

## Эффект Холла и осциллирующий распад магнитного поля

© Д.А. Шалыбков, В.А. Урпин

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,  
194021 Санкт-Петербург, Россия

(Поступило в Редакцию 28 сентября 1998 г. В окончательной редакции 2 августа 1999 г.)

Рассмотрено затухание сильного магнитного поля в проводящей среде. Показано, что недиссипативные холловские токи могут существенно изменять поведение магнитного поля при его распаде. Благодаря своему нелинейному характеру эффект Холла приводит к возбуждению полей высокой мультипольности даже для простейших начальных магнитных конфигураций. В частности, в ходе эволюции первоначально дипольной конфигурации могут образовываться не только квадрупольная и более высокие полоидальные гармоники, но и тороидальное поле, отличное от нуля только внутри проводящего тела. Нелинейные холловские токи связывают различные гармоники между собой и при достаточном сильном поле способны осуществить эффективный обмен энергией между гармониками. Благодаря такому перераспределению магнитной энергии эволюция различных гармоник приобретает осциллирующий характер. Период осцилляций определяется характерным временем холловского дрейфа и может быть достаточно коротким в сильных магнитных полях.

### Введение

При наличии достаточно сильного магнитного поля проводимость и сопротивление вещества имеют анизотропный характер и описываются тензорами. Благодаря этому затухание сильных магнитных полей происходит существенно нелинейным образом и может заметно отличаться от простейшего экспоненциального закона, которым, в частности, характеризуется распад основных гармоник в однородной проводящей сфере (см., например, [1]). Данная работа посвящена исследованию влияния эффекта Холла и обусловленной им анизотропии проводимости на эволюцию магнитных полей. Холловский ток возникает благодаря дрейфу электронов перпендикулярно электрическому и магнитному полям и является бездиссипативным, так как не дает вклада в увеличение плотности энтропии среды. Однако в замагниченном веществе с  $\omega_B \tau \gg 1$  ( $\omega_B = eB/mc$  — гирочастота электронов,  $\tau$  — время их релаксации) холловский дрейф может изменять геометрию как электрических токов, так и магнитного поля и тем самым косвенным образом влиять на затухание магнитных полей. В частном случае чисто тороидальной магнитной конфигурации такая задача рассматривалась в работе [2]. Было показано, что холловские токи могут существенно ускорять затухание магнитного поля. Это происходит благодаря формированию под действием холловского дрейфа областей с большой плотностью электрического тока и сильными неоднородностями магнитного поля, где происходит ускоренная диссипация. Кроме того, было обнаружено, что в ходе эволюции может изменяться симметрия поля. Так, первоначально зеркально-симметричное относительно экваториальной плоскости тороидальное поле может стать зеркально-симметричным вследствие эффекта Холла, а спустя некоторое время, когда величина поля уменьшится, оно вновь станет симметричным.

В настоящей работе мы рассмотрим влияние холловских токов на эволюцию полоидальных магнитных конфигураций. Как известно (см., например, [3]), для таких

конфигураций  $\mathbf{B} \neq 0$  как внутри, так и вне проводящего тела (напомним, что для тороидальных полей  $\mathbf{B} = 0$  вне тела). Эволюция полоидальных полей может иметь ряд некачественных особенностей по сравнению со случаем чисто тороидального поля. Прежде всего холловские токи могут возбуждать тороидальные гармоники даже из первоначально чисто полоидального поля, в то время как эволюция тороидального поля не сопровождается возбуждением полоидального. Связь между различными компонентами поля, которая осуществляется благодаря эффекту Холла, позволяет производить перекачку энергии из одной компоненты в другую и обратно. В результате этого омическое затухание токов может сопровождаться осцилляциями амплитуд различных компонент (на фоне монотонного уменьшения полной магнитной энергии). Эти осцилляции аналогичны хорошо известным геликоидальным колебаниям в плазме (см., например, [4]), также связанным с дрейфом электронов.

