01;10

Устойчивость сильноточных пучков релятивистских электронов в циклических системах

© В.В. Долгополов, Ю.В. Кириченко

Национальный научный центр "Харьковский физико-технический институт"
310108 Харьков, Украина

(Поступило в Редакцию 17 июля 1998 г.)

Теоретически исследуются условия устойчивости сильноточных тонких пучков релятивистских электронов по отношению к длинноволновым колебаниям в стеллатроне и модифицировнном бетатроне. Учтено влияние собственных полей, которые находились из запаздывающих потенциалов, создаваемых электронами пучка. Найдено соответствующее дисперсионное уравнение. Показано, что пучок в модифицированном бетатроне всегда неустойчив к рассматриваемым колебаниям. Найдены необходимые и достаточные условия устойчивости пучка в стеллатроне.

Введение

Для преодоления кулоновского расталкивания электронов с сильноточных нескомпенсированных циклических пучках используется тороидальное магнитное поле. Бетатрон с сильным тороидальным магнитным полем получил название модифицированного бетатрона [1]. Однако и в таком устройстве при наличии рассогласования между энергией электронов и бетатронным магнитным полем возможны значительные потери электронов. Чтобы преодолеть эту трудность, в работе [2] было предложено дополнить модифицированный бетатрон стеллараторными обмотками. Такая система называется стеллатроном.

Поведение ускоренных электронов в циклических системах теоретически исследовалось в работах [3–9]. В [5] рассмотрена устойчивость узких пучков электронов в стеллатроне. Однако собственные поля в этой работе учтены неполно. Более последовательно собственные поля пучка при исследовании длинноволновых колебаний учтены в [9]. Однако и в этой работе был сделан ряд грубых упрощающих предположений.

В настоящей работе устойчивость релятивистских сильноточных пучков электронов относительно длинноволновых колебаний исследуется более корректно. В отличие от работы [9] собственные поля пучка находятся путем вычисления запаздывающих потенциалов, а при описании движения электронов не используется дрейфовое приближение.

Собственные поля пучка

Как и в работах [7–9], воспользуемся системой координат x, y, θ, связанной с псевдотороидальными координатами r, ϑ, θ соотношениями

$$x = r\cos\vartheta, \quad y = r\sin\vartheta, \quad R = R_0 - x, \tag{1}$$

где r и R — малый и большой радиусы соответственно, R_0 — радиус магнитной оси стеллараторного поля, ϑ и θ — малый и большой азимуты соответственно.

В дальнейшем будут рассмотрены пучки малых поперечных размеров, плотность заряда $\rho(x, y, \theta, t)$ и плотность тока $\mathbf{j}(x, y, \theta, t)$ который можно представить в виде

$$\rho(x, y, \theta, t) = -en(x, y, \theta, t),$$

$$\mathbf{j}(x, y, \theta, t) = -en(x, y, \theta, t)\,\mathbf{v}(\theta, t),$$

$$n(x, y, \theta, t) = N(\theta, t)\delta\big(x - x(\theta, t)\big)\,\delta\big(y - y(\theta, t)\big), \tag{2}$$

где $n(x, y, \theta, t)$ и $N(\theta, t)$ — объемная и линейная плотности электронов; $\mathbf{v}(\theta, t)$ — их скорость; $x(\theta, t)$ и $y(\theta, t)$ — координаты поперечного сечения пучка; $-e < 0$ — заряд электрона.

