

01;03

Влияние конвекции Марангони на инжекционный механизм неустойчивости

© Р.В. Бирих, А.В. Люшнин

Пермский государственный педагогический университет,
614600 Пермь, Россия

(Поступило в Редакцию 26 мая 1998 г. В окончательной редакции 18 января 1999 г.)

Рассмотрена электроконвективная неустойчивость неизотермического слоя слабопроводящей жидкости со свободной границей, через которую производится инжекция заряда и коэффициент поверхностного натяжения которой линейно зависит от температуры. При расчете невозмущенного стационарного распределения заряда и поля предполагалось, что инжектор отделен от жидкости воздушной прослойкой конечной толщины. При анализе устойчивости системы, однако, считается, что движение в воздушной прослойке не влияет на движение в жидкой фазе и возмущения электрического поля и заряда в воздушной прослойке быстро затухают в связи с ее относительно высокой проводимостью.

1. Изучение проблем электроконвективной неустойчивости движения жидкости и газа связано с многочисленными практическими приложениями в различных областях техники и технологии. Наибольший интерес к этой проблеме обусловлен развитием теории пробоя и предпробойных состояний. Возникновение движения в слое жидкости резко меняет перенос заряда через нее и условия пробоя. Математическое моделирование такой задачи приводит к пониманию протекающих физических процессов.

В последнее время появились новые технологии для интенсификации тепло- и массообмена в слабопроводящих жидкостях при помощи электрического поля. С одной стороны, электрическое поле создает в жидкости объемную пондеромоторную силу, а с другой стороны, заряды находящиеся в жидкости, участвуют в конвективном движении, образуя электрические токи конвекции. Для взаимодействия электрического и гидродинамического полей необходимо наличие объемного заряда.

Существуют две модели, описывающие механизм образования в жидкости объемного заряда, участвующего в процессе прохождения тока: модель проводимости и модель подвижности. В первом случае образование свободного заряда происходит в результате процесса диссоциации–рекомбинации, а во втором случае заряд образуется при инжекции через границу. В соответствии с этим по-разному формируется и закон переноса заряда. В работе рассматривается инжекционный механизм образования в жидкости свободного заряда.

В жидкости с объемным распределением заряда в электрическом поле действует пондеромоторная сила, подобная силе тяжести. При неоднородном распределении объемного заряда механическое равновесие жидкости может оказаться неустойчивым и возникает электроконвективное течение.

Изучению конвективной неустойчивости изотермического слоя слабопроводящей жидкости, заключенной между двумя плоскими твердыми электродами при инжекционном механизме формирования объемного заряда

посвящена работа [1]. Приведены пороговые значения электрического аналога числа Рэлея монотонной неустойчивости для двух предельных случаев: сильной и слабой инжекции. В [2,3] изучалась устойчивость изотермического слоя жидкости со свободной границей, через которую происходит инжекция. Инжектор был расположен на свободной границе. Найдены критическое значение электрического числа Рэлея и соответствующее ему волновое число.

В неизотермической жидкости со свободной границей появляется механизм неустойчивости, связанный с термокапиллярным эффектом. Если вдоль свободной границы сформируется градиент температуры, то из-за температурной зависимости коэффициента поверхностного натяжения появляется тангенциальная сила, способная вызвать конвективное движение в жидкости. Линейная теория термокапиллярной неустойчивости равновесия слоя жидкости с поперечным градиентом температуры рассмотрена в ряде работ [4–8]. Было показано, что при нагреве, осуществляемом со стороны твердой границы, возможна только монотонная неустойчивость, а при подогреве со стороны свободной границы, если она может деформироваться, существует колебательная мода неустойчивости.

Данная работа посвящена изучению взаимодействия двух названных механизмов неустойчивости. Инжекция заряда производится через свободную деформируемую поверхность неизотермической жидкости, коэффициент поверхностного натяжения которой линейно зависит от температуры.