Попытки исследовать влияние холловских токов на диссипацию магнитного поля предпринимались рядом авторов [5,6]. Однако для упрощения численных расчетов авторы этих работ провели усреднение магнитного поля по углу. В полученных формулах ошибочно отсутствуют члены, приводящие к генерации тороидального поля при наличии только одной гармоники полоидального. Кроме того, в работе [5] был рассмотрен случай малого холловского параметра  $\omega_B \tau \ll 1$ , когда скорость холловского дрейфа электронов мала по сравнению со скоростью омической диссипации и соответственно малы отклонения от затухания, получающегося в линейном приближении.

Отметим, что нелинейные эффекты, связанные с анизотропией проводимости и, в частности, с эффектом Холла, имеют особое значение для астрофизических приложений (см., например, [7]), где в ряде объектов (белые карлики, нейтронные звезды) магнитные поля могут достигать значений  $\sim 10^8 - 10^{13}$  Gs и способны сильно замагничивать плазму.

В разделе 1 приведены основные уравнения, описывающие эволюцию магнитного поля в среде с анизотропной проводимостью. В п. 3 представлены результаты численных расчетов, обсуждение полученных результатов дано в п. 4.

1. В магнитногидродинамическом приближении эволюция магнитного поля  $\mathbf{B}$  описывается уравнением индукции

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c \nabla \times \mathbf{E}, \quad (1)$$

и законом Ампера

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{E}$  — электрическое поле,  $\mathbf{j}$  — плотность тока.

При отсутствии в среде макроскопических движений закон Ома имеет вид (см., например, [1])

$$\mathbf{E} = R_{\parallel} \mathbf{j}_{\parallel} + R_{\perp} \mathbf{j}_{\perp} + R_H \mathbf{j} \times \mathbf{b}, \quad (3)$$

$R_{\parallel}$ ,  $R_{\perp}$  и  $R_H$  — компоненты тензора электросопротивления вдоль магнитного поля, поперек поля и холловская соответственно;  $\mathbf{b} = \mathbf{B}/|\mathbf{B}|$  — единичный вектор вдоль магнитного поля.

Холловский ток в веществе обусловлен дрейфом зарядов перпендикулярно электрическому и магнитному полям. Этот ток является бездиссипативным, так как не дает вклада в увеличение плотности энтропии среды  $Q$

$$Q = \mathbf{E} \mathbf{j} = R_{\parallel} j_{\parallel}^2 + R_{\perp} j_{\perp}^2. \quad (4)$$

В приближении времени релаксации (см., например, [8]) выражения для компонент тензора электросопротивления имеют простой вид

$$R_{\parallel} = R_{\perp} \equiv R_0 \frac{m}{en\tau}, \quad R_H = \frac{B}{nse}, \quad (5)$$

где  $e = |e|$ ,  $m$  — заряд и эффективная масса электронов.

В этом приближении имеем

$$\frac{R_H}{R_0} \equiv \alpha = \omega_B \tau. \quad (6)$$

При  $\omega_B \tau \ll 1$  имеем  $R_H \ll R_0$  и магнитное поле слабо влияет на перенос заряда. Если  $\omega_B \tau \gg 1$ , то  $R_H \gg R_0$  и влияние магнитного поля существенно. Отметим, что холловское сопротивление  $R_H$  не зависит от времени релаксации, что обусловлено недиссипативным характером холловских токов.

Уравнения (1)–(3) с учетом (5) и (6) составляют замкнутую систему для решения поставленной задачи. Для простоты рассмотрим эволюцию поля в однородном изотермическом проводящем шаре. В этом случае величины  $R_0$  и  $\alpha/B$  не зависят от координат. Тогда уравнение индукции (1) принимает вид

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{cR_0}{4\pi} \left\{ \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \frac{\alpha}{B} \nabla \times ((\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}) \right\}. \quad (7)$$

Произвольное магнитное поле можно представить в виде суммы полоидальной  $\mathbf{B}_p$  и тороидальной  $\mathbf{B}_t$  компонент. Для осесимметричных конфигураций в сферической системе координат имеем (см., например, [3])

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_p + \mathbf{B}_t = \nabla \times A(r, \theta) \mathbf{e}_{\varphi} + B_{\varphi}(r, \theta) \mathbf{e}_{\varphi}, \quad (8)$$

где  $\mathbf{e}_{\varphi}$  — единичный азимутальный вектор;  $r, \theta, \varphi$  — сферические координаты.

