

01;03

## Подавление транспорта флуктуациями и "кластерные" разложения в кинетике

© С.Н. Гордиенко, С.С. Моисеев

Институт космических исследований РАН,  
117810 Москва, Россия

(Поступило в Редакцию 30 июня 1998 г.)

Предложен механизм флуктуационного подавления транспорта, подробно рассмотренный на примере температуропроводности одномерного газа при приложенных к среде градиентах температуры, меньших флуктуационных. Найдена соответствующая этому режиму функциональная зависимость коэффициента температуропроводности от параметров одномерного газа с однородным потенциалом межчастичного взаимодействия: при потенциале  $V(x) = Q/|x|^k$  коэффициент температуропроводности  $\chi \sim (Qn^k/T)^{1/(k-1)}v_T/n$ . Выяснен характер неаналитической зависимости коэффициента температуропроводности от концентрации. Показано, что неаналитическая зависимость кинетических коэффициентов от концентрации связана в изучаемой задаче с ее нетривиальной симметрией, возникающей на больших временах после "забывания" начальных корреляций. Установлено, что спонтанная генерация макроскопических структур, возникающих из-за "дискриминации" флуктуаций определенного типа при приложенном к среде градиенте температуры, может определять транспортные свойства среды при  $k \approx 1$ .

### Введение

В последние годы возрос интерес к исследованию процессов самоорганизации в турбулентной среде. С этой точки зрения особое значение имеет спиральная турбулентность. За счет спиральности возникает квазиламинирование течения. Дело в том, что в такой среде появляется тенденция к уширению вихрей (так называемый обратный каскад). Но для таких вихрей эффективная вязкость падает, а следовательно, они дольше "живут" и вносят в турбулентный ансамбль определяющий вклад. По этой причине турбулентная вязкость в среднем уменьшается. Иными словами, уменьшается коэффициент турбулентного обмена, а также падают рейнольдсовы напряжения. Данные свойства спиральных потоков турбулентной жидкости подтверждаются экспериментальными данными (см., например, [1,2]). Уменьшение турбулентной вязкости за счет спиральности получено также и теоретически [3,4]. Иными словами, в спиральной среде падает роль нелинейности. Можно ожидать, что в такой ситуации "затягивается" режим обтекания с малыми эффективными числами Рейнольдса (стоксовы движения). Возникает вопрос, только ли за счет спиральности возможна квазиламинирование. В данной работе показано, что это не так. Флуктуации разного знака параметров, характеризующих неравновесность среды, приводят к ее частичной ламинированию. Физически это связано с тем, что в такой системе, если флуктуации достаточно велики, процесс релаксации (насыщения) соответствует как бы меньшему параметру неравновесности. Так, если в конвективной среде флуктуирует градиент температуры, то из-за неопределенности направления теплового потока коэффициент аномальной теплопроводности в среднем падает. Разумеется, неусредненная динамика выглядит заметно сложнее. Например, в случае одномер-

ной среды при симметричных флуктуациях температуры развиваются следующие процессы. Флуктуации, усиливающие исходный градиент, приводят к более быстрому теплопереносу. Иными словами, половина состояний, которая стимулирует теплоперенос, быстро "выходит из игры", а для оставшейся части процесс теплопереноса существенно затягивается. Таким образом, влияние флуктуаций на коэффициент температуропроводности  $\chi$  определяется конкуренцией двух указанных процессов. Ниже мы покажем, в каких условиях действительно происходит уменьшение  $\chi$ .

В настоящей работе будет рассмотрена простая модель подавления транспорта флуктуациями, позволяющая на конкретном примере строго показать справедливость вышеизложенных рассуждений и понять, как должна строиться теория переноса, пригодная для описания этого круга явлений. Кроме того, изучаемая ниже модельная задача представляет и самостоятельный интерес.

### Роль флуктуаций в явлениях переноса

Хорошо известно, что кинетические уравнения Больцмановского типа, используемые для описания явлений переноса в разреженных газах и плазме, не учитывают флуктуаций, что было впервые показано в работе [5,6]. Это делает их применимыми лишь для описания явлений переноса при сравнительно больших градиентах параметров, приложенных к среде. Поясним сказанное на примере коэффициента температуропроводности. С флуктуациями, существующими в газе, связан определенный характерный градиент температуры  $|\nabla T|_{fl}$ , величина которого определяется законом межчастичного взаимодействия и зависит от конкретной рассматриваемой модели. Таким образом, в зависимости от величины приложенного к газу среднего градиента температуры

$|\nabla T|$  возникают два существенно различных режима температуропроводности:  $\nabla T_{fl} \ll |\nabla T|$  и  $|\nabla T|_{fl} \geq |\nabla T|$ . В первом случае, когда приложенный градиент температуры значительно превышает "флуктуационный", можно пренебречь последним, т.е. система в каждой точке "знает" "направление", в котором нужно релаксировать к термодинамическому равновесию. Именно этот режим температуропроводности описывается уравнениями Больцмановского типа с характерным для них монотонным характером возрастания энтропии ( $H$ -теорема) в каждой точке, т.е. с однозначно определенным "направлением" релаксации. Второй режим ( $|\nabla T|_{fl} \geq |\nabla T|$ ) отличается тем, что локально среде трудно определить "направление" релаксации к равновесию, т.е. локально направление потока тепла может изменяться, что принципиально усложняет физику процессов релаксации.