2. Рассмотрим плоский горизонтальный слой слабопроводящей вязкой несжимаемой жидкости толщиной h , заключенный между двумя плоскими параллельными электродами, расстояние между которыми равно H . Начало координат находится на нижней твердой поверхности: ось x направлена горизонтально, а ось z — вертикально вверх. Через слой воздуха, который расположен выше жидкости, происходит инжекция заряда в жидкость. Коэффициент поверхностного натяжения, границы

раздела двух сред, линейно зависит от температуры и описывается формулой $\sigma = \sigma_0 - \sigma_1 T$. Уравнения движения жидкости, переноса тепла и электрического поля в жидкости запишем в виде

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}(\nabla \mathbf{v}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} + \frac{q \mathbf{E}}{\rho}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla T = \chi \Delta T, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{q}{\varepsilon}, \quad \mathbf{E} = -\nabla \phi, \quad (2), (3)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{J} = 0, \quad \mathbf{J} = q(\mathbf{v} + b \mathbf{E}). \quad (4)$$

Здесь \mathbf{v} — вектор скорости жидкости; p — превышение давления над гидростатическим; T — температура; \mathbf{E} — напряженность электрического поля в жидкости; \mathbf{J} — плотность потока свободных зарядов; ϕ — электрический потенциал в жидкости; q — плотность свободных зарядов; ρ — плотность; ν, χ — коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности; ε — диэлектрическая постоянная жидкости; b — подвижность зарядов в жидкости. Макроскопическим движением в воздушной прослойке будем пренебрегать, поскольку это движение практически не влияет на перенос заряженных частиц [3] и слабо механически влияет на движение жидкости. В этом приближении для воздушной прослойки достаточно записать уравнения для поля и тока

$$\operatorname{div} \mathbf{E}_a = \frac{q_a}{\varepsilon_a}, \quad \mathbf{E}_a = -\nabla \phi_a, \quad \mathbf{J}_a = q_a b_a \mathbf{E}_a, \quad (5)$$

Индексом a отмечены величины, относящиеся к воздуху.

Граничные условия для системы уравнений (1)–(5) запишем следующим образом. На инжекторе поддерживается постоянное значение электрического потенциала и выполняется условие для униполярной инжекции [4]

$$z = H: \quad \phi_a = U_H, \quad E_a = 0. \quad (6)$$

Для невозмущенного стационарного состояния границу раздела будем считать изотермической и эквипотенциальной, температуру жидкости и потенциал будем отсчитывать от температуры и потенциала границы раздела. Таким образом, на границе раздела двух сред для основного состояния предполагаются выполненными следующие равенства:

$$z = h: \quad \phi_a = \phi = 0, \quad T = 0, \quad \varepsilon_a E_a - \varepsilon E = 0, \quad J_a = J. \quad (7)$$

Для системы двух слабопроводящих сред с инжекционным законом проводимости, если на границе раздела отсутствуют специфические механизмы формирования поверхностного заряда, реализуется ситуация, в которой поверхностный заряд равен нулю [3]. Этот факт объясняется тем, что при инжекционном механизме проводимости свободный заряд, создающий компенсационное поле, распределяется по всему диэлектрику. Скачок подвижности на границе двух сред сопровождается скачком в объемной плотности свободного заряда, который

компенсирует изменение в подвижности. Нормальная компонента индукции электрического поля оказывается непрерывной.

Граничное условие на коллекторе имеет следующий вид:

$$z = 0: \quad \phi = -U, \quad T = \Theta. \quad (8)$$

Температура нижней границы может быть как положительной, так и отрицательной. Система уравнений (1)–(5) с граничными условиями (6)–(8) имеет равновесное решение, соответствующее покоящейся жидкости $\mathbf{v} = 0$, с линейным распределением температуры

$$T_0(z) = \Theta \left(1 - \frac{z}{h}\right). \quad (9)$$

Распределения электрического потенциала и плотности заряда для двух сред имеют следующее решение: для воздуха

$$\begin{aligned} \phi_{0a}(z) &= \left(\frac{8J_0}{9b_a \varepsilon_a}\right)^{\frac{1}{2}} \left[(H-h)^{\frac{3}{2}} - (H-z)^{\frac{3}{2}}\right], \\ q_{0a}(z) &= \left(\frac{\varepsilon_a J_0}{2b_a(H-z)}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad h \leq z \leq H; \end{aligned} \quad (10)$$

