который выражается через эксцентриситет  $e$  так:

$$n_x = \frac{1 - e^2}{2e^3} \left( \ln \left( \frac{1 + e}{1 - e} \right) - 2e \right).$$

С учетом выражения для площади поверхности эллипсоида вращения поверхностную потенциальную энергию капли можно записать в виде

$$W_\alpha = 2\pi\alpha R_0^2 \left( \beta^{-2/3} + \frac{\beta^{4/3} \arctg \sqrt{\beta^2 - 1}}{\sqrt{\beta^2 - 1}} \right) \equiv 2\pi\alpha R_0^2 S_x. \quad (2)$$

Здесь  $\alpha$  — коэффициент поверхностного натяжения;  $R_0$  — радиус шара, равного по объему эллипсоиду  $R_0^3 = ab^2$ . Отношение полуосей  $\beta = a/b$  связано с эксцентриситетом соотношением  $e = \sqrt{\beta^2 - 1}/\beta$ . В качестве единицы измерения энергии выберем  $2\pi\alpha R_0^2$ . Тогда безразмерную полную энергию эллипсоида можно представить в форме

$$W = S_x - \frac{4(\varepsilon - 1)N^2}{3(1 + (\varepsilon - 1)n_x)}, \quad N^2 \equiv \frac{\varepsilon_0 E_0^2 R_0}{4\alpha}. \quad (3)$$

Возможные равновесные формы эллипсоида удовлетворяют условиям  $\partial W / \partial \beta = 0, \partial^2 W / \partial \beta^2 > 0$ . Компьютерная минимизация энергии дает зависимости логарифма отношения полуосей эллипсоида в точке минимума  $W$  от квадрата безразмерной напряженности поля (точнее от произведения  $E_0^2 R_0$ ), показанные на рис. 1. Устойчивым эллипсоидальным формам в смысле существования  $\min W$  соответствуют ветви 1, 2 ( $\varepsilon = 81$ ) и 3, 4 ( $\varepsilon = 40$ ). Видно, что существуют семейства эллипсоидов, равновесие которых неустойчиво: для  $\varepsilon = 81$ , например, это интервал  $1.83 < \beta < 12.8$ . Между двумя ветвями устойчивых равновесных форм эллипсоидов существуют жесткие переходы (они показаны штриховыми линиями со стрелками) и гистерезис: переход к более вытянутым формам происходит при больших  $N^2$ , чем обратный. Область параметров, в которой равновесие эллипсоидов

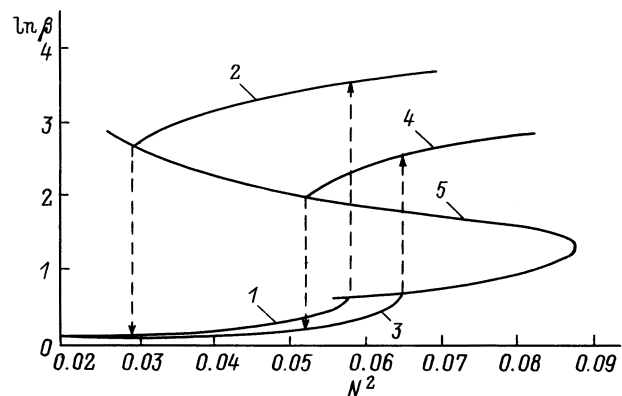
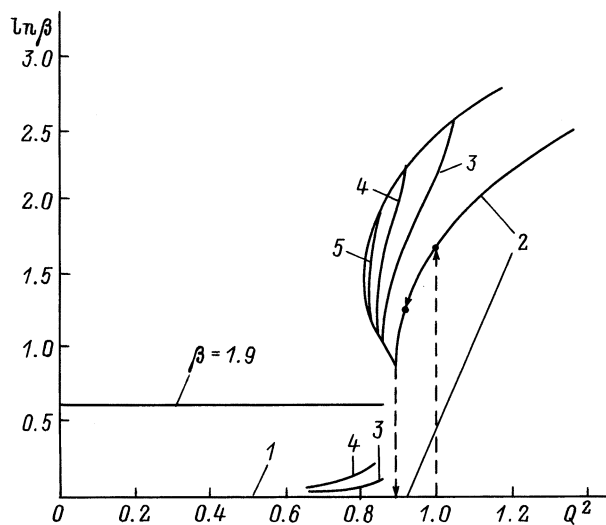


Рис. 1. Зависимости логарифма отношения полуосей устойчивых эллипсоидальных форм капель от безразмерного квадрата напряженности внешнего поля:  $\varepsilon = 81$  (1, 2);  $\varepsilon = 40$  (3, 4); 5 — огибающая области неустойчивых форм.



