

Применение формулы Донкина в теории энергоанализаторов. I

© П.Г. Габдуллин, Ю.К. Голиков, Н.К. Краснова, С.Н. Давыдов

Санкт-Петербургский государственный технический университет,
195251 Санкт-Петербург, Россия

(Поступило в Редакцию 1 декабря 1998 г.)

Рассматривается синтез полевых структур с коническими эквипотенциалами на базе аналитического представления Донкина. Установлена иерархия таких структур, приведены примеры эквипотенциальных портретов и решена задача Коши для симметричных полей. В части II исследуются электронно-оптические характеристики некоторых систем этого класса, перспективных для применения в устройстве энергоанализаторов и монохроматоров.

Электростатические поля с коническими эквипотенциалами, сходящимися к общей вершине, так называемые "конусовидные" поля, все чаще встречаются в литературе последних лет. Описаны энергоанализаторы на основе соосных круговых конусов [1], клинчатые призмы [2] и разрезные круговые клинчатые призмы [3], энергоанализатор типа "двугранного угла" [4]. Но все эти частные случаи только приоткрывают широкие перспективы применения этих систем в корпускулярной оптике. Интерес к данному виду полей обусловлен их специфической особенностью — так называемым "телескопическим эффектом". Проявление этого эффекта заключается в том, что при движении в полях конического типа заряженные частицы одной энергии описывают геометрически подобные траектории. При этом, согласно закону Гельмольца–Лагранжа, параллельный в плоскости движения пучок частиц при движении в поле будет сохранять параллельность, но изменит свои геометрические размеры. Так, двигаясь к общей вершине "конусовидного" потенциала, поток заряженных частиц будет сужаться и наоборот, расширяться при движении в обратную сторону.

По своей геометрии "конусовидные" поля можно рассматривать как ближайшее обобщение двумерных планарных полей и подобно последним их теория легко редуцируется к аналитической теории комплексного переменного. Простую и изящную связь такого рода дает формула Донкина [5], позволяющая записать общее решение уравнения Лапласа в случае потенциалов, однородных (по Эйлеру) нулевой кратности, посредством аналитической функции комплексного аргумента $\omega(x, y, z) = u + iv$ строго определенной структуры

$$\Phi(x, y, z) = F(\omega) = F\left(\frac{x + iy}{z + \rho}\right) = \phi_1 + i\phi_2, \quad (1)$$

где

$$\omega = \frac{x + iy}{z + \rho}, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (2)$$

$F(\omega)$ — произвольная аналитическая функция.

Здесь связь с планарными полями очевидна, однако на практике формулу (1) не используют, предпочитая описание "конусовидных" полей в полярных координатах,

ибо в них потенциал Φ выражается через привычные угловые координаты θ, φ . Между тем представление (1) имеет свои богатые аналитические возможности, и в данной работе мы их анализируем по крайней мере в очевидных проявлениях.

Классификация аналитических структур

Выражение (1) можно рассматривать как обобщение понятия комплексного потенциала для планарных полей, перенесенного на "конические" поля. Описание планарных полей с помощью одной функции простого комплексного аргумента $\omega = x + iy$ позволяет ввести очень удобную и естественную иерархическую классификацию полевых структур по аналитическому признаку. Это в первую очередь целые положительные и отрицательные степени ω^n , приводящие к прямым и обратным мультиполям, экспоненциальная и логарифмическая функции от ω : e^ω и $\ln \omega$ и ряд простейших комбинаций из этого базиса. Распространение этого принципа на более сложный аргумент Донкина (2) порождает свою классификацию "конических" полей со спецификой геометрической и физической интерпретации. Как известно, в случае планарных полей комплексный потенциал в виде линейной функции по аргументу $\omega = x + iy$ порождает поле плоского конденсатора, но в ситуации "конусовидных" полей линейная функция по аргументу Донкина дает новый нетривиальный тип поля. Пусть для простоты

$$F = \omega = \frac{x + iy}{z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \quad (3)$$

В качестве скалярного потенциала возьмем вещественную часть этого выражения и положим

$$\Phi = \frac{x}{z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \quad (4)$$