С учетом (2) формулы для запаздывающих потенциалов, создаваемых пучком электронов, имеют вид

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = -e\int d\theta' \frac{F\big(\theta', \tau(t, \mathbf{r})\big)}{G\big(\mathbf{r}, \theta', \tau(t, \mathbf{r})\big)}, \tag{3}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = -\frac{e}{c}\int d\theta' \frac{F\big(\theta', \tau(t, \mathbf{r})\big)\mathbf{v}\big(\theta', \tau(t, \mathbf{r})\big)}{G\big(\mathbf{r}, \theta', \tau(t, \mathbf{r})\big)}, \tag{4}$$

где

$$F\big(\theta', \tau(t, \mathbf{r})\big) = R(\theta', \tau)\,N(\theta', \tau), \tag{5}$$

$$G\big(\mathbf{r}, \theta', \tau(t, \mathbf{r})\big) = g - \frac{1}{c}\,\dot{x}(\theta', \tau)\Big[x(\theta, t) - x(\theta', \tau) + 2R(\theta, t)\sin^2\frac{\theta - \theta'}{2}\Big] - \frac{1}{c}\dot{y}(\theta', \tau)\big[y(\theta, t) - y(\theta', \tau)\big],$$

$$g = \Big[\big(x(\theta, t) - x(\theta', \tau)\big)^2 + \big(y(\theta, t) - y(\theta', \tau)\big)^2 + 4R(\theta, t)R(\theta', \tau)\sin^2\frac{\theta - \theta'}{2}\Big]^{1/2}. \tag{6}$$

где $\tau(t, \mathbf{r}) = t - g/c$; $x(\theta, t)$, $y(\theta, t)$, θ — координаты точки наблюдения; $x(\theta', \tau)$, $y(\theta', \tau)$, θ' — координаты точки пучка в момент времени τ; $R(\theta, t) = R_0 - x(\theta, t)$, $R(\theta', \tau) = R_0 - x(\theta', \tau)$; точка над буквами в (6) означает частную производную по τ.

Равновесное состояние пучка представляет собой движение электронов по окружности радиуса $\bar{R} = R_0 - \bar{x}$ (где x — равновесное значение координаты x, которое будет найдено ниже; $x \ll R_0$) с постоянной по модулю скоростью $\bar{v}$. При этом равновесная линейная плотность электронов $\bar{N}$ не зависит от t и θ. Электрическое $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ и магнитное $\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$ поля, соответствующие запаздывающим потенциалам (3), (4), вычислялись нами в нулевом и первом приближениях по отклонениям пучка от равновесного состояния. Можно показать, что в силу геометрии задачи, а также из-за экранирования поля колебаниями пучка интегралы (3), (4) следует вычислять в пределах от $-\theta_m$ до θ_m, где

$$\theta_m = \begin{cases} (8r_c/R_0)^{1/2}, & \lambda > (8r_cR_0)^{1/2}, \\ \lambda/R_0, & \lambda < (8r_cR_0)^{1/2}, \end{cases} \tag{7}$$

где λ — длина волны колебаний, r_c — радиус тороидальной камеры ($r_c \ll R_0$).

Естественно считать, что $\theta_m \ll 1$. При разложении подынтегральных выражений в (3), (4) по малым возмущениям возникает интеграл от функции $1/|\theta|$, для которого справедливо соотношение

$$\int\limits_{-\theta_m}^{\theta_m} \frac{d\theta}{|\theta|} \simeq \int\limits_{-\theta_m}^{-\theta_\varepsilon} \frac{d\theta}{|\theta|} + \int\limits_{\theta_\varepsilon}^{\theta_m} \frac{d\theta}{|\theta|} = 2\ln\frac{\theta_m}{\theta_\varepsilon} \equiv 2\Lambda \gg 1. \tag{8}$$

В (8) учтено, что участок пучка $-\theta_\varepsilon < \theta < \theta_\varepsilon$ дает пренебрежимо малый вклад в поле в выбранной точке наблюдения, лежащей на пучке, если $\theta_\varepsilon < \bar{r}_b/R_0$, где $\bar{r}_b$ — средний радиус поперечного сечения пучка. Следует заметить, что $\theta_m \gg \theta_\varepsilon$ и поэтому неопределенности в значениях θ_m и θ_ε несущественно влияют на значения Λ.