Качественные рассуждения, приводящие к возможности подавления процессов переноса флуктуациями, являются весьма общими. Особенно важным представляется этот эффект при изучении релаксации в турбулентной жидкости (разумеется, что в этом случае следует говорить не о релаксации к термодинамически равновесному состоянию, а о релаксации к состоянию стационарной турбулентности). В самом деле, характерная разность скоростей  $v_\lambda$  между точками жидкости на расстоянии  $\lambda$  дается выражением  $v_\lambda \sim \lambda^q$  при  $0 < q < 1$  (примеры потоков с различными  $q$  приведены, например, в [3]), т.е. "характерный" градиент, связанный с турбулентными пульсациями размера порядка  $\lambda$ , оценивается как  $dv_\lambda/d\lambda \sim \lambda^{q-1}$  и становится большим для малых  $\lambda$  (в пределе нулевой вязкой длины может достигнуть бесконечно большой величины). Таким образом, для больших чисел Рейнольдса всегда должен существовать интервал длин, для которого следует ожидать существенного влияния флуктуаций на перенос импульса. Более того, известно, что усиление флуктуаций при переходе, скажем, к спиральной турбулентности ведет к уменьшению турбулентной вязкости [3,4].

### Необратимое эволюционное уравнение, учитывающее флуктуации

Основой описания кинетических явлений в разреженном газе является уравнение Больцмана. К сожалению, подобный подход неприменим для изучения явлений переноса в системах классических частиц, которые совершают одномерное движение, т.е. описываются гамильтонианом

$$H = \sum_{i=1}^{i=N} \frac{p_i^2}{2m} + \sum_{1 \leq i < j \leq N} V(x_i - x_j), \quad (1)$$

где  $V(x_i - x_j)$  — потенциал взаимодействия между  $i$ -й и  $j$ -й частицами с координатами  $x_i$  и  $x_j$  соответственно.

В самом деле, в одномерном случае законы сохранения импульса и энергии однозначно определяют скорости частиц после парного столкновения, что, как легко видеть,

приводит к обращению в нуль вклада в столкновительный член от парных соударений. Таким образом, для получения кинетического уравнения для  $1D$ -классических частиц недостаточно учитывать лишь парные столкновения, обязательно необходим учет и столкновений с участием большего числа частиц. С другой стороны, хорошо известно, что учет тройных (и более высокого порядка) соударений приводит, вообще говоря, к ряду трудностей, связанных с расходимостями, аналогичными расходимостям, впервые рассмотренным в [7]. Однако, поскольку в настоящее время способ устранения этих расходимостей (по крайней мере в низших порядках) известен, мы не станем подробно останавливаться на этом вопросе, а для оценки температуропроводности при  $|\nabla T|_{fl} \ll |\nabla T|$  воспользуемся идеологией, основанной на связи коэффициентов переноса с длиной свободного пробега. Вместе с тем мы получим кинетическое уравнение, описывающее релаксацию во "флуктуационной" области параметров  $|\nabla T|_{fl} \geq |\nabla T|$ , используя метод, развитый в работах [8,9].

Дополнительным дифференцированием по времени уравнений движения, следующих из (1), находим

$$\dot{x}_i = v_i, \quad \dot{v}_i = a_i, \quad \dot{a}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^{j=N} U_{ij}, \quad i = \overline{1, N}, \quad (2)$$

где точка над буквой обозначает дифференцирование по времени, а

$$U_{ij} = -\frac{1}{m} \frac{\partial^2 V(x_i - x_j)}{\partial x_i^2} (v_i - v_j), \quad i \neq j.$$

Введем следующие сингулярные функции:

$$f_1(t, 1) = \sum_{i=1}^{i=N} \delta_i(1), \quad (3)$$

$$f_2(t, 1, 2) = \sum_{1 \leq i < j \leq N} (\delta_i(1)\delta_j(2) + \delta_i(2)\delta_j(1)), \quad (4)$$

где

$$\delta_i(1) = \delta(v_1 - v_i(t))\delta(x_1 - x_i(t))\delta(a_1 - a_i(t)),$$

$$\delta_i(2) = \delta(v_2 - v_i(t))\delta(x_2 - x_i(t))\delta(a_2 - a_i(t)).$$

Определенные таким образом "микрочанонические" функции распределения подчиняются уравнениям (см. пояснения ниже)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \hat{L}_1\right) f_1(t, 1) = d(t, 1), \quad (5)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \hat{L}_1 + \hat{L}_2\right) f_2(t, 1, 2) = d(t, 1)f_1(t, 2) + d(t, 2)f_1(t, 1), \quad (6)$$