Подставляя (8) в (7), получим систему двух уравнений, описывающих эволюцию полоидального и тороидального магнитных полей,

$$\frac{\partial \mathbf{B}_p}{\partial t} = -\frac{c^2 R_0}{4\pi} \left\{ \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}_p) + \beta \nabla \times ((\nabla \times \mathbf{B}_t) \times \mathbf{B}_p) \right\}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_t}{\partial t} = -\frac{c^2 R_0}{4\pi} \left\{ \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}_t) + \beta \nabla \times ((\nabla \times \mathbf{B}_p) \times \mathbf{B}_p + (\nabla \times \mathbf{B}_t) \times \mathbf{B}_t) \right\}, \quad (10)$$

где  $\beta = \alpha/B$ .

Отметим, что  $\nabla \times \mathbf{B}_p$  является тороидальным вектором и, следовательно,  $(\nabla \times \mathbf{B}_p) \times \mathbf{B}_t = 0$ . При  $\alpha = 0$  (т. е. при пренебрежении холловскими токами) тороидальная и полоидальная компоненты эволюционируют независимо. В этом случае собственные моды обеих компонент распадаются экспоненциально с характерным временем распада, тем большим, чем меньше номер моды. Так, характерное время распада для основной полоидальной моды (дипольное поле) составляет

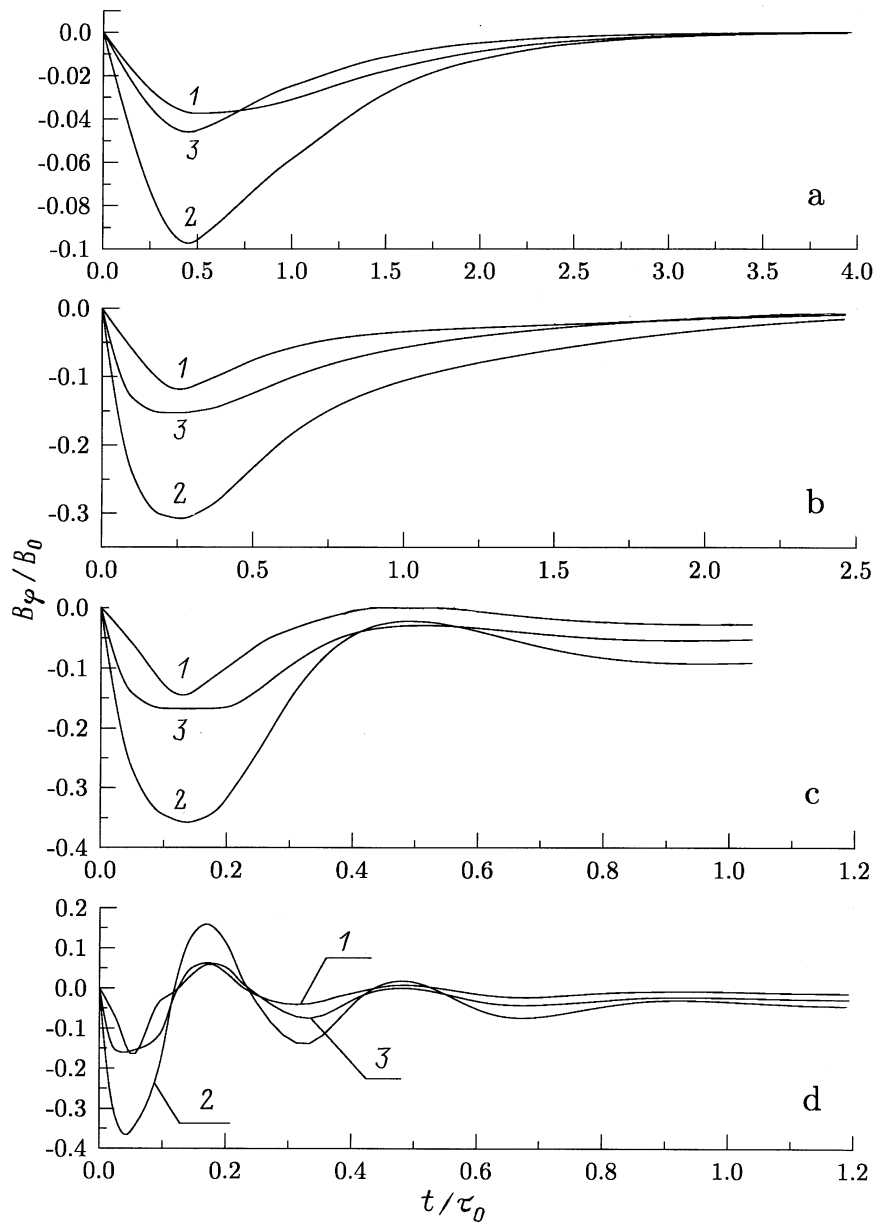
$$\tau_0 = \frac{4a^2}{\pi c^2 R_0}, \quad (11)$$