Обозначим через $\tilde{f}$ малое отклонение некоторой величины f от равновесного значения $\bar{f}$

$$f = \bar{f} + \tilde{f}, \qquad |\tilde{f}| \ll |\bar{f}|. \tag{9}$$

С учетом сделанных предположений получим из формул (3), (4) выражения для полей $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$, $\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$ в точках наблюдения, лежащих на пучке

$$E_x = \bar{E}_x + \tilde{E}_x, \quad E_y = \tilde{E}_y, \quad E_\theta = \tilde{E}_\theta,$$
$$H_x = \tilde{H}_x, \quad H_y = \bar{H}_y + \tilde{H}_y, \quad H_\theta = \tilde{H}_\theta, \tag{10}$$

где

$$\bar{E}_x = \frac{e\bar{N}}{R}\Lambda, \qquad \bar{H}_y = -\frac{e\bar{N}\bar{v}}{cR}\Lambda, \tag{11}$$

$$\tilde{E}_x = \frac{e\bar{N}}{R}\Lambda\left(\frac{\tilde{N}}{N} + \frac{\tilde{x}}{R} + \frac{\hat{\tilde{x}}}{R} + \frac{2\bar{R}}{c^2}\dot{\tilde{v}}_x\right), \tag{12}$$

$$\tilde{E}_y = \frac{e\bar{N}}{R}\Lambda\left(\frac{\hat{\tilde{y}}}{R} + \frac{2\bar{R}}{c^2}\dot{\tilde{v}}_y\right), \tag{13}$$

$$\tilde{E}_\theta = \frac{2e}{R}\Lambda\left(\frac{\partial\tilde{N}}{\partial\theta} - \frac{\bar{N}}{2\bar{R}}\frac{\partial\tilde{x}}{\partial\theta} + \frac{\bar{v}}{c^2}\left(\dot{\tilde{N}}\bar{R} - \frac{1}{2}\bar{N}\tilde{x}\right) + \frac{\bar{N}\bar{R}}{c^2}\dot{\tilde{v}}_\theta\right), \tag{14}$$

$$\tilde{H}_x = \frac{e\bar{N}}{cR}\Lambda\left(2\frac{\partial\tilde{v}_y}{\partial\theta} - \hat{\tilde{y}}\frac{\bar{v}}{R}\right), \tag{15}$$

$$\tilde{H}_y = -\frac{e\bar{N}}{cR}\Lambda\left(\tilde{v}_\theta + \bar{v}\left(\frac{\tilde{N}}{N} + \frac{\tilde{x}}{R}\right) + \frac{\partial\tilde{v}_x}{\partial\theta} - \frac{\bar{v}}{R}\hat{\tilde{x}}\right), \tag{16}$$

$$\tilde{H}_\theta = -\frac{e\bar{N}}{cR}\Lambda\tilde{v}_y, \tag{17}$$

где $\hat{f} = \partial^2 f/\partial\theta^2 - (\bar{R}^2/c^2)\partial^2 f/\partial t^2$; $\bar{E}_x$, $\bar{H}_y$ — равновесные значения полей; $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ — возмущения полей; точка над буквами означает частную производную по t.

Дисперсионное уравнение

В случае рассматриваемых нами длинноволновых колебаний должны выполняться условия

$$\lambda \gg \bar{r}_b, \qquad \lambda \gg \frac{2\pi R_0}{m}, \tag{18}$$

где $2\pi R_0/m$ — период стеллараторного магнитного поля, m — целое число.

Второе из неравенств (18) позволяет заменить выражение для магнитного поля двухзаходного стеллатрона [2] более простым, которое создает такое же вращательное преобразование, как и стеллараторное [9]. В результате магнитное поле, удерживающее пучок, будет иметь вид

$$\mathbf{B} = \mathbf{e}_\theta B_t - \mathbf{e}_\vartheta B_t m s^2 r/R_0$$
$$+ \mathbf{e}_x B_0 \beta n y/R_0 + \mathbf{e}_y B_0 \beta(1 + nx/R_0), \tag{19}$$

где $B_t = B_0/(1 - x/R_0)$, $|s| < 1/2$, $|\beta| \ll 1$, $B_0 > 0$, $0 < n < 1$, $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\vartheta$ — единичные векторы соответствующих направлений.