где

$$\hat{L}_m = v_m \frac{\partial}{\partial x_m} + a_m \frac{\partial}{\partial v_m}, \quad m = \overline{1, 2};$$

$$d(t, 1) = \int \hat{q}(1, 3) f_2(t, 1, 3) d3,$$

$$\hat{q}(1, 3) = \frac{1}{m} \frac{\partial^2 V(x_1 - x_3)}{\partial x_1^2} (v_1 - v_3) \frac{\partial}{\partial a_1}.$$

Для изучаемых сингулярных функций распределения уравнения (5) и (6) являются точными уравнениями эволюции (при этом некоторой аккуратности требует рассмотрение функции  $f_2$  при  $x_1 = x_2$  [9]). Обычно с самого начала работают не с "микрканоническими" функциями распределения (3) и (4), а с функциями распределения, уже усредненными по ансамблю. При этом сразу же возникает иерархия Борна–Боголюбова–Грина–Кирквуда–Ивона (ББГКИ). В используемом нами подходе такой способ рассмотрения также возможен (введенный дополнительный аргумент в функцию распределения не препятствует этому), но для наших целей удобнее использовать другой метод. Специально обратим внимание, что способ представления правой части уравнения (6) при работе с сингулярными функциями является не единственным; при этом выбранная нами факторизация обладает тем свойством, что в левой части этого уравнения не возникает слагаемого, связанного с парным взаимодействием частиц, находящихся в точках  $x_1$  и  $x_2$ .

Заметим, что введение функций распределения с дополнительным аргументом (ускромением) принципиально изменяет постановку задачи в кинетической теории. В самом деле, при стандартном подходе делается попытка описать взаимодействие между частицами, задавая их функцию распределения. Введение дополнительного аргумента позволит перейти к обратной задаче: предполагая, что в пространстве задано произвольное распределение сил, действующих на частицы среды, вычисляется функция распределения частиц, соответствующая этому распределению сил (ускорений). Поскольку на допустимое распределение ускорений не будет налагаться никаких ограничений, кроме вытекающих непосредственно из уравнений движения, то подобный подход позволит корректно описать флуктуации всех масштабов.

Получим замкнутое уравнение, описывающее эволюцию функции  $f_2$  в пределе большого времени  $t \rightarrow +\infty$ .

Согласно (5), находим

$$f_1(t, 1) = e^{-i\hat{L}_1} f_1(t=0, 1) + \int_0^t e^{-\tau\hat{L}_1} d(t-\tau, 1) d\tau. \quad (7)$$

Заметим, что  $\lim_{v_1 \rightarrow +\infty} f_1 = 0$ , а следовательно,

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{-\tau\hat{L}_1} f_1(t=0, 1) = 0 \quad \text{при} \quad a_1 \neq 0. \quad (8)$$

Равенство (8) чрезвычайно важно. Оно не имеет аналога для функций распределения с обычным числом аргументов (скорости и координаты) и является следствием того, что оператор  $e^{-\tau\hat{L}_1}$  неограниченно увеличивает скорость  $v_1$ , когда  $a_1 \neq 0$  и  $\tau \rightarrow \infty$ . Предельный

переход (8) означает исключение циклов Пуанкаре, что становится очевидным, если рассмотреть движение одной частицы под действием постоянной силы в ящике с абсолютно упругими стенками. С формальной точки зрения дополнительный аргумент в функции распределения был введен именно для того, чтобы стало справедливым соотношение (8). Учитывая (7), (8), получаем

$$f_1(t, 1) = \int_0^{+\infty} e^{-\tau\hat{L}_1} d(t-\tau, 1) d\tau \quad \text{при} \quad t \gg \tau^* = \frac{v_{ch}}{a_{ch}}, \quad (9)$$

где  $v_{ch}$ ,  $a_{ch}$  — характерные скорости и ускорения частиц.

Заметим, что дифференциальные уравнения (2), полученные искусственным повышением порядка уравнений движения, содержат и решения, не соответствующие никаким истинным движениям частиц, подчиняющихся второму закону Ньютона. В самом деле, решения уравнений движения зависят в одномерном случае от  $2N$  произвольных постоянных, а решения дифференциальных уравнений (2) — от  $3N$  произвольных постоянных. В дальнейшем мы еще вернемся к вопросу об исключении "нефизических" решений (2), а пока лишь заметим, что "нефизическим" решениям (2) соответствует растущая по времени  $v_{ch}$ , т.е. соотношения (8) и (9) выполняются лишь на самом многообразии "физических" решений и в его окрестности, в которой  $v_{ch}$  медленно растет по времени (скажем, значительно медленнее, чем  $a_{ch}t$ ).