для слабопроводящей жидкости

$$\begin{aligned} \phi_0(z) &= -U + \left(\frac{8J_0}{9b \varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} \left[C^{\frac{3}{2}} - (C-z)^{\frac{3}{2}}\right], \\ q_0(z) &= \left(\frac{\varepsilon J_0}{2b(C-z)}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad 0 \leq z \leq h. \end{aligned} \quad (11)$$

Параметр C имеет вид

$$C = h + \alpha \cdot (H - h), \quad \alpha = \frac{\varepsilon_a b}{\varepsilon b_a}. \quad (12)$$

Плотность тока может быть найдена из условия равенства потенциалов на границе раздела двух сред

$$U = \left(\frac{8J_0}{9b \varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} \left[C^{\frac{3}{2}} - (C-h)^{\frac{3}{2}}\right]. \quad (13)$$

Как показывают расчеты, с увеличением толщины воздушной прослойки величина тока J_0 уменьшается.

3. Для исследования устойчивости равновесного состояния (2), (8) слоя жидкости применим метод малых возмущений. В воздушной прослойке в связи с относительно высокой подвижностью заряда (для системы воздух–органическая жидкость $b/b_a \leq 10^{-4}$) возмущения заряда и поля можно считать быстро затухающими и при исследовании устойчивости системы не рассматривать. Пусть v, p, T, ϕ, q — малые возмущения скорости, давления, температуры, потенциала, плотности заряда в жидкости.

Обсудим граничные условия на свободной поверхности. Считается, что под воздействием возмущений

первоначально плоская свободная поверхность может деформироваться

$$z = h + \xi(x, t). \quad (14)$$

Полагая деформацию малой по сравнению с h , граничные условия с $z = h + \xi$ можно перенести на $z = h$, используя тейлоровское разложение.

Нормальная составляющая тензора напряжений будет выглядеть следующим образом:

$$z = h: \quad -p + \rho g \xi - \sigma \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \varepsilon \left(\frac{d\phi_0}{dz} \right) \frac{\partial \phi}{\partial z} + 2\nu\rho \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (15)$$

Отсутствие электрического слагаемого в касательной составляющей тензора напряжений позволяет записать это уравнение в виде

$$z = h: \quad \nu\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}. \quad (16)$$

К этим условиям следует добавить кинематическое соотношение

$$z = h: \quad v_z = \frac{\partial \xi}{\partial t}. \quad (17)$$

При формулировке граничных условий для возмущений температуры будем предполагать, что теплопроводность жидкости много больше теплопроводности верхней среды, и, хотя теплоотдача со свободной поверхности имеется, можно считать, что возмущения температуры в жидкости не меняют теплового потока через воздушную прослойку и свободная граница теплоизолирована для возмущений (число Био равно нулю). Такое условие является наиболее благоприятным для развития термокапиллярной неустойчивости [8]. Таким образом, граничное условие для возмущений температуры запишется в виде

$$z = h: \quad T' = 0. \quad (18)$$

Требование исчезновения возмущений потенциала и напряженности поля на границе с воздушной прослойкой на плоской границе $z = h$ в первом порядке запишется

$$\phi(h) + \xi \frac{d\phi_0}{dz} = 0, \quad \phi'(h) + \xi \frac{d^2\phi_0}{dz^2} = 0. \quad (19)$$

Граничные условия на твердой изотермической эквипотенциальной границе для скорости, возмущений температуры и потенциала имеют следующий вид:

$$z = 0: \quad v_z = 0, \quad v'_z = 0, \quad T = 0, \quad \phi = 0. \quad (20)$$

В качестве единиц измерения расстояния, времени, скорости, давления, температуры, потенциала, плотности заряда и плотности тока выберем соответственно h , h^2/ν , χ/h , $\rho\chi\nu/h^2$, Θ , U , $\varepsilon U/h^2$, $\varepsilon bU^2/h^3$. Будем

исследовать устойчивость равновесных распределений относительно малых "нормальных" возмущений

$$(v_z, T, \phi, q, \xi) = \left(v(z), \Theta(z), \varphi(z), q(z), \zeta \right) \times \exp[-\lambda t + ikx]. \quad (21)$$