Первое слагаемое в (19) есть тороидальное магнитное поле, второе моделирует стеллараторное поле, третье и четвертое представляют собой бетатронное поле. При $s = 0$ выражение (19) определяет магнитное поле модифицированного бетатрона. Уравнение Лоренца для электрона, движущегося в полях (10)–(17) и (19), имеет вид

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{e}{m_e}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}$$
$$\times\left\{\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}, \mathbf{H} + \mathbf{B}] - \frac{1}{c^2}\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{E})\right\}, \tag{20}$$

где $\mathbf{v} = \mathbf{e}_\theta\bar{v} + \tilde{\mathbf{v}}$, m_e — масса покоя электрона.

Уравнение (20) следует дополнить уравнением непрерывности

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(R(t,\theta)N(t,\theta)\big) + \frac{\partial}{\partial\theta}\big(N(t,\theta)v_\theta(t,\theta)\big) = 0. \tag{21}$$

В нулевом приближении по возмущениям уравнение (20) дает связь между равновесными величинами

$$\frac{\bar{x}}{R_0} = \frac{1}{\sigma_-}\left(\frac{\bar{v}}{\omega_0 R} - \beta + \frac{2\gamma^2 - 1}{\gamma^2}\,\frac{c^2\eta}{\omega_0 \bar{v} R}\right), \qquad (22)$$

где $\eta = e^2\bar{N}\Lambda/(m_e\gamma c^2)$, $\omega_0 = eB_0/(m_e\gamma c)$, $\sigma_- = \beta n - \alpha m s^2$, $\gamma = (1 - \bar{v}^2/c^2)^{-1/2}$.

После линеаризации уравнений (20), (21) получаем систему четырех дифференциальных уравнений для величин $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{N}, \tilde{v}_\theta$

$$(1+2\eta)\frac{d^2\tilde{x}}{dt^2} + \left(\frac{\bar{v}^2}{R^2}\left(1 + \frac{2\gamma^2 - 1}{\gamma^2 - 1}\eta\right) - \frac{\bar{v}\sigma_-\omega_0}{R_0}\right)\tilde{x}$$

$$+ \frac{c^2\eta}{\gamma^2 R^2}\,\hat{\tilde{x}} + \alpha\omega_0\frac{d\tilde{y}}{dt} + \left(\frac{2\bar{v}}{R} + (3 - 2\gamma^2)\frac{\bar{v}}{R}\eta + (\gamma^2 - 2)\right.$$

$$\left.\times\left(\beta + \sigma_-\frac{\bar{x}}{R_0}\right)\omega_0\right)\tilde{v}_\theta + \frac{c^2\eta(2\gamma^2 - 1)}{NR\gamma^2}\tilde{N} = 0, \qquad (23)$$

$$(1+2\eta)\frac{d^2\tilde{y}}{dt^2} + \frac{\eta\hat{\tilde{y}}c^2}{\gamma^2 R^2} + \frac{\bar{v}\sigma_+}{R_0}\omega_0\tilde{y} - \alpha\omega_0\frac{d\tilde{x}}{dt} = 0, \qquad (24)$$

$$\left(1 + \frac{2\eta}{\gamma^2}\right)\frac{\partial\tilde{v}_\theta}{\partial t} + \frac{\bar{v}}{R}\frac{\partial\tilde{v}_\theta}{\partial\theta} + \left(\omega_0\left(\beta + \frac{\bar{x}\sigma_-}{R_0}\right)\right.$$

$$\left. - (1+2\eta)\frac{\bar{v}}{R}\right)\frac{d\tilde{x}}{dt} - \frac{c^2\eta}{R^2\gamma^2}\frac{\partial\tilde{x}}{\partial\theta} - \frac{\bar{v}\eta}{R\gamma^2}\frac{\partial\tilde{x}}{\partial t}$$