Предельный переход  $t \rightarrow +\infty$ , приведший к (9), является неравномерным, что приводит к возникновению в теории необратимости по времени, проявляющейся в том, что одночастичная функция распределения стала выражаться через двухчастичную локальным оператором. Физический смысл возникшей необратимости по времени проясняет неравенство, приведенное в (9): необратимость по времени возникает, когда частицы существенным образом "провазаимодействовали" друг с другом, т.е. необратимость рассматриваемого типа является отражением различия между "достолюкновительными" и "послестолкновительными" корреляциями в динамической системе. Таким образом, выражение (8) является просто формальным выражением физической идеи о "забывании" начальных корреляций и формировании "динамических" корреляций из-за взаимодействия между частицами.

Подставляя (9) в (6), получаем замкнутое необратимое по времени уравнение, описывающее эволюцию "микрканонической" двухчастичной функции распределения  $f_2$  при больших временах  $t$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \hat{L}_1 + \hat{L}_2 \right) f_2(t, 1, 2) = d(t, 1) \int_0^{+\infty} e^{-\tau\hat{L}_2} d(t-\tau, 2) d\tau$$

$$+ d(t, 2) \int_0^{+\infty} e^{-\tau\hat{L}_1} d(t-\tau, 1) d\tau. \quad (10)$$

Система дифференциальных уравнений (2), полученная дифференцированием уравнений движения, содержит решения, не соответствующие никаким истинным движениям частиц. В самом деле, если решения уравнений движения зависят от  $2N$  произвольных постоянных, то решения уравнений (2) зависят уже от  $3N$  произвольных постоянных. Следовательно, на функцию  $f_2$  должны быть наложены дополнительные условия, исключающие "микрочанонические" функции распределения, не соответствующие никаким истинным движениям. Приведем указанные условия без вывода (см. подробное рассмотрение в [8,9]), поскольку они не потребуются в дальнейших рассуждениях

$$a_1 \int_0^{+\infty} e^{-\tau \hat{L}_1} d(t - \tau, 1) d\tau = -\frac{1}{m} \int \frac{\partial V(x_1 - x_2)}{\partial x_1} f_2(t, 1, 2) d2. \quad (11)$$

Соотношение (11), будучи справедливым в начальный момент времени, остается верным и в дальнейшем, т.е. по существу является ограничением на выбор начальных условий.

Обратим внимание на одну характерную особенность формализма настоящей работы: сначала повышая порядок уравнений движения, т.е. переходя к рассмотрению решений системы дифференциальных уравнений (2), мы допускаем к рассмотрению и "нефизические" движения частиц. Затем, используя (8), (9) и (11), мы снова возвращаемся к множеству "физических" решений, но возвращаемся уже после того, как частицы существенно провзаимодействовали между собой.

### Кинетическое уравнение для сглаженных функций распределения

Для получения результатов, касающихся коэффициентов температуропроводности, нам понадобятся лишь симметричные свойства уравнения (10). Поэтому результаты настоящего раздела не являются, строго говоря, необходимыми для дальнейшего, однако важны для понимания физики развиваемого формализма.

Перейдем сейчас от сингулярных к сглаженным функциям распределения, т.е. усредним (10) и (11) по ансамблю. Усреднение линейных по  $f_2$  членов производится элементарно. Трудности возникают только с правой частью уравнения (10), которая содержит произведения разновременных двухчастичных функций распределения  $f_2(t', 1, 2)f_2(t, 3, 4)$ . В случае, когда температура  $T$  газа велика по сравнению с энергией межчастичного взаимодействия  $V_{ch}$  на характерном для одномерного газа межчастичном расстоянии, определяемом по числу частиц  $n = N/L$ , приходящихся на единицу длины, где  $N$

и  $L$  — полное число частиц и полная длина системы, в правой части (10) справедлива замена

$$\overline{f_2(t', 1, 2)f_2(t, 3, 4)} \rightarrow \overline{f_2(t', 1, 2)} \cdot \overline{f_2(t, 3, 4)}, \quad (12)$$

где черта означает усреднение по ансамблю.

По нашему мнению, однако, замену типа (12) в первой части (10) можно осуществлять независимо от соотношения между величинами  $T$  и  $V_{ch}$ . В самом деле, будем рассматривать возможность такой замены просто как определение ансамбля систем, который мы описываем с помощью кинетического уравнения. Заметим, что подобное определение не противоречит динамике системы. Здесь возникает еще одно принципиальное отличие от стандартной цепочки ББГКИ: в иерархии ББГКИ факторизации функций распределения мешают не интегральные слагаемые, полностью аналогичные интегральным слагаемым в (10), а слагаемое в левой части, описывающее прямое взаимодействие между частицами в точках  $x_1$  и  $x_2$ , которое в нашем подходе не возникает, так как благодаря (8) мы получили возможность усреднять не одновременные, а разновременные произведения сингулярных "микрочанонических" функций распределения (сравните, например, с работой [10]). Специально поясним, почему в рамках развиваемого формализма не возникает слагаемых, препятствующих расщеплению. Согласно [10],

$$\left\langle \sum_i \delta(x - x_i(t)) \delta(x' - x_i(t)) \right\rangle = \delta(x - x') \left\langle \sum_i \delta(x - x_i(t)) \right\rangle,$$

