07;12

Стабилизация разностной частоты опорного и сигнального резонаторов в гравитационно-волновом детекторе ”Дулкын”

© С.Н. Андрианов, А.Б. Балакин, Р.А. Даишев, Г.В. Кисунько, З.Г. Мурзаханов, А.Ф. Скочилов

Научный центр гравитационно-волновых исследований ”Дулкын” АН Татарстана,
420503 Казань, Россия

(Поступило в Редакцию 15 мая 1998 г.)

Показано, как стабилизация разностной частоты оптических излучений, генерируемых в опорном и сигнальном резонаторах лазерно-интерферометрического гравитационно-волнового детектора ”Дулкын”, приводит к эффективной переоценке основных параметров, характеризующих ширину линии лазерного излучения, ширину линии пассивного резонатора, минимальную мощность лазера, необходимую для выделения полезного сигнала из шумов, обусловленных естественными флуктуациями.

Введение

Комплекс проблем, связанных с устранением внешних помех, минимизацией внутренних флуктуаций и выделением слабого сигнала на фоне шума, является ключевым препятствием для детектирования гравитационных волн (ГВ). Мировое гравитационно-волновое сообщество не одно десятилетие тратит огромные интеллектуальные силы и материальные средства на исследование этих проблем. Для каждого типа ГВ детекторов, известных ныне, составлены каталоги помех и шумов, а их основные классы подробно описаны теоретически, промоделированы на компьютерных системах и протестированы экспериментально. Однако иерархия помех и шумов весьма индивидуальна и несет на себе отпечаток конструкционных особенностей ГВ детектора, вот почему любые новые технические предложения требует пересмотра и переоценки роли тех или иных шумов. Именно такая переоценка необходима, когда речь идет о помехоустойчивости компактного двухрезонаторного пентагонального лазерно-интерферометрического ГВ детектора ”Дулкын”, разработанного в Казанском научном центре гравитационно-волновых исследований [1,2]. Причин для такого пересмотра несколько.

Во-первых, ГВ детектор ”Дулкын” благодаря размещению активной среды внутри интерферометра компактен и располагается на едином основании, что существенно отличает его от длиннобазовых пассивных лазерных интерферометров. Во-вторых, основная идея проекта ”Дулкын” связана с детектированием периодических низкочастотных ГВ сигналов и рассчитана на длительное когерентное накопление этих сигналов. В-третьих, для повышения отношения сигнал/шум в ГВ детекторе ”Дулкын” предусмотрено использование системы автоматической стабилизации разностной частоты оптических излучений, генерируемых в опорном и сигнальном резонаторах [2,3]. Именно третье обстоятельство и является основным предметом дискуссии в данной работе.

По поводу возможности применения частотно-фазовой стабилизации в ГВ детекторах существуют полярные мнения; одно из крайних мнений состоит в том, что система стабилизации уничтожает обнаруживаемый ГВ сигнал в наблюдаемой интерференционной картине. С нашей точки зрения, это мнение сформировалось в процессе разработки длиннобазовых лазерно-интерферометрических ГВ детекторов. Эти детекторы ориентированы на одиночные импульсные ГВ сигналы (вспышки сверхновых и т. д.), поэтому для их обнаружения необходимо, чтобы мгновенное отношение сигнал/шум было больше еденицы. Данный факт исключает возможность применения системы активной стабилизации концевых зеркал интерферометра на частоте ожидаемого ГВ сигнала.

В рассматриваемом нами ГВ детекторе ”Дулкын” ситуация иная: мгновенное отношение сигнал/шум может быть много меньше единицы, поскольку детектируемый ГВ сигнал является непрерывным и периодическим и требуемое для обнаружения конечное значение отношения сигнал/шум (большее единицы) достигается в результате длительного когерентного накопления. Наши экспериментальные исследования показали, что для двухканального лазерно-интерферометрического ГВ детектора ”Дулкын” можно создать систему стабилизации, которая не уничтожает полезный периодический сигнал при условии, что его амплитуда по крайней мере на два–три порядка ниже, чем так называемый ”порог стабилизации” (сообщение о данных результатах направлено в журнал ”Письма в ЖТФ”).