$$+ \frac{2c^2\eta}{RN\gamma^2}\frac{\partial\tilde{N}}{\partial\theta} + \frac{2\bar{v}\eta}{\gamma^2 N}\frac{\partial\tilde{N}}{\partial t} = 0, \qquad (25)$$

$$\frac{\partial\tilde{N}}{\partial t} - \frac{\bar{N}}{R}\frac{\partial\tilde{x}}{\partial t} + \frac{\bar{N}}{R}\frac{\partial\tilde{v}_\theta}{\partial\theta} + \frac{\bar{v}}{R}\frac{\partial\tilde{N}}{\partial\theta} = 0, \qquad (26)$$

где $\sigma_+ = \beta n + \alpha m s^2$, $\bar{\sigma}_- = \beta n - \alpha^2 m s^2$, $\alpha = 1/(1 - \bar{x}/R_0$. $d/dt \simeq \partial/\partial t + \bar{v}/\bar{R}\,\partial/\partial\theta$ — в линейном приближении.

Полагая, что зависимость величин $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{v}_\theta, \tilde{N}$ от переменных θ и t определяется множителем $\exp[i(\mu\theta - \omega t)]$, из уравнений (23)–(26) получим дисперсионного уравнение

$$\sum_{k=0}^{6} A_k\,\omega_\mu^k = 0, \qquad (27)$$

где $\omega_\mu = \omega - \mu\bar{v}/\bar{R}$.

Коэффициенты A_k являются функциями параметров внешнего магнитного поля и пучка. В общем случае выражения для них громоздки, и мы их не приводим.

Анализ результатов

Устойчивость пучка к длинноволновым колебаниям, т. е. условия вещественности корней уравнений (27) исследовались нами при некоторых упрощающих предположениях, основными из которых являются: малые значения параметра η, большие значения релятивистского фактора γ и относительно низкая частота колебаний. Эти предположения сводятся к таким ограничениям на параметры задачи

$$2|\beta m|s^2 \ll 1, \qquad (28)$$

$$\frac{\mu^2\beta^2\eta}{\gamma^4} \ll 1, \qquad (29)$$

$$|\xi| > 1, \qquad (30)$$

$$\gamma^2\beta^2 \gtrsim 1, \qquad (31)$$

$$\gamma^2 \gg \max\left(4|\xi|,\ \mu^2\eta,\ \frac{2\mu^2\eta}{|n+\xi||\xi+1-n|},\right.$$

$$\left.\frac{2\mu^2\eta}{|n+\xi||3+2(\xi-n)|},\ \frac{2\mu\eta^2}{\gamma^2\beta^2|n+\xi||\xi+1-n|}\right), \qquad (32)$$

$$\eta \ll \min\left(\frac{1}{12},\ \frac{\gamma^2\beta^2|n+\xi|(\xi+1-n)^2}{24\mu^2}\right), \qquad (33)$$

$$|\omega_\mu| \ll \omega_0, \qquad (34)$$

где $\xi = \alpha m s^2/\beta$.

При условиях (28)–(34) коэффициенты дисперсионного уравнения (27) принимают вид

$$A_6 = 1, \quad A_5 = 8\omega_0\frac{\mu\beta\eta^2}{\gamma^2}, \quad A_4 = -\omega_0^2,$$

$$A_3 = -\frac{4\mu\beta\eta}{\gamma^2}\,\omega_0^3, \quad A_2 = \omega_0^4\beta^4(n+\xi)(1-n+\xi),$$

$$A_1 = \frac{2\mu\eta}{\gamma^2}\beta^5\omega_0^5(n+\xi)\left[3 + 2(\xi - n)\right],$$

$$A_0 = \frac{2\mu^2\eta}{\gamma^2}\,\beta^6\omega_0^6(n+\xi). \qquad (35)$$

Из формул (35) и условий (28)–(34) следуют неравенства

$$|A_6\omega_\mu^6| \ll |A_4\omega_\mu^4|, \qquad |A_5\omega_\mu^5| \ll |A_4\omega_\mu^4|. \qquad (36)$$