Здесь λ — комплексный декремент возмущений, k — волновое число. Производя линеаризацию уравнений (1)–(4) по возмущениям, запишем уравнения и граничные условия в безразмерном виде

$$\lambda(v'' - k^2v) = v^{IV} - 2k^2 + k^4v - Rak^2 \left(\frac{dq_0}{dz} \phi - \frac{d\phi_0}{dz} q \right),$$

$$-\lambda Pr \Theta = \Theta'' - k^2 \Theta + v, \quad (22)$$

$$-\lambda P_j q + \frac{dq_0}{dz} v + 2q_0 q - \left(\frac{d\phi_0}{dz} q' + \frac{dq_0}{dz} \phi' \right) = 0,$$

$$\varphi'' - k^2 \varphi = -q,$$

$$z = 1: \quad v + Pr \lambda \zeta = 0, \quad \Theta' = 0,$$

$$\varphi + \zeta \frac{d\phi_0}{dz} = 0, \quad \varphi' + \zeta \frac{d^2\phi_0}{dz^2} = 0,$$

$$v'' + k^2v - k^2 Ma(\zeta - \Theta) = 0, \quad (23)$$

$$Cr \left[(3k - \lambda)v' - v''' + Rak^2 \left(q_0 \varphi + \frac{d\phi_0}{dz} \varphi' \right) \right]$$

$$= -k^2 \zeta (Bo + k^2),$$

$$z = 0: \quad v = 0, \quad v' = 0, \quad \Theta = 0, \quad \varphi = 0. \quad (24)$$

Задача содержит шесть перечисленных ниже безразмерных параметров: число Ra, являющееся электрическим аналогом числа Рэлея; число Марангони Ma; число Прандтля Pr; число Бонда Bo; капиллярный параметр Cr; число P_j , описывающее подвижность зарядов,

$$Ra = \frac{\varepsilon U}{b\rho\nu}, \quad Ma = \frac{\sigma_1 \Theta h}{\rho\nu\chi}, \quad Pr = \frac{\nu}{\chi},$$

$$Bo = \frac{g\rho h^2}{\sigma_0}, \quad Cr = \frac{\rho\nu\chi}{\sigma_0 h}, \quad P_j = \frac{\nu}{bU}. \quad (25)$$

Спектральная задача (22)–(24) определяет собственные числа λ как функцию волнового числа и параметров задачи. Численное решение дифференциальных уравнений проводилось пошаговым интегрированием методом Рунге–Кутты–Мерсона. Для обеспечения линейной независимости решений была применена процедура ортогонализации частных решений на каждом шаге.

4. Изучим вначале устойчивость состояния (22)–(24) относительно монотонных возмущений. В проведенных расчетах была найдена связь между тремя основными параметрами: числами Ma, Ra и волновым числом k на границе устойчивости при фиксированных остальных параметрах. Определяя минимальное значение Ra_m и k_m для заданного значения числа Ma, мы можем определить

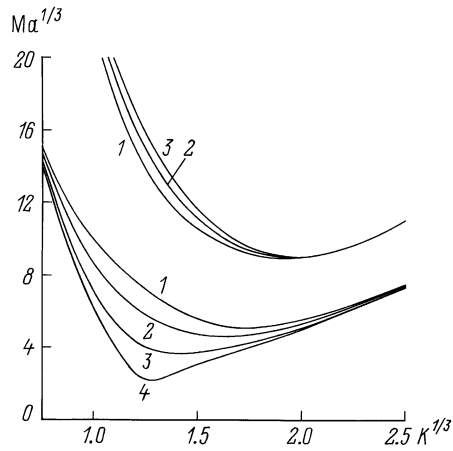


Рис. 1. Нейтральные кривые устойчивости для монотонной моды.

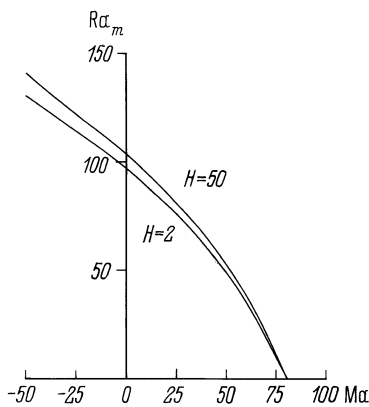


Рис. 2. Зависимость критического числа Рэлея Ra_m от числа Марангони Ma для монотонной моды неустойчивости. Область неустойчивости выше кривых.