а препятствующие расщеплению слагаемые возникают из-за "сингулярности" этого выражения. Легко видеть, что препятствующие расщеплению слагаемые в используемом в работе формализме могли бы возникать лишь из-за сингулярной части выражения

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial a} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^\varepsilon \left\langle \sum_i \delta(a - a_i(t) + \dot{a}_i(t)\tau) \delta(a' - a_i(t)) \right\rangle d\tau \\ & = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\partial}{\partial a} \int_0^\varepsilon \left\langle \sum_i \delta(a - a' + \dot{a}_i\tau) \delta(a' - a_i(t)) \right\rangle d\tau, \end{aligned}$$

которая исчезает в пределе  $\varepsilon \rightarrow +0$ . Таким образом, при временах, удовлетворяющих (9), усреднение произведения сингулярных функций в правой части уравнения (10) не приводит к слагаемым, типа описывающих "прямое" взаимодействие частиц, находящихся в точках  $x_1$  и  $x_2$ , в стандартной цепочке ББГКИ.

Как уже отмечалось ранее, в кинетической теории, оперирующей обычными функциями распределения, неизвестно никакого локального оператора, выражающего одночастичную функцию распределения через двухчастичную, не говоря уже о возможности представить высшие функции распределения в виде функционала от двухчастичной функции распределения. Вместе с тем в лекциях об уравнении Больцмана [11] Уленбек высказал

гипотезу о том, что все функции распределения могут быть выражены в виде функционалов от двухчастичной функции распределения. Гипотеза Уленбека является справедливой для функций распределения с дополнительными аргументами рассматриваемых в настоящей работе. Выражение (9) является примером такого функционала для одночастичной функции распределения. В настоящей работе мы не станем останавливаться на рассмотрении аналогичных функционалов для высших функций распределения.

Заметим, также, что рассматриваемая необратимость по времени возникла просто как свойство динамической системы в пределе  $t \rightarrow +\infty$ . Таким образом, удается разделить введение необратимости по времени и задачу описания системы сглаженными функциями распределения.

### Одномерный газ со степенным потенциалом взаимодействия

Перейдем к рассмотрению одномерного газа с потенциалом межчастичного взаимодействия между частицами

$$V(x) = \frac{Q}{|x|^k} \quad \text{при } k > 0 \text{ и } Q > 0. \quad (13)$$

Именно такие ограничения на  $k$  и  $Q$  обеспечивают возможность перехода к кинетическому пределу  $N \rightarrow +\infty$ ,  $L \rightarrow +\infty$ ,  $n = N/L = \text{const}$ . Вместе с тем необходимо заметить, что при  $0 < k \leq 1$  и  $1 < k$  переход к кинетическому пределу происходит существенно различным образом. При  $1 < k$  полная потенциальная энергия системы возрастает при переходе к кинетическому пределу линейно с ростом  $N$ , при этом силы, действующие на частицы, также хорошо определены. При  $0 < k \leq 1$  полная потенциальная энергия в кинетическом пределе растет быстрее, чем линейно по  $N$ , пропорционально  $N^{2-k}$ , но силы, действующие на частицы, остаются все еще хорошо определенными величинами в кинетическом пределе из-за сходимости на верхнем пределе несобственного интеграла

$$\int_{1/n}^{+\infty} \frac{dx}{x^{1+k}},$$

определяющего вклад в силу, действующую на частицу, от удаленных частиц среды. Таким образом, при  $0 < k \leq 1$  гамильтониан системы частиц уже плохо определен, но сами уравнения движения по-прежнему хорошо определены в кинетическом пределе.

Соображения размерности позволяют написать для коэффициента температуропроводности выражение

$$\chi = \phi \left( \frac{Qn^k}{T} \right) \frac{v_T}{n}, \quad (14)$$

где  $v_T = \sqrt{2T/m}$ ;  $\phi$  — неизвестная функция, которая не может быть найдена из размерных соображений.

Вместе с тем для потенциалов типа (13) кинетическое уравнение (10) для сглаженных функций распределения обладает двухпараметрической группой преобразований  $G_1$ , любой элемент которой переводит одно решение уравнения (10) в другое решение этого же уравнения. Действие этой группы определено следующим образом:

$$g(\lambda_1, \lambda_2) f_2 = \lambda_1^{-2k} \lambda_2^{-2} f_2(\lambda_1 \lambda_2 t, \lambda_1 x_1, \lambda_2^{-1} v_1, \lambda_1^{-1} \lambda_2^{-2} a_1, \lambda_1 x_2, \lambda_2^{-1} v_2, \lambda_1^{-1} \lambda_2^{-2} a_2), \quad (15)$$

причем справедлив следующий закон группового умножения:

$$g(\lambda_1, \lambda_2) g(\lambda_1^*, \lambda_2^*) = g(\lambda_1 \lambda_1^*, \lambda_2 \lambda_2^*).$$

Обратим внимание, что нетривиальная симметрия, связанная с группой  $G_1$ , возникла в кинетическом уравнении (10), учитывающем соударения сколь угодно высокого порядка. Легко убедиться, что указанная симметрия не возникает в кинетических уравнениях, учитывающих столкновения лишь конечного порядка, т.е. симметрия, связанная с  $G_1$ , проявляется лишь после завершения формирования "послестолкновительных" корреляций.