Условия (36) позволяют свести уравнение 6-й степени (27) к уравнению 4-й степени

$$\omega_\mu^4 + a_3\omega_\mu^3 + a_2\omega_\mu^2 + a_1\omega_\mu + a_0 = 0, \qquad (37)$$

где $a_k = -A_k/\omega_0^2$; $k = 0, 1, 2, 3$.

Из формулы (22) следует, что при выполнении (33) имеет место соотношение

$$\frac{\bar{v}}{R} \simeq \beta\omega_0. \qquad (38)$$

Необходимые и достаточные условия устойчивости пучка в стеллатроне по отношению к рассматриваемым колебаниям (условия вещественности корней (37)) имеют вид

$$\xi < 0, \qquad (39)$$

$$8\mu^2\eta < \beta^2\gamma^2|\xi + n|(\xi + 1 - n)^2, \qquad (40)$$

$$\frac{\mu^2\eta^2}{\gamma^2} < \beta^2\gamma^2\frac{|\xi+n||\xi+1-n|^3}{27(\xi+2-n)^2}. \qquad (41)$$

Для исследования условий устойчивости модифицированного бетатрона в формулах для коэффициентов a_k следует положить $\xi = 0$. Оказалось, что модифицированный бетатрон всегда неустойчив к длинноволновым колебаниям. При этом упрощающие предположения будут такими же, как и в случае стеллатрона, за исключением условия (32), которое следует заменить на

$$\gamma^2 \gg \max\left(3,\ \frac{2\mu^2\eta}{n(1-n)},\ \frac{2\mu^2\eta}{\gamma^2\beta^2 n(1-n)}\right). \qquad (42)$$

Заключение

Из полученных выше результатов следует, что пучок релятивистских электронов в модифицированном бетатроне всегда неустойчив по отношению к рассмотренным нами колебаниям. Необходимыми и достаточными условиями утойчивости пучка в стеллатроне при выполнении (28)–(34) являются неравенства (39)–(41). Из (39) следует, что для устойчивости пучка усредненные стеллараторное и бетатронное магнитные поля должны быть направлены так, чтобы выполнялось условие

$$m\beta < 0. \qquad (43)$$

Это означает, что проекция усредненного по θ стеллараторного поля на направление бетатронного поля при $R < R_0$ должна быть положительной.

Список литературы

[1] *Rostoker N.* // Particle Accelerators. 1973. Vol. 5. N 7. P. 93–97.
[2] *Robertson C.W., Mondelli A.* Phys. Rev. Lett. 1983. Vol. 50. N 7. P. 507–510.
[3] *Коломенский А.А., Лебедев А.Н.* // Атомная энергия. 1959. Т. 7. № 6. С. 549–550.
[4] *Kapetanakos C.A., Dialetis D., Marsh S.J.* // Particle Accelerators. 1987. Vol. 21. N 1. P. 1–27.
[5] *Chernin D.* // Phys. Fluids. 1986. Vol. 29. N 2. P. 556–560.
[6] *Kapetanakos C.A., Marsh S.J.* // Phys. Fluids. 1985. Vol. 28. N 7. P. 2263–2272.
[7] *Долгополов В.В., Кириченко Ю.В., Лелеко Я.Ф.* и др. // ЖТФ. 1995. Т. 65. Вып. 6. С. 141–146.
[8] *Долгополов В.В., Кириченко Ю.В., Романов С.С., Ткач Ю.В.* // Письма в ЖТФ. 1994. Т. 20. Вып. 20. С. 67–71.
[9] *Долгополов В.В., Кириченко Ю.В., Романов С.С., Ткач Ю.В.* // Укр. физ. журн. 1994. Т. 39. № 2. С. 161–164.