где  $a$  — радиус сферы.

При  $a \gg 1$  полоидальная и тороидальная компоненты оказываются сильно связанными. Из уравнения (10) видно, что даже для чисто дипольной начальной конфигурации в общем случае  $(\nabla \times \mathbf{B}_p) \times \mathbf{B}_p \neq 0$ , что приводит к генерации тороидального поля. В свою очередь тороидальное поле генерирует высокие гармоники полоидального поля согласно нелинейному члену в правой части уравнения (9). Отметим, что для чисто тороидальной начальной конфигурации холловский ток не вызывает генерации полоидального поля. Генерация тороидального поля из полоидального имеет в общем случае место и для чисто дипольной конфигурации. В результате для изучения влияния холловского тока на распад полоидального поля нет нужды привлекать сложную начальную конфигурацию, состоящую из смеси тороидального и полоидального полей, как это утверждалось в работах [5,6]. В качестве начального мы выбрали наиболее простое распределение

$$A(r, \theta) = \pi B_0 \sin(\theta) \left[ \frac{\sin(\pi r/a)}{(\pi r/a)^2} - \frac{\cos(\pi r/a)}{\pi r/a} \right], \quad (12)$$

$$B_{\varphi} = 0.$$



**Рис. 1.** Зависимость от времени тороидального поля для  $\theta = 140^\circ$  и  $\alpha = 0.2$  (a), 1 (b), 2 (c), 5 (d). Кривые — различные значения радиуса:  $r = 0.3a$  (1),  $0.7a$  (2),  $0.9a$  (3). Поле нормировано на начальное значение полоидального магнитного поля на экваторе. Время нормировано на  $\tau_0$  (11).

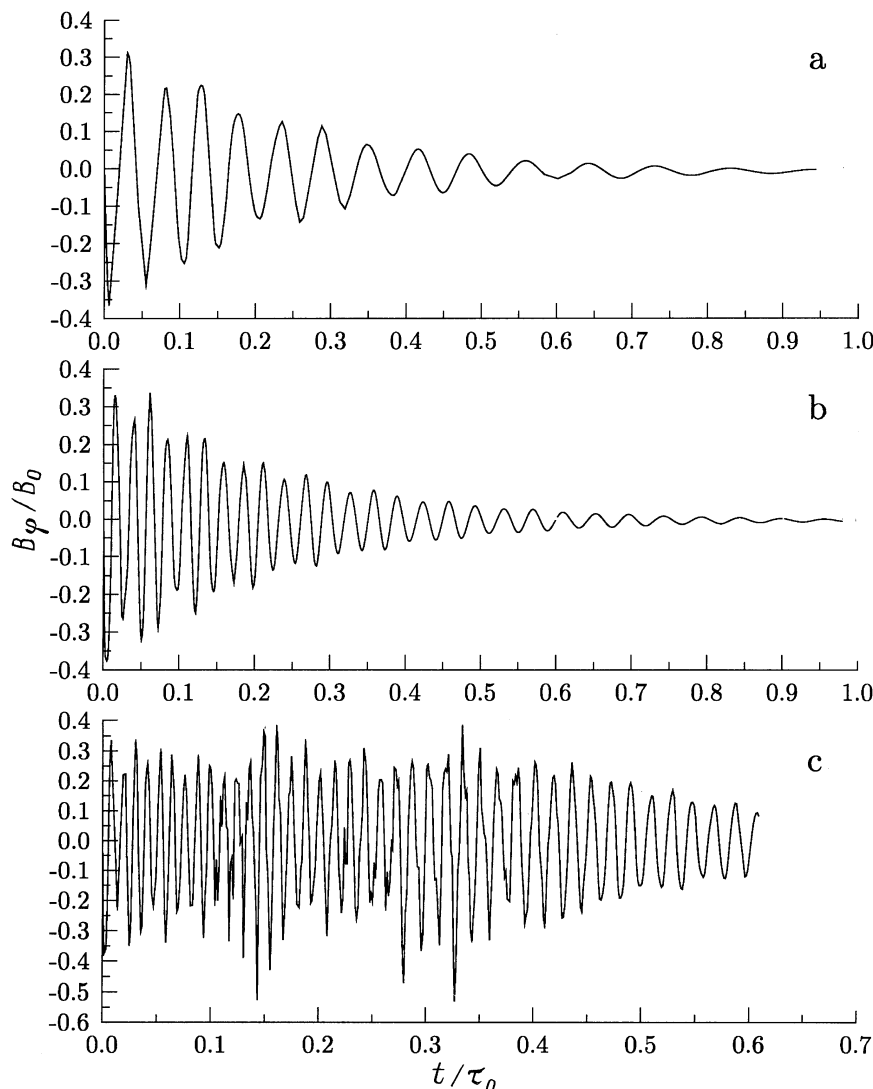
Нормировочная константа в (12) выбиралась так, что поверхностное значение поля на экваторе равно  $B_0$ . Векторный потенциал (12) соответствует фундаментальной дипольной моде для однородной сферы с характерным временем распада (11) при  $\alpha = 0$ .