Формальный смысл группы  $G_1$  очень прост: рассматриваемая задача имеет наряду с физическим (метры, граммы, секунды) и формальные размерности, описываемые группой  $G_1$ . Учет этих формальных размерностей позволяет с точностью до константы определить неизвестную функцию  $\phi$ , входящую в (14), и записать

$$\chi = \text{const} \left( \frac{Qn^k}{T} \right)^{1/(k-1)} \frac{v_T}{n}, \quad \phi(y) = \text{const} y^{1/(k-1)}. \quad (16)$$

### Короткодействующие степенные потенциалы взаимодействия $1 < k$

Обсудим физический смысл полученных результатов. Прежде всего заметим, что длина свободного пробега и столкновительное время, определяемые тройными столкновениями (напомним, что в одномерной задаче столкновения не дают вклада в столкновительный член), оцениваются величинами

$$l_{st} \sim \frac{1}{n^2} \left( \frac{T}{Q} \right)^{1/k} \quad \text{и} \quad \tau_{st} \sim \frac{1}{v_T} \frac{1}{n^2} \left( \frac{T}{Q} \right)^{1/k}. \quad (17)$$

Таким образом, коэффициент температуропроводности  $\chi_B$ , вычисленный в рамках Больцмановской идеологии,

$$\chi_B \sim v_T l_{st} = \frac{v_T}{n^2} \left( \frac{T}{Q} \right)^{1/k}. \quad (18)$$

Соотношение между коэффициентами температуропроводности, определяемыми (16) и (18), становится понятным при учете соотношения между временем

$\tau^* \sim mv_T / (Qn^{(k+1)})$  и  $\tau_{st}$  (см. (9) и (17))

$$\frac{\tau^*}{\tau_{st}} \sim \left( \frac{T}{Qn^k} \right)^{(k-1)/k}. \quad (19)$$

Больцмановский подход соответствует пределу  $n \rightarrow 0$ , т.е. случаю, когда время  $\tau^*$ , начиная с которого справедливо кинетическое уравнение (10), в бесконечное число раз превышает  $\tau_{st}$ . Таким образом, уравнение больцмановского типа, но учитывающее трехчастичные столкновения, просто непригодно для времен, на которых справедливо (10). Следовательно, коэффициенты переноса, получаемые в рассматриваемой задаче на основе больцмановского подхода, являются просто промежуточной асимптотикой, справедливой до времен, на которых формируются истинные "послестолкновительные" корреляции.

Применимость больцмановского подхода ограничена временами, на которых оправдано пренебрежение флуктуациями, которые (флуктуации) не описываются уравнением больцмановского типа [5], но также являются, разумеется, одним из атрибутов "послестолкновительных" корреляций, и, кроме того, при получении (18) не учитывались возникновение в неоднородной среде "среднего" поля, действующего на частицы, и его влияние на явления переноса.

Также напомним, что  $H$ -теорема доказана при учете лишь парных столкновений; при дописывании в столкновительный член слагаемых, описывающих тройные (и более высокого порядка) столкновения, провести доказательство  $H$ -теоремы не удастся.

Кроме того, заметим, что для описания теплопроводности линеаризованным уравнением (10) необходимо, чтобы температура могла значительно изменяться лишь на масштабах  $L \gg l^* = v_T \tau^*$ , а линеаризация уравнения больцмановского типа возможна при существенном изменении температуры на длинах  $L \gg l_{st}$ , причем  $l^* \gg l_{st}$ . С другой стороны, если на систему действует "внешний шум" такой величины, что на временах порядка  $\tau_{st}$  систему можно считать замкнутой, а на временах порядка  $\tau^*$  уже нет, то уравнение (10) неприменимо для описания динамики ни при каких временах. Сказанное позволяет посмотреть на применимость обсуждаемых кинетических уравнений с несколько иной точки зрения.

Коэффициент температуропроводности, определяемый (16), не аналитически зависит от  $n$ . Последнее принципиально важно, поскольку в прямой аналогии с "кластерными разложениями", используемыми в равновесных задачах, Н.Н. Боголюбов предположил [12,13], что существует аналитическое разложение коэффициентов переноса по степеням плотности, а начиная с работы [7], в которой было впервые показано, что подобного разложения в действительности не существует, этот вопрос традиционно вызывает существенный интерес.