Но мы видим проблему не только в том, можно или нельзя использовать автоматическую систему стабилизации в ГВ детекторе, но и в том, как действие вышеупомянутой системы сказывается при оценке отношения сигнал/шум, а также при оценке минимальной мощности оптического квантового генератора, необходимой для выделения полезного сигнала из шумов, обусловленных естественными флуктуациями частоты и фазы оптического излучения.

Проводя расчеты, мы следуем такому ходу рассуждений. Уравнения генерации оптического излучения в компактном пентагональном двухконтурном лазерном интерферометре включают в себя уравнения эволюции для матрицы плотности, уравнения Максвелла и условия, фиксирующие граничный режим [2,4].

Основной канал воздействия поля ГВ проявляется в том, что ГВ эффективно изменяет показатель преломления вдоль оптического пути [2], так что параметры ГВ входят в уравнения Максвелла в виде медленно меняющихся коэффициентов при векторе электрического поля и его производных.

Система частотно-фазовой стабилизации откликается на любые перемещения зеркал интерферометра и тем самым вносит свои коррективы в граничный режим, изменяя при этом собственные частоты сигнального и опорного резонаторов $\Omega_{1,2}(t)$.

Для процессов, протекающих внутри интерферометра, существует следующая шкала времен: $\tau_a = 10^{-8}$ s — время релаксации элементов матрицы плотности, оно определяет естественную ширину линии излучения атомов активной среды; $\tau_r = 10^{-8}$ s — время пробега фотона по периметру интерферометра; $\tau_g = 10^{-6}$ s — время установления стационарной генерации в кольцевом лазере; $\tau_0 = 10^{-4}$ s — постоянная времени в системе стабилизации для наиболее агрессивных помех; $\tau_{GW} = T_g = 10^3$ s — период гравитационной волны.

Наличие указанной шкалы времен позволяет расцепить основополагающую систему уравнений; мы находим матрицу плотности, а затем микроскопическую поляризацию атомов, считая электромагнитное поле заданным; уравнения Максвелла с учетом полученной макроскопической поляризации мы решаем, считая фиксированным граничный режим и задав мгновенные значения $\Omega_1(t)$, $\Omega_2(t)$; стабилизация граничного режима происходит при фиксированном значении медленно меняющегося гравитационного поля.

Система стабилизации, частично компенсируя флуктуационные перемещения зеркал, эффективно снижает уровень среднеквадратичных флуктуаций, что эквивалентно повышению добротности оптического контура.

Возникает естественный вопрос, какие величины необходимо использовать в качестве ширины линии излучения лазерной системы, а также в качестве добротности оптического контура в условиях работы системы стабилизации граничного режима.

Стабилизация вне зоны синхронизации

Если исходить из модели генерации двухволнового режима, описанной в [2], то при работе вблизи зоны синхронизации электродинамические уравнения для разности фаз Φ оптического излучения в сигнальном и опорном резонаторах можно представить в виде

$$\dot{\Phi} = \left[\Delta\Omega(t) + \Delta\nu(t) + \Delta\omega_{GW}\right] - M\sin\Phi, \qquad (1)$$

где M — коэффициент, характеризующий линейную связь ортогональных оптических мод; $\Delta\omega_{GW} = h(t)\omega_0\zeta$ — гравитационно индуцированный сдвиг частоты генерации; $h(t)$ — безразмерная амплитуда ГВ; ω_0 — центральная частота контура усиления атомов активной среды; ζ — множитель, зависящий от формы резонатора ($\zeta = \sqrt{5} - 2$ для пентагона [1,2]); $\Delta\nu(t)$ — суммарный шумовой источник, равный мгновенному значению флуктуаций разностной частоты за счет всех типов помех и шумов; $\Delta\Omega(t) = \Omega_1(t) - \Omega_2(t)$ — мгновенная разность собственных частот сигнального и опорного резонаторов, определяемая мгновенными значениями периметров резонаторов и включающая изменения, внесенные системой стабилизации.

Подчеркнем, что выражение в квадратных скобках есть источник для отклонения фазы; этот источник содержит детерминированную периодическую часть (третье слагаемое), стохастическую часть (второе слагаемое) и регулируемую часть (первое слагаемое). Конечно, такое представление является чисто условным, поскольку только теоретически мы можем явно разделить последствия флуктуационного сдвига зеркал и компенсирующих сдвигов, вызванных системой стабилизации.

