

# Двухуровневые волновые функции электронов в двухбарьерных квантово-размерных структурах в электрическом поле конечной амплитуды

© Е.И. Голант, А.Б. Пашковский

Государственное научно-производственное предприятие "Исток",  
141120 Фрязино, Россия

(Получена 8 сентября 1999 г. Принята к печати 27 сентября 1999 г.)

Проведен анализ применимости различных вариантов двухуровневого приближения к расчету электронных переходов в двухбарьерной структуре с токовой накачкой в резонансном электрическом поле конечной амплитуды. Показано, что решение, получающееся на основе простой итерации метода возмущений первого порядка по амплитуде поля, может быть существенно продлено за область сходимости метода итераций. С другой стороны, показано, что само двухуровневое приближение становится неприменимым при значительно меньших амплитудах поля, чем обычно предполагается. Это ограничение обусловлено влиянием боковых сателлитов — нерезонансных компонент волновой функции. Предложена модель двухбарьерных структур с электронной накачкой, справедливая во всей области двухуровневого приближения и позволяющая учитывать произвольные формы барьеров и возмущения.

## 1. Введение

Большой интерес, проявляемый в последнее время к созданию инфракрасных лазеров на основе когерентного транспорта электронов в квантово-размерных полупроводниковых гетероструктурах [1–4], делает весьма актуальной разработку методов расчета взаимодействия когерентно-туннелирующих электронов с высокочастотным полем. Даже максимально упростив задачу и сведя ее к одночастичному уравнению Шредингера (с гармонически зависящим от времени потенциалом) для электрона в квантовой яме со стенками в виде бесконечно тонких потенциальных барьеров, получить решение удастся только в двухуровневом приближении, считая квантовые переходы существенными только между двумя рабочими уровнями квантовой ямы [2,4]. В этом приближении алгоритм теории возмущений [2,5,6] сводится к простой итерационной процедуре, когда каждое последующее приближение находится из предыдущего путем умножения на (отрицательный) параметр  $-z$ , где

$$z = (0.5q\mathcal{E}\langle 1|x|2\rangle/\Gamma)^2,$$

$\mathcal{E}$  — амплитуда переменной составляющей электрического поля,  $q$  — заряд электрона,  $\langle 1|x|2\rangle$  — матричный элемент возмущения относительно рабочих уровней  $|1\rangle$  и  $|2\rangle$ ;  $\Gamma = (\Gamma_1\Gamma_2)^{1/2}$ ,  $\Gamma_1, \Gamma_2$  — ширины соответствующих уровней (выражения для  $\Gamma_1, \Gamma_2$  через параметры структуры с  $\delta$ -барьерами см. в работе [7]). Как известно, условием сходимости такого итерационного процесса является неравенство  $|z| < 1$ , при выполнении которого волновые функции на каждом уровне структуры имеют вид волновых функций приближения первого порядка, умноженных на величину  $1/(1+z)$  (сумму геометрической прогрессии со знаменателем  $-z$ ), определяющую зависимость волновых функций электрона в состояниях  $|1\rangle$  и  $|2\rangle$  от амплитуды поля.

Возникает вопрос — имеем ли это ограничение фундаментальную физическую основу или же просто является следствием того, что решение ищется в виде степенного ряда, а для многих функций, в частности для  $f = 1/(1+z)$ , радиус сходимости такого ряда ограничен. Очевидно, что если в первом случае использование полученных решений за радиусом сходимости ряда недопустимо, то в последнем они, наоборот, могут быть продолжены далеко за радиус сходимости. Другими словами, представляется интересным выяснить, не является ли неравенство  $|z| < 1$  одновременно и условием применимости двухуровневого приближения, а если нет (как это будет показано далее), то каково это условие и какие физические процессы в первую очередь необходимо учитывать за пределами этого приближения.

Рассматриваемый класс структур выделяется следующими ограничениями на ширины (квази)уровней  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ : с одной стороны, ширина каждого уровня должна быть значительно меньше расстояния (по энергии) между ними, равного энергии кванта поля, а с другой — среднее время жизни электрона в квантовой яме  $\tau = \hbar/\Gamma$  должно быть меньшим минимального времени между столкновениями, нарушающими когерентность прохождения электронами структуры. Первое условие обеспечивает резонансный характер взаимодействия электронов с полем, второе — когерентный транспорт. Элементарные оценки показывают, что в современных полупроводниковых гетероструктурах с резонансным туннелированием при расстоянии между уровнями, соответствующем терагерцовому диапазону частот, и при толщине барьеров в несколько атомных слоев оба этих условия вполне могут выполняться одновременно.