Полагая $x = 0$, мы обнаруживаем, что плоскость uz играет роль нулевой эквипотенциали всюду, за исключением полуоси $x = y = 0, z < 0$, в окрестности которой уже намечается многозначность. Чтобы составить наглядное представление о форме (сечении)

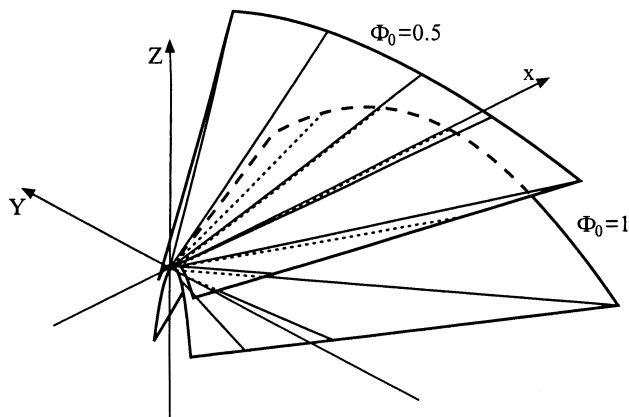


Рис. 1. Вид эквипотенциальных поверхностей поля (4) при $\Phi_0 = 1$ и $\Phi_0 = 0.5$.

конических эквипотенциалей в данном случае выгодно пересечь всю совокупность их подвижной плоскостью $x = x_0$. Если $\Phi = \Phi_0$ — номер эквипотенциала, то ее сечение описывается следующим простым выражением:

$$z = \frac{x_0}{2} \left(\frac{1}{\Phi_0} - \Phi_0 \right) - \frac{\Phi_0}{2x_0} y^2, \quad (5)$$

из которого следует, что эквипотенциалы имеют параболическое сечение "рогами вниз" (рис. 1), причем по мере приближения $x_0 \rightarrow 0$ все они постепенно вырождаются по форме (заостряются) и сливаются в луче $z < 0, x = y = 0$. Весь эквипотенциальный портрет симметричен относительно плоскости xz и асимметричен относительно плоскости yz , ибо по y (4) есть функция четная, а по x — нечетная. Слияние всех эквипотенциалей не только в вершине $x = y = z = 0$, но и на луче $z < 0$ придает этому потенциалу характер своеобразного "конусовидного" диполя. Его электронно-оптические характеристики будут описаны в части II. Вариант комплексного потенциала $F = (a + ib) \cdot \omega$ перемешивает вещественную и мнимую части выражения (3), но поворотом вокруг оси z и перенормировкой эквипотенциалей эти случаи приводятся друг к другу, и мы не получаем ничего принципиально нового в структуре поля.

Рассмотрим теперь обратный потенциал $F = 1/\omega$, имеем после вычисления

$$F = \frac{1}{\omega} = \frac{z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{x + iy} = \frac{x - iy}{z - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \quad (6)$$

Если в (3) поменять знаки x и z , то получим (6), следовательно, случаи (3) и (4) различаются только зеркальным отражением в плоскостях $x = 0$ и $x = 0$ и имеют одинаковые по форме эквипотенциальные портреты, в то время как в планарных полях комплексные потенциалы $F = x + iy$ и $F = 1/(x + iy)$ дают две существенно отличные друг от друга картины эквипотенциалей.

Следующими элементами иерархии "конических" потенциалов могут служить целые степени

$$F(\omega) = \left(\frac{x + iy}{z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)^n, \quad (7)$$

$$n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots,$$

причем положительные и отрицательные n дают структуры одной и той же формы. Например, при $n = 2$ получаем вещественный потенциал вида

$$\Phi = \frac{x^2 + y^2}{(z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^2}. \quad (8)$$

Он четный относительно x и y и имеет особую линию — луч $x = y = 0, z < 0$, в окрестности которого поле обращается в бесконечность, а эквипотенциалы сливаются. Так как представляется довольно сложным изобразить трехмерный вид эквипотенциалей данного поля, то ограничимся показом его сечений плоскостями $x = \text{const}, y = \text{const}, z = \text{const}$ (рис. 2). Нулевыми эквипотенциалами здесь служит ортогональный крест плоскостей $x = y$ и $x = -y$ с исключенным лучом $z < 0$ на их пересечении.