Очевидно, что даже при самой совершенной системе стабилизации невозможно обратить в нуль сумму, стоящую в квадратных скобках, ее можно только минимизировать до определенного порога Π ("порог стабилизации"). Рассмотрим следующую цепочку неравенств:

$$|\Delta\Omega(t)+\Delta\nu(t)| \le \Pi \ll \max|\nu(t)|, \quad |\Delta\omega_{GW}| \ll \Pi. \qquad (2)$$

Здесь $\max|\Delta\nu(t)|$ — это верхний порог нередуцированного шума (при работе без системы стабилизации). Система стабилизации дает возможность зафиксировать сумму $\varepsilon(t) \equiv \Delta\Omega(t) + \Delta\nu(t)$ на уровне $|\varepsilon(t)| \le \Pi$, причем верхний порог для редуцированного шума ε на несколько порядков ниже, чем $\max|\Delta\nu(t)|$. Наконец, $|\Delta\omega_{GW}| \ll \Pi$, т. е. среднеквадратичное значение редуцированного шума намного выше амплитуды ГВ сигнала.

Рассмотрим случай, когда $M \ll \Pi$, т. е. осуществляется режим работы лазерной системы вне зоны синхронизации. Спектральная плотность $S_\varepsilon(\omega)$ редуцированного шума $\varepsilon(t)$ определяется спектральной плотностью $S_\nu^{(0)}(\omega)$ исходного шума $\Delta\nu(t)$ и эффективной спектральной плотностью внутренних шумов системы стабилизации $S_\nu^{(n)}(\omega)$ [5,6]

$$S_\varepsilon(\omega) = S_\nu^{(0)}(\omega)\frac{1}{|1+G(\omega)|^2} + S_\nu^{(n)}(\omega)\left|\frac{G(\omega)}{1+G(\omega)}\right|^2, \qquad (3)$$

где $G(\omega)$ — коэффициент усиления системы автоподстройки частоты (АПЧ).

Коэффициент усиления можно записать в виде [6]

$$G(\omega) = \frac{K}{1+i\omega\tau_0}, \qquad (4)$$

где K — коэффициент передачи на низких частотах, τ_0 — постоянная передачи цепи.

Подстановка выражения (4) в формулу (3) дает

$$S_\varepsilon(\omega) = S_\nu^{(0)}(\omega)\frac{1+(\omega\tau_0)^2}{(1+K)^2+(\omega\tau_0)^2} + S_\nu^{(n)}(\omega)\frac{K^2}{(1+K)^2+(\omega\tau_0)^2}. \qquad (5)$$

Для флуктуационного приращения фазы за время τ из уравнения (1) при $M = 0$ будем иметь

$$\delta\phi = \int_0^\tau \Delta\nu(\xi) d\xi. \quad (6)$$

Тогда для среднеквадратичного приращения фазы

$$\chi(\tau) = \frac{1}{2}\langle|\delta\phi|^2\rangle$$

получим

$$\chi(\tau) = \int_0^\tau (\tau - \xi) R_\nu^{(2)}(\xi) d\xi, \quad (7)$$

где

$$R_\nu^{(2)}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} R_\nu^{(1)}[t, t+\tau] dt \quad (8)$$

— функция корреляции второго рода, совпадающая в случае стационарных процессов с функцией корреляции первого рода

$$R_x^{(1)}[t_1, t_2] = \langle x(t_1) x(t_2)\rangle. \quad (9)$$

Учитывая, что корреляционная функция второго рода выражается через спектральную плотность шума $S_\varepsilon(\omega)$ следующей формулой:

$$R_\nu^{(2)}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_\varepsilon(\omega)\cos(\omega\tau) d\omega, \quad (10)$$

выражение (7) можно переписать после интегрирования по частям как

$$\chi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos(\omega\tau)}{\omega^2} S_\varepsilon(\omega) d\omega$$

$$= 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_\varepsilon(\omega)}{\omega^2} \sin^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) d\omega. \quad (11)$$

В случае белого шума из формулы (11) при учете выражения (5) получим

$$\chi(\tau) = \frac{D_0/2}{(1+K)^2}\left\{|\tau| + \frac{K(K+2)}{K+1}[1 - e^{-\frac{\tau}{\tau_0}(1+K)}]\right\}$$

$$+ \frac{D_n K^2/2}{(1+K)^2}\left\{|\tau| - \frac{\tau_0}{1+K}[1 - e^{-\frac{\tau}{\tau_0}(1+K)}]\right\}, \quad (12)$$

где D_0 и D_n — постоянные белого шума лазера и схемы АПЧ соответственно.