Ясно, однако, что при повышении амплитуды возмущающего поля все большую роль начинают играть нерезонансные компоненты волновой функции электрона, в первую очередь компоненты, ближайšie к резонансным, так называемые боковые сателлиты, отвечающие

частотам  $\omega_{1,2} \pm \omega$ , где  $\hbar\omega_{1,2}$  — энергии резонансных уровней, а  $\omega$  — частота возмущающего поля. В связи с этим одной из целей настоящей статьи является оценка нерезонансных компонент волновой функции электрона при вынужденных переходах электронов в двухбарьерных структурах с электронной накачкой и получение ограничения на область применимости двухуровневого приближения, широко используемого в настоящее время за рамками этого ограничения (см., например, [4]).

Критерий, определяющий амплитуду поля, ниже которой можно пренебречь влиянием боковых сателлитов, позволяет развить для этих допустимых амплитуд двухуровневую модель, результаты которой строго совпадают (при  $|z| < 1$ ) с непосредственным суммированием ряда теории возмущений. Однако этот критерий имеет значительно более широкую область применимости: большие амплитуды, произвольные формы барьеров и форма возмущения. Развитие такой модели является второй главной целью статьи.

Чтобы избежать громоздких формул и обозначений, далее в параграфах 2 и 3 рассматривается симметричная двухбарьерная структура с однородным профилем дна зоны проводимости. Однако процедура расчета и основной результат — критерий применимости двухуровневого приближения при конечной амплитуде возмущающего поля — легко обобщаются (по аналогии с переходом от результатов работы [5] к [6]) на случай несимметричной структуры с разной мощностью барьеров и кусочно-однородной высотой дна зоны проводимости, принимающей различные значения соответственно слева, справа и внутри структуры [6].

## 2. Метод возмущений, основанный на простой итерации

В этом параграфе вводятся необходимые обозначения и приводятся некоторые результаты работы [5], необходимые для понимания последующего изложения.

Пусть моноэнергетический пучок электронов с энергией  $\varepsilon$  падает на симметричную двухбарьерную структуру шириной  $a$  с тонкими ( $\delta$ -образными) барьерами толщиной  $b$  и высотой  $\varphi_b$ , к которой приложено однородное электрическое поле, изменяющееся со временем по закону

$$\mathcal{E} \cos \omega t = E(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}), \quad \mathcal{E} = 2E.$$

Для определенности считаем, что электроны движутся слева направо. Тогда с учетом сделанных выше допущений нестационарное уравнение Шредингера имеет вид

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \alpha \delta(x) \psi + \alpha \delta(x-a) \psi + H(x, t) \psi, \\ H(x, t) = -qE \left\{ x[\theta(x) - \theta(x-a)] + a\theta(x-a) \right\} \\ \times (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}). \quad (1)$$

Здесь  $q, m^*$  — заряд и масса электрона,  $\alpha = \varphi_b b$ ,  $\theta(x)$  — единичная функция.

Известно, что в двухбарьерных структурах коэффициент прохождения имеет четко выраженный резонансный характер, а в симметричных структурах с тонкими барьерами величина волнового вектора  $k = (2m^* \varepsilon / \hbar^2)^{1/2}$ , определяющего резонансные уровни, на которых коэффициент прохождения равен 1, находится из решения трансцендентного уравнения [7,8]

$$\operatorname{tg} ka = -\frac{k\hbar^2}{\alpha m^*} = -\frac{2k}{y}. \quad (2)$$

Здесь для удобства введено обозначение  $y = 2m^* \alpha / \hbar^2$ . Пусть электроны проходят через  $N$ -резонансный уровень структуры, а частота высокочастотного (ВЧ) поля соответствует переходам на уровень с номером  $L$ . Далее, для простоты будем считать  $N > L$ , при  $L > N$  вычисления аналогичны. В работе [5] при достаточно малых амплитудах ВЧ поля и достаточно мощных барьерах ( $y \gg k$ , что эквивалентно рассмотренному выше требованию малости ширины рабочих уровней по сравнению с расстоянием между ними) было показано, что волновая функция электронов внутри структуры ( $0 < x < a$ ,  $\omega_0 = \varepsilon / \hbar$ ) имеет вид

$$\psi \approx \psi_N(x)e^{-i\omega_0 t} + \psi_L(x)e^{-i(\omega_0 - \omega)t}, \quad (3)$$