влияние термокапиллярного эффекта на электрический механизм неустойчивости.

На рис. 1 приведены результаты расчета нескольких нейтральных кривых ($\lambda = 0$) при $H = 2$, $Cr = 10^{-5}$, $Bo = 10^{-1}$ двух нижних мод инжекционной неустойчивости и различных значениях числа Марангони. Кривые 1–4 соответствуют Ma , равным $-50, 0, 50, 75$. Верхние три кривые относятся к возмущениям с двухъярусной системой ячеек. Область неустойчивости расположена выше кривых. Предельный случай $Ma = 0$ соответствует случаю изотермической жидкости, подверженной инжекции со стороны свободной границы. При значении $Cr = 0$ (плоская граница) полученные результаты согласуются со значениями, приведенными в работе [2], $Ra_m^{(1)} = 99$, $k_m^{(1)} = 4.0$.

С увеличением положительных значений числа Марангони (нагрев со стороны твердой границы) критическое значение электрического аналога числа Рэлея $Ra_m^{(1)}$ первой моды понижается и становится равным нулю при значении $Ma = 80$, что соответствует обычной задаче о

возникновении конвекции Марангони. Пороговое значение волнового числа $k_m = 2$. При подогреве со стороны свободной границы (отрицательные числа Марангони) происходит повышение значения порогового значения для первой моды $Ra_m^{(1)}$. Для второго уровня неустойчивости с ростом положительных чисел Марангони происходит повышение минимального значения Ra_m , а при отрицательных Ma значение $Ra_m^{(2)}$ понижается.

На рис. 2 приведена карта устойчивости относительно основной моды для двух значений величины тока $J_0 \cong 1.261, 1.116$, соответствующих относительной толщине воздушной прослойке $H = 2$ и 50 .

Изменение формы конвективной ячейки по вертикали с изменением числа Марангони показано на рис. 3. Нечетными цифрами отмечены профили вертикальной компоненты скорости для первой моды неустойчивости, а четными — для второй моды. Как видно, с ростом абсолютного значения числа Ma различие в структуре движения для первой и второй моды исчезают.

5. Термокапиллярная колебательная неустойчивость в слое с деформируемой свободной границей, как было показано в работе [6], может существовать лишь при подогреве со стороны свободной поверхности. Результаты, представленные на рис. 1, показывают, что при росте по модулю отрицательных значений числа Марангони нейтральная кривая для первой моды неустойчивости поднимается, а для второй опускается. При некотором отрицательном значении числа Марангони ($|Ma| \cong 120$) они соприкасаются и слой становится неустойчивым по отношению к колебательным возмущениям. Характерные нейтральные кривые приведены на рис. 4, а. При $Cr = 10^{-5}$, $Bo = Pr = Pj = 10^{-1}$ кривые 1–4 соответствуют значениям числа Марангони, равным $0, -100, -150, -250$. Штриховой линией обозначена граница устойчивости относительно колебательных возмущений. Для указанных значений параметров колебательная неустойчивость при отсутствии электри-

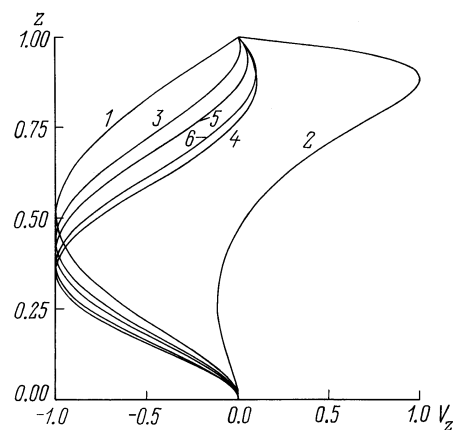


Рис. 3. Зависимость профиля вертикальной компоненты скорости для двух нижних мод монотонной неустойчивости от координаты z для чисел Марангони $Ma = 0$ (1, 2); -100 (3, 4); -150 (5, 6) при $k = 4$.