Замечательным отличием степеней (7) от "планарных" потенциалов $(x + iy)^n$ является тот факт, что в структуре каждой "конической" степени в эквипотенциальном портрете одновременно присутствует в области $z > 0$ аналог $(x + iy)^{+|n|}$, а в области $z < 0$ — аналог степени $(x + iy)^{-|n|}$. Это обстоятельство играет большую роль и при рассмотрении рядов, составленных из степеней (7).

Следующим трансцендентным типом обобщений может служить потенциал

$$F = \ln \omega = \ln \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + i \arctg \frac{y}{x}$$

$$= -\ln \left(\frac{z}{r} + \sqrt{1 + \frac{z^2}{r^2}} \right) + i \arctg \frac{y}{x}, \quad (9)$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Вещественной частью здесь, очевидно, служит потенциал соосных конусов, а мнимая часть — потенциал двугранного угла. Эти случаи хорошо известны и изучены ранее [6–8].

Более нетривиальный случай будем иметь, если введем "коническую" экспоненту

$$F = \exp(\omega) = \exp \left(\frac{x + iy}{x + \rho} \right) = \exp \left(\frac{x}{z + \rho} \right) \cos \left(\frac{y}{z + \rho} \right)$$

$$+ i \exp \left(\frac{x}{z + \rho} \right) \sin \left(\frac{y}{z + \rho} \right). \quad (10)$$

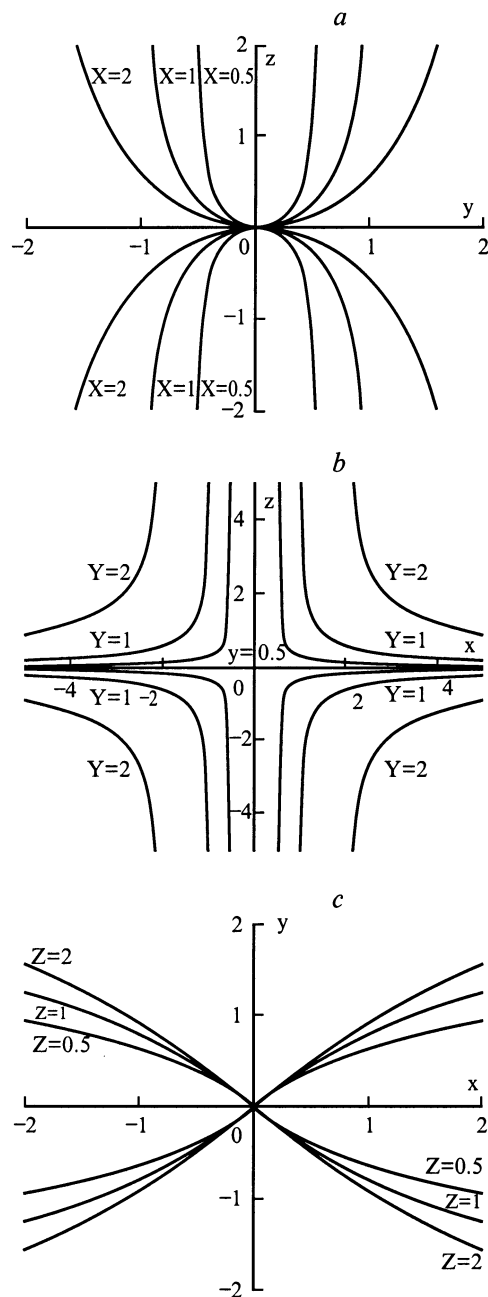


Рис. 2. Проекция эквипотенциальной поверхности поля (8) $\Phi = 1$ на произвольные плоскости: *a* — $x = \text{const}$, *b* — $y = \text{const}$, *c* — $z = \text{const}$.