Для уравнений (9) и (10) ставились следующие граничные условия. Мы предполагали, что проводящий шар находился в вакууме. Это требует, чтобы  $\mathbf{V}$  исчезло на поверхности, а  $b f B_p$  сшивалось с вакуумным магнитным полем при  $r = a$ . Кроме того, и тороидальное поле  $\mathbf{V}_\varphi$ , и потенциал  $A$  должны стремиться к нулю при  $r \rightarrow 0$ .

**2.** Уравнения (9), (10) решались нами численно с использованием стандартных явных разностных методов

(см., например, [2]). Если ввести безразмерное время  $\tau = (c^2 R_0 / 4\pi a^2) t$ , то в (9) и (10) входит единственный параметр  $\alpha_0 = \beta B_0$ , равный значению холловского параметра в начальный момент времени. Мы произвели расчеты эволюции поля для следующих значений  $\alpha_0$ : 0.2, 1, 2, 5, 25, 50, 100. Во всех расчетах внешнее граничное условие аппроксимировалось девятью первыми мультиполями.

Холловские токи приводят к генерации высших мод из начальной дипольной моды. При этом генерируются как полоидальные, так и тороидальные моды. Величина полоидальных мод быстро спадает с ростом номера. Тороидальное поле, генерируемое на начальной стадии



**Рис. 2.** То же, что на рис. 1, для  $\alpha = 25$  (a), 50 (b), 100 (c) при  $r = 0.7a$ .

эволюции, является антисимметричным относительно экваториальной плоскости ( $B_\varphi = 0$  при  $\theta = \pi/2$ ). Такое поведение тороидального поля является следствием симметричности начальной конфигурации и отсутствием потока через азимутальную плоскость в начальный момент.

Нелинейность задачи приводит к немонотонному поведению отдельных мод. Все моды, включая исходную дипольную, испытывают осцилляции, которые вызваны бездиссипативным обменом энергией между отдельными модами и подобны хорошо известным геликоидальным осцилляциям замагниченной плазмы (см., например, [9]). При  $\alpha_0 \leq 1$  диссипативные процессы происходят быстрее холловских и осцилляции не успевают установиться, в то время как при  $\alpha_0 \gg 1$  осцилляции хорошо выражены (рис. 1, 2). Наиболее ярко указанные колебания проявляются для тороидального поля.