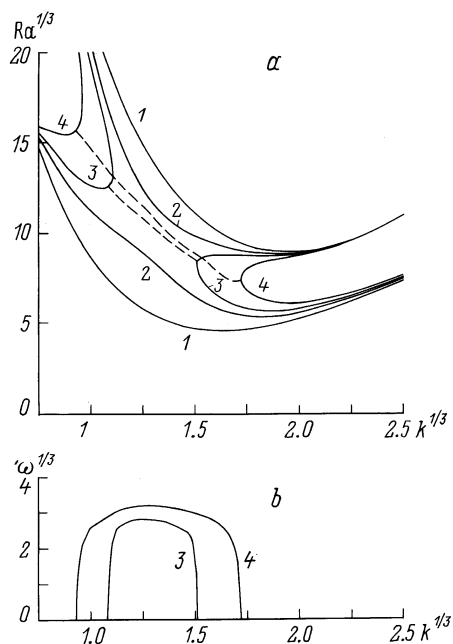


Рис. 4. Нейтральные кривые устойчивости для двух нижних уровней монотонной и колебательной моды (а) и дисперсное соотношение $\omega(k)$ (b).

ческого поля наступает при $Ma_m \cong -10^4$ и $k_m \cong 0.1$ [6]. Область колебательной неустойчивости возникает в некотором диапазоне волновых чисел при таких значениях Ma , для которых оказываются равными значения Ra , соответствующие двум разным модам неустойчивости. Следует отметить, что аналогичный переход от двух уровней монотонной неустойчивости к колебательной наблюдается в случае гравитационной конвективной неустойчивости двухслойной системы несмешивающихся жидкостей, подогреваемой снизу [9].

На рис. 4, b приведены частоты колебаний ω от волнового числа для нейтральных кривых 3, 4 на рис. 4, a. С увеличением подогрева со стороны свободной границы область колебательной неустойчивости увеличивается, причем это увеличение происходит преимущественно в сторону меньших длин волн. Частота колебательных возмущений возрастает с ростом числа Марангони.

6. Результаты проведенных расчетов показывают, что взаимодействие электроконвективного инжекционного и термокапиллярного механизмов неустойчивости при подогреве системы со стороны твердой границы приводит к ее дестабилизации относительно монотонно растущих возмущений. При отрицательных числах Марангони (подогрев со стороны свободной поверхности) происходит повышение устойчивости системы.

В дальнейшем при увеличении подогрева со стороны свободной границы критическое число Рэлея для основной монотонной моды неустойчивости и неустойчивости относительно возмущений с двухъярусной ячейкой сближаются. При некотором отрицательном значении числа Марангони вместо двух монотонных мод неустойчивости

появляется колебательная мода. Частота колебательных возмущений возрастает от нуля с ростом числа Марангони. При увеличении расстояния между электродами (увеличение расстояния воздушной прослойки) для фиксированной разности потенциалов наблюдается повышение пороговых значений числа Рэлея.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 97-01-00707.

Список литературы

- [1] *Atten P., Moreau R.* // J. Mec. 1972. Vol. 11. N 3. P. 471–520.
- [2] *Schneider J.M., Watson P.K.* // Phys. Fluids. 1970. Vol. 19. N 8. P. 1948–1961.
- [3] *Atten P., Koulova-Nenova D.* // 12th Intern. Conf. on Conduction and Breakdown in Dielectric Liquid (IEEE). Roma, 1996. P. 476–479.
- [4] *Ламперт М., Марк П.* Инжекционные токи в твердых телах. М.: Мир, 1973. 416 с.
- [5] *Pearson J.A.* // J. Fluid. Mech. 1958. Vol. 4. N 5. P. 489–500.
- [6] *Takashima M.* // J. Phys. Soc. Jap. 1981. Vol. 50. N 8. P. 2745–2756.
- [7] *Рябицкий Е.А.* Изв. АН РАН. МЖГ. 1992. № 3. С. 19–23.
- [8] *Бирух Р.В., Рудаков Р.Н.* // Изв. РАН. МЖГ. 1996. № 5. С. 30–36.
- [9] *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М.* // ДАН СССР. 1982. Т. 265. № 2. С. 302–305.