Отсюда видно, что при больших K флуктуации разности фаз излучения в контуре лазерного интерферометра с АПЧ ограничены собственным шумом схемы АПЧ, который в свою очередь может быть невелик при использовании кварцевого генератора в качестве опорного.

Учитывая, что $D_0 = \Delta\omega$, где $\Delta\omega$ — спектральная ширина излучения лазера, и пренебрегая собственным шумом системы АПЧ, при условии $K \gg 1$, $|\tau| = T \gg K\tau_0$ из выражения (12) получим

$$\langle|\delta\phi|^2\rangle = \Delta\omega^* T, \quad (13)$$

где $\Delta\omega^* = \Delta\omega/(1+K)^2$.

Выражение (13) представляет собой известный закон для диффузии фазы, обусловленной конечной шириной линии лазерного излучения. В (13) роль ширины линии играет величина $\Delta\omega^*$, которую можно назвать эффективной шириной линии лазерного излучения при работе системы стабилизации. Таким образом, для уменьшения флуктуаций фазы необходимо либо использовать лазерную систему с очень узкой линией генерации, либо применять систему АПЧ, причем если в эксперименте измеряются только значения фазы и нет никакой другой информации, то принципиально невозможно указать, по какой из двух упомянутых причин произошло наблюдаемое уменьшение фазового шума. Согласно известной формуле [7],

$$\Delta\omega = \frac{4\hbar\omega_0}{P}\gamma^2, \quad (14)$$

где P — мощность лазерного излучения, $\hbar$ — постоянная Планка, $\gamma = cp/L$ — ширина собственной линии пассивного резонатора с периметром L и потерями за проход p (c — скорость света).

Поэтому формулу (13) можно также представить в виде

$$\langle|\delta\phi|^2\rangle = \frac{4\hbar\omega_0}{P}(\gamma^*)^2 T. \quad (15)$$

Здесь введена величина $\gamma^* = \gamma/(1+K)$, которую по аналогии с $\Delta\omega^*$ можно считать эффективной шириной линии пассивного резонатора при работе системы стабилизации. Поскольку при больших K величина $\gamma^* \ll \gamma$, то из этого следует, что использование системы АПЧ эквивалентно сужению ширины линии пассивного резонатора, т. е. увеличению его добротности. Таким образом, для учета действия системы стабилизации при вычислении, например отношения сигнал / шум или минимальной мощности лазерного излучения, можно использовать известные формулы, но заменить в них $\Delta\omega$ на $\Delta\omega^*$ и γ на γ^*.

Оценим мощность лазерного излучения в ГВ детекторе "Дулкын", необходимую для уверенного выделения ГВ сигнала из шумов, обусловленных спонтанным излучением атомов активной среды. В работах [8,9] приведены формулы, по которым можно оценить минимальную мощность $P_{\min}$ лазерного излучения

$$P_{\min} \simeq \frac{\hbar\omega_0}{(\Delta\omega_{GW})^2 T}\gamma^2. \quad (16)$$

В соответствии со сказанным выше в условиях работы системы стабилизации необходимо заменить γ на γ^*. При $\omega_0 = 3\cdot 10^{15}$ rad / s, $L = 3.5$ m, $p = 10^{-2}$, $h = 10^{-22}$, $T = 10^7$ s, $K = 10^3$ получим $P_{\min} \simeq 10^{-4}$ W. Если же стабилизация отсутствует ($K = 0$), то получаем $P_{\min} \simeq 10^2$ W. Таким образом, в ГВ детекторе "Дулкын" при использовании системы стабилизации разностной частоты необходимы мощности лазерного излучения порядка милливатт, что характерно для гелий-неоновых лазеров, которые и предполагается использовать.