На рис. 1 и 2 приведена зависимость тороидального поля от времени для различных значений радиуса и

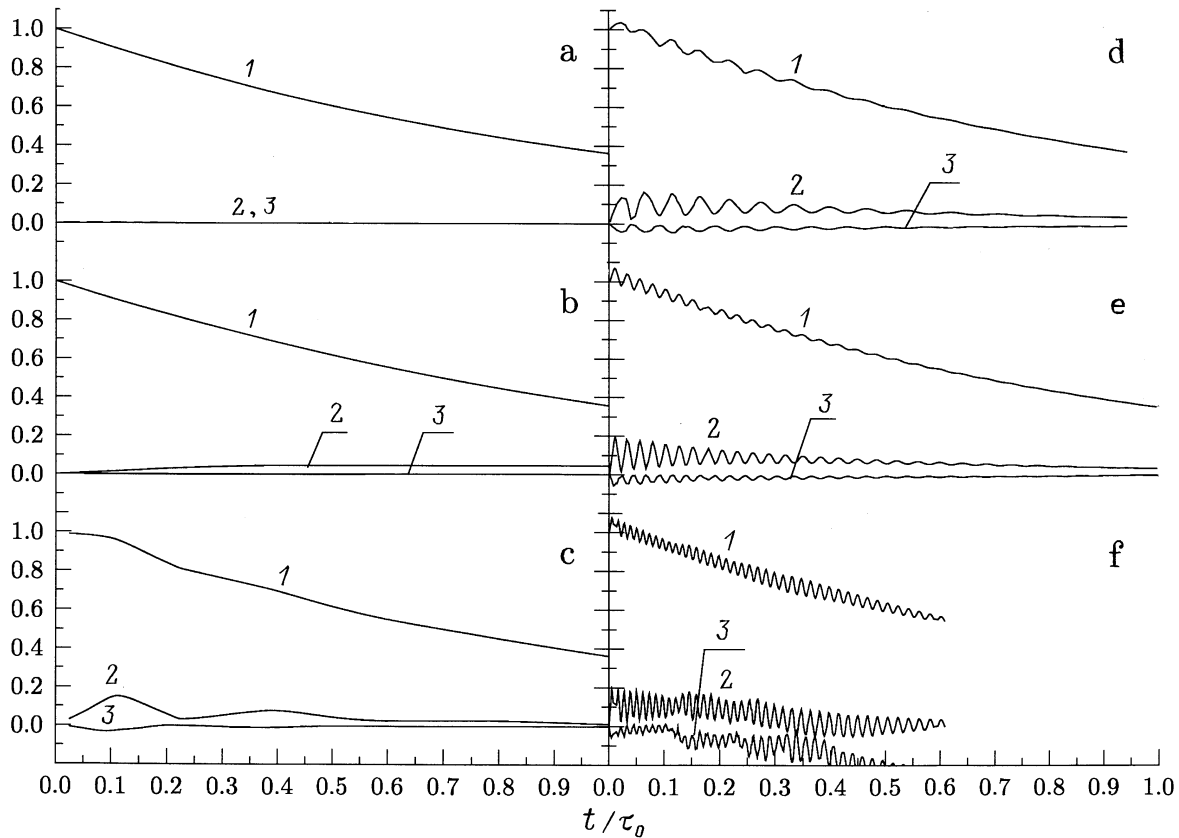
для  $\theta = 0.8\pi$ . В начальный момент времени, пока полоидальное поле не успело заметно распасться, период осцилляции равен  $\tau_{H0} = \tau_0/\alpha_0$  ( $\tau_0$  дается (11)). Однако распад полоидального поля приводит к увеличению периода. Изменение периода со временем приближенно описывается формулой

$$\tau_H \approx \tau_{H0} \exp(-t/\tau_0). \quad (13)$$

Амплитуда осцилляции зависит от  $r$  и  $\theta$ . Как функция  $\theta$  величина  $B_\varphi$  достигает своего максимума при  $\theta \simeq 40$  и  $140^\circ$  (напомним, что  $B_\varphi$  антисимметрично).

Интересно отметить, что амплитуда колебаний тороидального поля достигает своего максимума ( $\sim 0.3$ ) уже для  $\alpha_0 \sim 1$ . С дальнейшим ростом  $\alpha$  она не меняется.