## Дальнействующие степенные потенциалы взаимодействия $0 < k < 1$

В рассматриваемом случае коэффициент температуропроводности, учитывающий флуктуации, по-прежнему описывается выражением

$$\chi \sim \left( \frac{Qn^k}{T} \right)^{1/(k-1)} \frac{v_T}{n}, \quad (20)$$

а коэффициент температуропроводности, вычисленный на основании больцмановской идеологии о длине свободного пробега,

$$\chi_B \sim v_T l_{st} = \frac{v_T}{n^2} \left( \frac{T}{Q} \right)^{1/k}. \quad (21)$$

Вместе с тем физическая интерпретация выражений (20) и (21) принципиально отличается от интерпретации их аналогов для случая степенных короткодействующих потенциалов межчастичного взаимодействия. В самом деле, в случае дальнедействующего взаимодействия флуктуации увеличивают коэффициент температуропроводности при  $T \gg Qn^k$ , а в случае короткодействования имеет место обратная ситуация. Кроме того, напомним, что в дальнедействующем случае уравнения больцмановского типа становятся применимыми не с времен порядка  $\tau_{st}$ , а начиная с других, гораздо более коротких, промежутков времени. Не останавливаясь на этом вопросе подробно, проиллюстрируем ситуацию хорошо известным примером почти идеальной плазмы: почти идеальная плазма ( $N_D = (T/e^2 n^{1/3})^{3/2}$ ) описывается кинетическим уравнением Ленарда-Балеску при временах  $t > 1/\omega_{pe}$ , где  $\omega_{pe}^2 = 4\pi n e^2 / m$  — плазменная частота, в то время как столкновительное время  $\tau_{st} \sim N_D / \omega_{pe}$  [13]. Разумеется, подобное положение дел объясняется ролью коллективных процессов при наличии в системе дальнедействующих сил.

## Температуропроводность при $k = 1$

Частный случай  $k = 1$ , разделяющий дальнедействующие и короткодействующие потенциалы, представляет особый интерес. Прежде всего заметим, что при  $k = 1$  размерности величин  $n$  и  $T$  по отношению к группе  $G_1$  совпадают, т.е. в теории переноса возникает параметр  $\gamma$ , безразмерный как по отношению к физическим размерностям, так и по отношению к группе  $G_1$ ,

$$\gamma = \frac{Qn}{T}.$$

С другой стороны, оказывается невозможным построить, исходя лишь из параметров  $n$  и  $T$ , величину с размерностью коэффициента температуропроводности (т.е. преобразующуюся как частное от квадрата длины и времени) по отношению к группе  $G_1$ . Таким образом, при  $k = 1$  нельзя построить линейную теорию переноса,

учитывающую флуктуации температуры, с малым, но постоянным  $\nabla T$ .

Рассмотрим случай произвольного  $k$ , когда к среде приложен медленно меняющийся в пространстве градиент температуры, т. е.

$$\frac{dT}{dx} = \left( \frac{dT}{dx} \right)_0 \cos(qx), \quad (22)$$

где  $1/q$  — значительно превышает длину свободного пробега.

Коэффициент температуропроводности  $\chi_q$ , описывающий линейный отклик на возмущение температуры (22), может быть частично определен из требования его правильной размерности как по отношению к физическим размерностям, так и по отношению к группе  $G_1$ . Таким образом, можно записать

$$\chi_q = v_T l_{fl} F_1(k, ql_{fl}) \quad \text{при } k \neq 1, \quad (23)$$

где

$$l_{fl} = \frac{1}{n} \left( \frac{Qn^k}{T} \right)^{1/(k-1)},$$

а при  $k = 1$

$$\chi_q = \frac{v_T}{q} F_2(\gamma), \quad (24)$$

где  $\gamma = Qn/T$ ,  $F_1$  и  $F_2$  — неизвестные функции от указанных переменных.

Связь между функциями  $F_1$  и  $F_2$  можно конкретизировать, замечая, что  $\chi_q$  при  $k \neq 1$  должен переходить в  $\chi_q$  при  $k = 1$  в результате предельного перехода  $k \rightarrow 1$  при фиксированных  $n$ ,  $q$  и  $T$ , т. е.

$$\lim_{k \rightarrow 1} l_{fl} F_1(k, ql_{fl}) = \frac{F_2(\gamma)}{q}. \quad (25)$$

## Физический смысл полученных результатов

Прежде всего заметим, что попытка интерпретировать (24) на основе представлений о длине свободного пробега частиц  $\Lambda$  приводит к физически бессмысленному результату  $\Lambda \sim 1/q$ . Вместе с тем выражение для коэффициента температуропроводности (24) может быть понято, если учесть, что наличие флуктуаций при приложении к среде градиента температуры приводит к "дискриминации" флуктуаций определенного типа (см. Введение), что должно приводить к спонтанному образованию макроскопических структур (самоорганизации) в фазовом пространстве. В реальном пространстве такие структуры представляют собой спонтанно возникающие в среде гидродинамические течения и пучки частиц. Таким образом, согласно (24), (25), следует сделать вывод, что при  $k$ , близких к 1, определяющий вклад в теплоперенос могут вносить макроскопические структуры, спонтанно формирующиеся в фазовом пространстве из-за влияния приложенного к среде градиента температуры на структуру развивающихся в среде флуктуаций.