Стабилизация внутри зоны синхронизации

Если выполнено условие $M \gg \Pi$, то система стабилизации вводит лазерную систему в зону синхронизации [2] и в этом случае

$$\Phi = \pi n + \delta\phi(t)$$

(n — целое число), а уравнение на $\delta\phi(t)$ имеет вид

$$\frac{d\delta\phi}{dt} = h(t)\omega_0 - M\delta\phi + \varepsilon(t). \quad (18)$$

Полагаем, что

$$h(t) = h\cos(\Omega_g t), \quad (19)$$

где Ω_g — частота гравитационного излучения.

Решая это уравнение, получим

$$\Delta\phi = \phi_s + \delta\phi, \quad (20)$$

$$\phi_S = \frac{h\omega_0 M}{M^2+\Omega_g^2}\left[\cos(\Omega_g\tau) - e^{-M\tau}\right] + \frac{h\omega_0\Omega_g}{M^2+\Omega_g^2}\sin(\Omega_g\tau), \quad (21)$$

$$\delta\phi = \int_0^\tau dt e^{-Mt}\varepsilon(\tau - t),$$

где ϕ_s — сигнал, $\delta\phi$ — шум процесса регистрации.

Отсюда для среднего квадрата флуктуации разности фаз будем иметь

$$\langle|\delta\phi|^2\rangle = \int_0^\tau\int_0^\tau e^{-M(\xi+\eta)}R_\nu(\xi-\eta)d\xi d\eta, \quad (23)$$

где $R_\nu(\tau) = \langle\varepsilon(t+\tau)\varepsilon(t)\rangle$ — корреляционная функция флуктуаций частоты.

Проводя замену переменных $\eta' = \eta$, $\xi' = \xi - \eta$, будем иметь

$$\langle|d\phi|^2\rangle = \frac{1}{2M}\int_{-\tau}^{\tau}\left[e^{-|\xi|M} - e^{-(2t-|\xi|)M}\right]R_\nu(\xi)d\xi. \quad (24)$$

Переходя к спектральной плотности флуктуаций частоты $S_\varepsilon(\omega)$, получим

$$\langle|\delta\phi|^2\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{S_\varepsilon(\omega)}{M^2+\omega^2}\left[1+e^{-2M\tau} - 2\cos(\omega\tau)e^{-M\tau}\right]d\omega. \quad (25)$$

В соответствии с формулой (5) спектральная плотность при отсутствии шумов системы АПЧ имеет вид

$$S_\varepsilon(\omega) = S_\nu^{(0)}(\omega)\frac{1+(\omega\tau_0)^2}{(1+K)^2+(\omega\tau_0)^2}. \quad (26)$$

Подставляя выражение (26) в формулу (25), получим в случае белого шума $S_\nu^{(0)} = D/(2\pi)$ следующую формулу:

$$\langle|\delta\phi|^2\rangle = \frac{D}{2M}(1-e^{-2M\tau})\frac{1-M^2\tau_0^2}{(1+K)^2-M^2\tau_0^2} + \frac{D\tau_0}{2(1+K)} \times\left(1+e^{-2M\tau} - 2e^{-M\tau}e^{-(1+K)\frac{\tau}{\tau_0}}\right)\frac{K(K+2)}{(1+K)^2-M^2\tau_0^2}. \quad (27)$$

В отсутствие системы АПЧ ($K = 0$, $\tau_0 = 0$) получаем обычный для зоны синхронизации закон

$$\langle|\delta\phi|^2\rangle = \frac{D}{2M}(1-e^{-2M\tau}). \quad (28)$$

При $K \gg 1$, $M\tau_0 \ll 1$ и $M\tau \gg 1$ формула (27) значительно упрощается

$$\langle|\delta\phi|^2\rangle = \frac{D}{2MK^2}(1+MK\tau_0). \quad (29)$$

Если при этом $\Omega_g t \ll 1$, $M \gg \Omega_g$ и $MK\tau_0 \gg 1$, то для мгновенного отношения сигнал/шум будем иметь