где

$$\psi_N(x) = \frac{1}{1+z} \begin{cases} (1+z) \exp(ikx) - z \exp(-ikx), & x < 0, \\ A_0 \sin kx + B_0 \cos kx, & 0 < x < a, \\ C_0 \exp[ik(x-a)], & x > a, \end{cases} \\ \psi_L(x) = \frac{1}{1+z} \begin{cases} D_- \exp(-ik_-x), & x < 0, \\ A_- \sin(k_-x) + B_- \cos(k_-x), & 0 < x < a, \\ C_- \exp[ik_-(x-a)], & x > a. \end{cases} \quad (4)$$

$$A_0 = \frac{y}{k} + i, \quad B_0 = 1, \quad C_0 = (-1)^{N+1}, \quad D_0 = 0,$$

$$k_- = [2m^*(\varepsilon - \hbar\omega) / \hbar^2]^{1/2},$$

$$B_- \approx D_- \approx (-1)^{L+1} C_- \approx \frac{qEy^2}{im^*\omega^2 k_-}, \quad A_- \approx \frac{qEy^3}{im^*\omega^2 k_-^2}.$$

Так как решение было получено в виде постоянного множителя и знакопеременного ряда (геометрической прогрессии)

$$1 - z + z^2 - z^3 + \dots + (-1)^{n+1} z^n, \quad (5)$$

где

$$z = \left( \frac{qE}{m^*\omega^2} \right)^2 \frac{y^4}{kk_-},$$

который в области своей сходимости  $|z| < 1$  представляет разложение функции  $1/(1+z)$  по степеням  $z$ ,

то и область его применения ограничивается областью сходимости ряда (5). В соответствии с этим решение применимо при очень малых амплитудах ВЧ поля [5]. Для того чтобы понять природу ограничения области сходимости весьма малыми амплитудами, следует проанализировать метод возмущений, примененный в работе [5]. За начальное (нулевое) приближение берется волновая функция электрона на основном рабочем уровне (по которому идет ток накачки), при полностью пустом втором уровне. Переход к следующему приближению оказывается эквивалентным при удержании слагаемых только с максимальной степенью  $y$  и умножении предыдущего результата на  $-z$ , что приводит к методу простой итерации [9] — методу первого порядка, условием сходимости которого и является неравенство  $|z| < 1$ .

### 3. Теория возмущений на основе разложения в ряд аналитического решения

Естественно попытаться построить теорию возмущений на основе безытерационного метода — прямого разложения в ряд аналитического решения уравнения Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - 2Ex\psi \cos \omega t \quad (6)$$

для электрона в свободном пространстве с гармонически меняющимся во времени электрическом поле постоянной амплитуды  $2E$ . Точное установившееся решение уравнения (6), переходящее при  $E \rightarrow 0$  в плоскую монохроматическую волну, имеет вид [10]

$$\begin{aligned} \psi(x, t) = \exp \left[ ikx - i\omega_0 t \right. \\ \left. + \frac{2iqEx}{\hbar\omega} \sin \omega t + \frac{2iqEk}{m^*\omega^2} \cos \omega t \right. \\ \left. - \frac{i(qE)^2}{m^*\hbar\omega^3} \left( \omega t - \frac{\sin 2\omega t}{2} \right) \right], \quad (7) \end{aligned}$$

т. е. вид уравнения Шредингера в квазиклассическом случае; подобное решение найдено в [11], а для уравнения Дирака приведено, в частности, в [12].

В рамках двухуровневого приближения искомая волновая функция представляется в виде линейной комбинации четырех волновых функций (7), соответствующих волнам, бегущим по уровням  $N$  и  $L$  в противоположных направлениях. Линеаризуя эту комбинацию по амплитуде поля  $E$  и оставляя члены только с  $\exp(-i\omega_0 t)$  и  $\exp[-i(\omega_0 - \omega)t]$  (двухуровневое прибли-

жение), для соответствующих волновых функций можно записать:

внутри структуры ( $0 < x < a$ )

$$\begin{aligned} \psi_N(x, t) = & \left[ A \sin kx + B \cos kx \right. \\ & - \frac{qEx}{\hbar\omega} (A_- \sin k_-x + B_- \cos k_-x) \\ & \left. + \frac{qEk_-}{m^*\omega^2} (A_- \cos k_-x - B_- \sin k_-x) \right] e^{-i\omega_0 t}, \\ \psi_L(x, t) = & \left[ A_- \sin k_-x + B_- \cos k_-x \right. \\ & + \frac{qEx}{\hbar\omega} (A \sin kx + B \cos kx) \\ & \left. + \frac{qEk}{m^*\omega^2} (A \cos kx - B \sin kx) \right] e^{-i(\omega_0 - \omega)t}; \quad (8) \end{aligned}$$

при  $x < 0$

$$\begin{aligned} \psi(x, t) = & \left[ \exp ikx + D \exp(-ikx) \right] e^{-i\omega_0 t} \\ & + D_- \exp(-ik_-x) e^{-i(\omega_0 - \omega)t}; \quad (9) \end{aligned}$$

при  $x > a$  (см. [9])

$$\begin{aligned} \psi(x, t) = & \left\{ C \exp [ik(x-a)] - \frac{qEa}{\hbar\omega} C_- \exp [ik_-(x-a)] \right\} e^{-i\omega_0 t} \\ & + \left\{ C_- \exp [ik_-(x-a)] + \frac{qEa}{\hbar\omega} C \exp [ik(x-a)] \right\} e^{-i(\omega_0 - \omega)t}. \quad (10) \end{aligned}$$

Подобрав неизвестные пока коэффициенты волновой функции (8)–(10) так, чтобы удовлетворить граничным условиям на барьерах, получим линейный член разложения точного решения по параметру

$$\frac{qEa}{\hbar\omega} \ll 1. \quad (11)$$

Следует отметить, что это условие выполняется при амплитудах поля, гораздо больших, чем условие  $|z| < 1$ .

Сшивая волновую функцию на барьерах, в каждый момент времени для коэффициентов  $A, B, C, D, A_-, B_-, C_-, D_-$  можно получить систему уравнений

$$\begin{pmatrix} M(k) & S \\ W & M(k_-) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} M(k) = & \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ ik - y & k & 0 & 0 \\ 0 & \sin ka & \cos ka & -1 \\ 0 & -k \cos ka & k \sin ka & ik - y \end{vmatrix}, \\ f = & \begin{vmatrix} -1 \\ ik + y \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad (13) \end{aligned}$$

$$W = \begin{pmatrix} 0 & w_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_{23} & 0 \\ 0 & w_{32} & w_{33} & w_{34} \\ 0 & w_{42} & w_{43} & w_{44} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P \\ P_- \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} D \\ A \\ B \\ C \end{pmatrix}, \quad y = \frac{2m^*\alpha}{\hbar^2},$$

$$w_{12}(k) = -\frac{qEk}{m^*\omega^2}, \quad w_{23} = -\frac{qE}{\hbar\omega} \left( \frac{2\omega_0 - \omega}{\omega} \right), \quad w_{34} = -\frac{qEa}{\hbar\omega},$$

$$w_{32}(k) = \frac{qEa}{\hbar\omega} \sin ka + \frac{qEk}{m^*\omega^2} \cos ka,$$

$$w_{44}(k) = -\frac{qEa}{\hbar\omega} (ik - y),$$

$$w_{33}(k) = \frac{qEa}{\hbar\omega} \cos ka - \frac{qEk}{m^*\omega^2} \sin ka,$$

$$w_{42}(k) = \frac{qE}{\hbar\omega} \left( \frac{2\omega_0 - \omega}{\omega} \right) \sin ka - \frac{qEak}{\hbar\omega} \cos ka,$$

$$w_{43}(k) = \frac{qE}{\hbar\omega} \left( \frac{2\omega_0 - \omega}{\omega} \right) \cos ka + \frac{qEak}{\hbar\omega} \sin ka. \quad (14)$$