При  $k$ , близком к 1, движение частиц на малых масштабах слабо зависит от знака  $\Delta = 1 - k$ . Вместе с тем поведение коэффициента температуропроводности при больших  $T$  принципиально изменяется в зависимости от знака  $\Delta$ . Физическую причину этого легко понять в рамках развиваемой в настоящей работе идеологии, рассмотрев структуру крупномасштабных флуктуаций при  $\Delta$  различного знака. Выделим на прямой, по которой движутся частицы в рассматриваемой задаче, отрезок длины  $R$ . Считая первоначально среду идеальным газом, что интуитивно должно выполняться с хорошей точностью при больших  $T$ , находим, что флуктуация числа частиц  $\delta N_R$  на выделенном отрезке может быть оценена как

$$\langle (\delta N_R)^2 \rangle \sim nR. \quad (26)$$

Вклад в потенциальную энергию системы от такой флуктуации оценивается величиной

$$\delta U_R \sim QnR^{1-k}. \quad (27)$$

Однако в тепловом равновесии из распределения Гиббса следует, что в системе "запрещены" флуктуации, дающие вклад в энергию, превышающий  $T$ . Следовательно, при  $k < 1$  в системе запрещены крупномасштабные флуктуации, что принципиально отличает случай системы с дальнедействующим потенциалом межчастичного взаимодействия от систем с короткодействующим потенциалом  $k > 1$ . Последнее должно сказываться на поведении коэффициентов переноса.

## Заключение

В настоящей работе показано, что флуктуации могут нетривиальным образом влиять на транспортные свойства среды. На примере коэффициента температуропроводности найдены условия, при которых флуктуации замедляют релаксацию. Более того, при определенных условиях ( $k \approx 1$ ) учет флуктуаций приводит к спонтанному образованию макроскопических структур, определяющих кинетические свойства среды. Заметим, что использованная аргументация и развитый метод по существу нигде не используют специфики одномерной задачи, т. е. допускают обобщение на случай и большего числа измерений.

Специально укажем, что для разреженного газа с потенциалом межчастичного взаимодействия конечного радиуса действия, много меньшего среднего межчастичного расстояния, невозможно совершить предельный переход, позволяющий перейти от (7) к (9), так как в любой момент времени большинство частиц не испытывает никакого ускорения ("расширенная" функция распределения приближенно сводится к  $f(t, r, v)\delta(a)$ ) и невозможно ввести необратимость по времени, следуя схеме настоящей работы (формально  $\tau^* = +\infty$ ). Такие задачи требуют особого рассмотрения и наиболее подробно изучены в частном случае разного рода бильардов.

Авторы выражают благодарность С.И. Анисимову за интерес к работе и обсуждение ее метода и результатов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 98-02-17229, 98-02-17441) и Совета по программе поддержки ведущих научных школ (№ 96-15-96448).

## Список литературы

- [1] Турбулентность. Принципы и применения / Под ред. У. Фроста, Т. Моугезена. Методы измерения атмосферной турбулентности. Гл. 12. М.: Мир, 1980.
- [2] *Брановер Г.Г., Цинобер А.Б.* Магнитная гидродинамика несжимаемых сред. М.: Наука, 1970.
- [3] *Белян А.В., Моисеев С.С., Чхетиани О.Г.* Турбулентная вязкость в спиральной турбулентности. М.: ИКИ РАН, 1992.
- [4] *Белян А.В., Моисеев С.С., Чхетиани О.Г.* // ДАН. 1994. № 344. С. 34.
- [5] *Леонтович М.А.* // ЖЭТФ. 1935. Т. 5. С. 211.
- [6] *Moiseev S., Onishenko O.* // Physica B. 1996. Vol. 228. P. 83.
- [7] *Dorfman J.R., Cohen E.G.D.* // Phys. Lett. 1965. Vol. 16. P. 124.
- [8] *Гордиенко С.Н.* // ЖЭТФ. 1994. Вып. 106. С. 436.
- [9] *Гордиенко С.Н.* // Физика плазмы. 1997. Т. 23. С. 754.
- [10] *Кадоццев Б.Б.* // ЖЭТФ. 1957. Т. 33. С. 151.
- [11] *Кац М.* Вероятность и смежные вопросы в физике. М.: Наука, 1965.
- [12] *Боголюбов Н.Н.* Избранные труды. Киев: Наукова думка, 1970.
- [13] *Шелест А.В.* Метод Боголюбова в динамической теории кинетических уравнений. М.: Наука, 1990.