Что касается полной энергии магнитного поля, то для всех значений  $\alpha_0$  влияние холловских токов на ее затухание несущественно и полная энергия магнитного поля на протяжении всей эволюции практически не отличается



**Рис. 3.** Эволюция полоидальных мультиполей на поверхности шара для  $l = 1$  (1), 3 (2), 5 (3) и  $\alpha = 0.2$  (a), 1 (b), 5 (c), 25 (d), 50 (e), 100 (f). Мультиполи нормированы на начальное значение дипольного поля на экваторе.

от значения, полученного без учета холловских токов. Это происходит потому, что энергия высших мультиполей, генерируемых холловскими токами, не превосходит 10% от энергии дипольного поля. Последнее утверждение хорошо иллюстрируется поведением полоидальных мультиполей на поверхности, которое показано на рис. 3. Напомним, что мы аппроксимировали внешнее граничное условие мультиполями с номером  $l \leq 9$ . Однако уже мультиполи с  $l \geq 5$  дают пренебрежимый вклад в полное магнитное поле. Поэтому на рис. 3 показаны лишь мультиполи с  $l = 1, 3, 5$  (мультиполи с четными номерами не вносят вклада из-за неподходящей четности). Подобно тороидальному полю полоидальные моды испытывают осцилляции. При этом осциллируют не только вновь генерируемые моды с  $l > 1$ , но и начальная дипольная компонента. Однако для дипольной компоненты амплитуда осцилляций мала ( $\sim 10\%$  от неосциллирующей части). Для  $l = 3$  и 5 осцилляции сильнее: для  $l = 3$  осциллирующая часть составляет порядка среднего значения, а при  $l = 5$  эволюция протекает даже с изменением знака. Период полоидальных осцилляций, очевидно, такой же как тороидальных, так как эти осцилляции вызываются обменом энергии между модами.

**3.** В настоящей работе мы провели прямые численные расчеты влияния холловских токов на эволюцию магнит-

ного поля в проводящей сфере. Мы использовали максимально упрощенную модель, которая, однако, позволила выявить многие интересные особенности распада поля с учетом холловских токов. Оказалось, что даже для простейшей начальной конфигурации, соответствующей дипольному полю вне сферы, эволюция поля достаточно сложна. Холловские токи приводят к обмену энергией между разными модами и как результат к генерации высших мультиполей как полоидального, так и тороидального полей. Наиболее интересная, на наш взгляд, черта эволюции — осцилляторное поведение всех мод магнитного поля. Природу этих осцилляций можно легко понять на простом примере линейных волн в замагниченной плазме. Рассмотрим поведение малых возмущений тороидального  $\delta \mathbf{V}_t$  и полоидального  $\delta \mathbf{V}_p$  в присутствии невозмущенного полоидального поля  $\mathbf{V}_{p0}$ . Для простоты предположим, что длина волны возмущений мала по сравнению как с радиусом сферы, так и с характерным масштабом изменения  $\mathbf{V}_{p0}$ . Тогда поведение  $\delta \mathbf{V}_p$  и  $\delta \mathbf{V}_t$  описывается линеаризованными уравнениями (9) и (10)

$$\frac{\partial \delta \mathbf{V}_p}{\partial t} = -\frac{c^2 R_0}{4\pi} \left[ \nabla \times (\nabla \times \delta \mathbf{V}_p) + \beta \nabla \times ((\nabla \times \delta \mathbf{V}_t) \times \mathbf{V}_{p0}) \right], \quad (14)$$

$$\frac{\partial \delta \mathbf{B}_t}{\partial t} = -\frac{c^2 R_0}{4\pi} \left[ \nabla \times (\nabla \times \delta \mathbf{B}_t) + \beta \nabla \times ((\nabla \times \delta \mathbf{B}_p) \times \mathbf{B}_{p0}) \right], \quad (15)$$