$$q_{\text{inst}} = \frac{h\omega_0}{M}\sqrt{\frac{2K}{D\tau_0}}, \quad (30)$$

откуда при $h\omega_0 = 10^{-7}$, $M = 10\,\text{Hz}$, $K = 10^4$, $\tau_0 = 10^{-4}\,\text{s}$, $D = 10^{-2}\,\text{Hz}$ получим $q_{\text{inst}} = 10^{-3}$ (напомним, что при этом значении полезный сигнал не уничтожается системой стабилизации). Для получения конечного отношения сигнал/шум q_{fin} следует q_{inst} домножить на $\sqrt{N}$: $q_{\text{fin}} = q_{\text{inst}}\sqrt{N} \simeq 3$, где $N = 10^7$ отсчетов по одной секунде каждый. Следовательно, для уверенной регистрации гравитационной волны требуется время накопления порядка 10^7 s.

Заключение

Анализ обсуждаемой проблемы позволяет ответить на конкретный вопрос, поставленный в конце Введения, а также сформулировать принцип переоценки основных параметров оптической подсистемы ГВ детектора "Дулкын" при работе активной системы стабилизации разностной частоты. Исходным пунктом для переоценки параметров является известная формула (3), показывающая уменьшение спектральной плотности флуктуаций частоты при работе системы стабилизации. Расчеты, выполненные на основе этой формулы, показали, что для ширины линии лазерного излучения, обусловленной спонтанными флуктуациями, а также для ширины линии пассивного резонатора получается рабочая формула типа

$$\Gamma^* = \frac{\Gamma}{(1+K)^\Theta}, \quad (31)$$

где $\Theta = 2$ и $\Theta = 1$ в первом и втором случаях соответственно.

Обобщая эту идею, мы полагаем, что любой рассматриваемый параметр Γ^* в условиях стабилизации разностной частоты может быть выражен через Γ с помощью формулы (31), причем параметр Θ зависит от типа исследуемого параметра (Θ может оказаться дробным и даже иррациональным при учете нелинейных эффектов).

Поскольку каталог шумов ГВ детектора "Дулкын" далеко не исчерпывается естественными квантовыми шумами, то нам предстоит систематический анализ роли других помех. Мы уверены, что обоснованный нами простой и наглядный метод переоценки параметров в условиях стабилизации разностной частоты окажется хорошим феноменологическим подспорьем в этой работе. В тех случаях, когда параметр Θ не удастся подсчитать теоретически, для его оценки нам помогут экспериментальные данные, полученные на пентагональном лазерном интерферометре "Дулкын".

Авторы выражают признательность Ф. Турранку, общение с которым и плодотворные дискуссии дали импульс к данной работе.

Список литературы

[1] *Балакин А.Б., Кисунько Г.В., Мурзаханов З.Г., Скочилов А.Ф.* // ДАН России. 1996. Т. 346. № 1. С. 39–42.
[2] *Balakin A.B., Murzakhanov Z.G., Skochilov A.F.* // Gravitation and Cosmology. 1997. Vol. 3. N 1(9). P. 71–81.
[3] *Константинов В.Б., Мурзаханов З.Г., Скочилов А.Ф.* // Изв. вузов. Сер. Физика. 1998. № 2. С. 22–28.
[4] *Балакин А.Б., Мурзаханов З.Г., Скочилов А.Ф.* // Опт. и спектр. 1994. Т. 76. № 4. С. 671–676.
[5] *Cutler L.S., Searle C.L.* // Proc. IEEE. 1966. Vol. 54. N 2. P. 136–154.
[6] *Капланов М.Р., Левин В.А.* Автоматическая подстройка частоты. М.: Госэнергоиздат, 1956.
[7] *Аллен Л., Джонс Д.* Основы физики газовых лазеров. М.: Наука, 1979. 208 с.
[8] *Scully M.O., Gea-Banacloche J.* // Phys. Rev. A. 1986. Vol. 34. N 5. P. 4043–4054.
[9] *Brillet A., Tourrenc P.* // NATO ASI series Gravitational Radiation / Ed. N. Deruelle, T. Piran. Amsterdam; New York; Oxford: North Holland Publ. Company, 1983. P. 475–484.