Вещественный потенциал

$$\Phi = \exp\left(\frac{x}{z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \times \cos\left(\frac{y}{z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \quad (11)$$

имеет в качестве нулевых эквипотенциалей серию поверхностей

$$\frac{y}{z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (12)$$

являющихся конусами параболического сечения, причем все они сливаются на особом луче $x = y = 0, z < 0$. Для реализации на практике здесь, видимо, можно говорить о фрагментах полей, заключенных между соседними нулевыми эквипотенциалами. Структура поля весьма сложная и нуждается в дополнительных отдельных исследованиях. То же можно сказать и о "конических" потенциалах вида $\sin \omega, \operatorname{tg} \omega$ и т. д.

Задача Коши для симметричных полей

Предположим, что функция F в (1) не содержит множители нигде, кроме аргумента ω . Пусть вещественная часть этого выражения служит физическим скалярным потенциалом некоторого симметричного по оси y поля, имеющего распределение, зависящее от отношения x/z ,

$$\Phi|_{y=0} = f\left(\frac{x}{z}\right), \quad (13)$$

где f — заданная функция.

По этим данным требуется восстановить пространственное распределение потенциала, в данном случае "конического" Лапласова потенциала. Формула Донкина как нельзя лучше подходит для решения этой задачи. Действительно, если предположить, что реальная часть выражения (1) дает искомый потенциал, то при условии (13) $y = 0$ имеем следующую связь неизвестной функции F и заданной f

$$F\left(\frac{x}{z + \sqrt{x^2 + z^2}}\right) = f\left(\frac{x}{z}\right). \quad (14)$$

Из равенства (при $y = 0$)

$$\omega = \frac{x}{z + \sqrt{x^2 + z^2}} = \frac{x/z}{1 + \sqrt{1 + (x/z)^2}} \quad (15)$$

легко находим

$$\frac{x}{z} = \frac{2\omega}{1 - \omega^2}. \quad (16)$$

Теперь для определения явного вида функции $F(\omega)$ достаточно сделать подстановку выражения (16) в заданную функцию f из (14) и далее ω заменить полным комплексным выражением (2). Таким образом, комплексный потенциал, решающий задачу Коши для симметричных полей, дается выражением

$$F(\omega) = f\left(\frac{2\omega}{1 - \omega^2}\right). \quad (17)$$

Данный алгоритм является прямым обобщением задачи Коши для планарных полей [9], он весьма удобен для синтеза полей, обладающих заданным корпускулярно-оптическим действием в плоскости симметрии, ибо функцию f можно искать с помощью обратных задач механики частиц.

В части II более подробно рассмотрены электронно-оптические характеристики "конусовидного" потенциала (4), а также показана возможность его практического использования для построения конкретных электростатических приборов.

Список литературы

- [1] Баранова Л.А., Дьякова Г.Н., Явор С.Я. // ЖТФ. 1988. Т. 58. Вып. 1. С. 207–210.
- [2] Кельман В.М., Карецкая С.П., Федулина Л.В., Якушев Е.М. Электронно-оптические элементы призмных спектрометров заряженных частиц. Алма-Ата: Наука, 1979. 232 с.
- [3] Баранова Л.А., Явор С.Я. Электростатические электронные линзы. М.: Наука, 1986. 192 с.
- [4] Davydov S.N., Romanov S.N., Golikov Yu.K., Korablev V.V. // SPIE. 1998. Vol. 3345. P. 136.
- [5] Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа. Ч. II. Трансцендентные функции. М.: ГИФМЛ, 1963. 516 с.
- [6] Krasnova N.K., Davydov S.N., Golikov Yu.K. et al. // J. Electron Spectrosc. Relat. Phenom. 1995. Vol. 72. P. 323–326.
- [7] Davydov S.N., Romanov S.N., Krasnova N.K. // J. Electron Spectrosc. Relat. Phenom. 1998. N 97. P. 209–214.
- [8] Gabdullin P.G., Davydov S.N., Golikov Yu.K. // Nucl. Instr. Meth. Nim. A. 1999. N 427. P. 145–150.
- [9] Голиков Ю.К., Уткин К.Г., Чепарухин В.В. Расчет элементов электростатических электронно-оптических систем. Л.: Изд-во ЛПИ, 1984. 78 с.