Как и для крупномасштабного поля, учет холловских токов приводит к появлению в уравнениях членов ( $\sim \beta$ ), приводящих к связи тороидального и полоидального магнитных полей. В нашем приближении можно считать, что  $\delta \mathbf{B}_p$  и  $\delta \mathbf{B}_t$  пропорциональны  $\exp(i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r})$ , где  $\omega$  и  $\mathbf{k}$  — частота и волновой вектор соответственно. Для плоской волны уравнения (14) и (15) преобразуются к виду

$$(i\omega + \omega_\sigma) \delta \mathbf{B}_p = -\frac{c^2 R_0 \beta}{4\pi} (\mathbf{kB}_{p0}) \mathbf{k} \times \delta \mathbf{B}_t, \quad (16)$$

$$(i\omega + \omega_\sigma) \delta \mathbf{B}_t = -\frac{c^2 R_0 \beta}{4\pi} (\mathbf{kB}_{p0}) \mathbf{k} \times \delta \mathbf{B}_p. \quad (17)$$

$\omega_\sigma = c^2 R_0 k^2 / 4\pi$  — обратное время омической диссипации.

Уравнения (16) и (17) позволяют более ясно понять связь между полоидальным и тороидальными полями. Холловский ток, пропорциональный  $\delta \mathbf{B}_t$ , изменяет величину, а следовательно, и энергию полоидального поля. В свою очередь тороидальное поле изменяется под действием холловского тока, пропорционального  $\delta \mathbf{B}_p$ . Поскольку холловские токи являются недиссипативными, то они влияют только на  $\text{Re}(\omega)$ , тогда как  $\text{Im}(\omega)$  определяется омической диссипацией. Из (16) и (17) следует дисперсионное соотношение

$$\omega = \pm \omega_\sigma \beta (\mathbf{kB}_{p0}) / k + i\omega_\sigma. \quad (18)$$

В сильных магнитных полях ( $\beta \mathbf{B}_{p0} \gg 1$ ) уравнение (18) описывает волну с периодом  $P = 2\pi k / \omega_\sigma \times \beta (\mathbf{kB}_{p0})$  и амплитудой, медленно убывающей с характерным временем  $\sim \omega_\sigma^{-1}$ . Эти волны (иногда называемые геликонами) определяются эффектом Холла и могут существовать только в замагниченной плазме.

Аналогично мелкомасштабным возмущениям крупномасштабное поле тоже испытывает осцилляции с периодом  $\tau_H = \tau_0 / \alpha$ . С течением времени  $\alpha$  убывает и период растет, сравниваясь с  $\tau_0$ . Амплитуда осцилляций может достигать  $\sim 0.1$  от амплитуды исходной дипольной моды. Для тороидальной компоненты амплитуда быстро достигает насыщения при увеличении  $\alpha_0$  и практически не зависит от  $\alpha_0$  при  $\alpha_0 \geq 1$ . При этом максимальная амплитуда составляет  $\sim 0.3$  от исходной величины полоидального поля на экваторе. После достижения стадии, когда  $\alpha \leq 1$ , влияние холловских токов на эволюцию становится пренебрежительным.

В заключение отметим, что в процессе всей эволюции в мультиполи высших порядков преобразуется не более 10% энергии исходной дипольной компоненты. В результате влияние холловских токов на скорость затухания магнитной энергии несущественно, что принципиально отличается от случая чисто тороидального поля.

Авторы благодарны за финансовую поддержку РФФИ (грант № 97-02-18096), а также ИНТАС (грант № 96-0154).

## Список литературы

- [1] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.
- [2] Урпин В.А., Шалыбков Д.А. // ЖЭТФ. 1991. Т. 100. С. 1272–1280.
- [3] Chandrasekhar S., Prendergrast K. // Proc. Nat. Acad. Sci. 1956. Vol. 42. P. 5–21.
- [4] Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Физическая кинетика. М.: Наука, 1979.
- [5] Muslimov A., Van Horn H., Wood M. // Astrophys. J. 1995. Vol. 442. P. 758–767.
- [6] Naito T., Kojima Y. // Mon. Not. R. Astr. Soc. 1994. Vol. 266. P. 598–608.
- [7] Urpin V., Shalybkov D. // Astron. Astroph. 1995. Vol. 294. P. 117–125.
- [8] Kingsep A., Chukbar K., Yan'kov V. // Rev. Plasma Phys. 1990. Vol. 16. P. 243–258.
- [9] Аскеров Б.М. Кинетические эффекты в полупроводниках. М.: Наука, 1970.