**Рис. 2.** Зависимости логарифма отношения полуосей устойчивых эллипсоидальных форм проводящих капель от безразмерного квадрата заряда капель при различных величинах безразмерного квадрата напряженности поля  $N^2 = 0$  (1, 2); 0,002 (3), 0,003 (4), 0,0036 (5).

неустойчиво, зависит от отношения диэлектрических проницаемостей капли и окружающей среды и показана на рис. 1 кривой 5. Крайняя правая точка на этой линии соответствует  $\varepsilon \approx 20$ , т.е. при  $\varepsilon < 20$  минимум потенциальной энергии существует для любых жидких вытянутых эллипсоидов вращения, находящихся во внешнем электрическом поле, и в этом смысле все они устойчивы [6].

Рассмотрим теперь случай заряженной проводящей капли во внешнем электрическом поле. По-прежнему будем считать каплю вытянутым эллипсоидом вращения. В этом случае электрическая часть потенциальной энергии капли складывается из собственной электрической энергии и энергии поляризованного тела во внешнем поле (энергия взаимодействия заряда капли с внешним полем идет на увеличение кинетической энергии капли)

$$W_e = \frac{q^2}{2C} - \frac{E_0 P_x}{2}. \quad (4)$$

Здесь второе слагаемое вновь дается формулой (1), в которой нужно взять предел  $\varepsilon \rightarrow \infty$ , соответствующий проводящей капле. Учитывая выражение для емкости вытянутого эллипсоида вращения [5], после обезразмеривания полной потенциальной энергии капли получим

$$W = S_x + \frac{4Q^2}{C_x} - \frac{4N^2}{3n_x}, \quad Q^2 \equiv \frac{kq^2}{16\pi\alpha R_0^3},$$

$$\frac{1}{C_x} = \frac{\beta^{1/3}}{\sqrt{\beta^2 - 1}} \ln \left( \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 - 1}}{\beta - \sqrt{\beta^2 - 1}} \right), \quad k \equiv 1/4\pi\varepsilon_0. \quad (5)$$

На рис. 2 представлены зависимости логарифма отношения полуосей устойчивых равновесных форм эллипсоидов в зависимости от квадрата безразмерного

заряда капли  $Q^2$  при различных значениях безразмерного параметра поля  $N$ , полученные минимизацией  $W$ . Цифрам соответствуют следующие величины квадрата параметра поля: 1, 2 —  $N = 0$ ; 3 —  $N^2 = 0.002$ ; 4 —  $N^2 = 0.003$ ; 5 —  $N^2 = 0.0036$ . Случай  $N = 0$  соответствует заряженной капле в отсутствие поля. В этом случае одна из равновесных форм — сфера  $\beta = 1$ , ее равновесие становится неустойчивым при  $Q^2 = 1$  (результат Рэля [2]). Обратный переход от вытянутого эллипсоида к сфере совершается при  $Q^2 \approx 0.88$ . Видно, что с увеличением поля верхняя ветвь существования равновесных эллипсоидов значительно уменьшается. Например, при  $N^2 = 0.003$  она соответствует интервалу  $3 \lesssim \beta \lesssim 10$ , а при  $N_*^2 \approx 0.0045$  исчезает совсем. Соответствующие предельные значения  $Q_*^2 \approx 0.80$  и  $\beta_* \approx 4.4$ . Прямая  $\beta = 1.9$  соответствует предельным устойчивым формам незаряженных проводящих капель во внешнем электрическом поле (по Тейлору [3]).

В заключение отметим, что в реальных условиях эксперимента на фоне устойчивой эллипсоидальной моды возможно развитие неустойчивости по отношению к высокочастотным возмущениям [1], однако их развитие может быть подавлено в случае высоковязких жидкостей или капель малого размера. В частности, эксперименты по наблюдению жестких переходов и гистерезиса в магнитном поле проводились с каплями магнитной жидкости весьма малых размеров ( $R_0 = 15 \mu\text{m}$ ) [4].

## Список литературы

- [1] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.
- [2] Rayleigh. // Phil. Mag. 1882. Vol. 14. P. 184–186.
- [3] Taylor G.I. // Proc. Roy. Soc. 1964. Vol. A280. P. 383–397.
- [4] Блум Э.Я., Майоров М.М., Цеберс А.О. Магнитные жидкости. Рига: Зинатне, 1989.
- [5] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.
- [6] Cheng K.J., Chaddock J.B. // Phys. Lett. 1984. Vol. 106A. N 1, 2. P. 51–53.