Матрица  $S$  имеет тот же вид, что и матрица  $W$ , с той лишь разницей, что:

$$s_{12} = w_{12}(k_-), \quad s_{23} = w_{23}, \quad s_{34} = -w_{34}, \quad s_{44} = -w_{44}(k_-),$$

$$s_{32} = -\frac{qEa}{\hbar\omega} \sin k_-a + \frac{qEk_-}{m^*\omega^2} \cos k_-a,$$

$$s_{33} = \frac{qEa}{\hbar\omega} \cos k_-a + \frac{qEk_-}{m^*\omega^2} \sin k_-a,$$

$$s_{42} = \frac{qE}{\hbar\omega} \left( \frac{2\omega_0 - \omega}{\omega} \right) \sin k_-a + \frac{qEak_-}{\hbar\omega} \cos k_-a,$$

$$s_{43} = \frac{qE}{\hbar\omega} \left( \frac{2\omega_0 - \omega}{\omega} \right) \cos k_-a - \frac{qEak_-}{\hbar\omega} \sin k_-a. \quad (15)$$

Анализируя определитель  $\Delta$  системы (12), можно показать, что с учетом условия (11) он будет равен

$$\Delta = \Delta[M(k)]\Delta[M(k_-)](1 + z + \gamma); \quad (16)$$

при этом, так как  $y/k \gg 1$ , выполняется неравенство  $z \gg \gamma$  и, таким образом,

$$\Delta = \Delta[M(k)]\Delta[M(k_-)](1 + z). \quad (17)$$

Заметим также, что при разложении (7) отбрасывались члены, содержащие вторую степень малого параметра (11). При этом была сделана замена

$$k \approx k - \delta k = k - k \frac{(qE)^2}{m^*\hbar\omega^2\omega_0}, \quad (18)$$

которая на первый взгляд может показаться некорректной, так как для резонансного определителя выполняется

приближенное равенство [2]

$$\begin{aligned} \Delta[M(k + \delta k)] &\approx \Delta[M(k)] \left( 1 + \frac{iy^2\delta ka}{k^2} \right) \\ &\approx \Delta[M(k)] \left[ 1 + \left( \frac{qE}{m^*\omega^2} \right)^2 \frac{\pi y^2 \omega^2}{4\omega_0^2} \right], \end{aligned} \quad (19)$$

т.е. малая поправка умножается на большой параметр  $(y/k)^2$ . Однако сравнение (19) и (5) показывает, что эта поправка всегда намного меньше  $z$ , а следовательно, и замена (18) вполне допустима.

Далее, можно убедиться, что определители для расчета неизвестных коэффициентов волновой функции (8)–(10) методом Крамера ( $a_i = \Delta_{a_i}(E)/\Delta$ ) представляются в виде

$$\Delta_{a_i}(E) = \Delta_{a_i}(E \rightarrow 0) \left[ 1 + \rho_i \left( \frac{qE}{m^*\omega^2} \right)^2 y^2 \right], \quad (20)$$

где  $\rho$  — численный множитель порядка единицы. Так, например,

$$\Delta_C = \Delta[C(k)]\Delta[M(k_-)] \left[ 1 + \rho_C \left( \frac{qE}{m^*\omega^2} \right)^2 y^2 \right], \quad (21)$$

где матрица  $C(k)$  получается из матрицы  $M(k)$  заменой четвертого столбца на столбец  $f$ . Из (17), (20) автоматически следует, что по крайней мере при выполнении условия

$$\left( \frac{qE}{m^*\omega^2} \right)^2 y^2 \ll 1, \quad (22)$$

волновая функция (8)–(10), соответствующая первому приближению теории возмущений, основанной на аналитическом решении (7), полностью совпадает с волновой функцией (3)–(4), полученной суммированием бесконечного ряда теории возмущений, основанной на итерационном методе [5].

Так как условие применимости итерационного метода [5]

$$z = \left( \frac{qE}{m^*\omega^2} \right)^2 \frac{y^4}{kk_-} \leq 1 \quad (23)$$

в  $y^2/kk_-$  раз более жесткое, чем (22), то решение (3)–(4) может быть продлено далеко за область сходимости ряда (5).

#### 4. Распадающаяся квантовая система с электронной накачкой

Более того, при достаточно мощных барьерах двухбарьерную структуру можно рассматривать как типичную распадающуюся квантовую систему [13], время распада которой  $\tau$  определяется туннелированием через барьеры:

$$\tau^{-1} = \frac{\Gamma}{\hbar} = \frac{\hbar k}{2am^*} (|T_1|^2 + |T_2|^2), \quad (24)$$

где  $|T|$  представляет собой электронную прозрачность (коэффициент прохождения) первого и второго барьеров. В случае  $\delta$ -барьера  $|T| \approx k/y$ . В двухуровневом

приближении волновую функцию такой системы можно представить в виде

$$\psi(x, t) = b_N(t)\psi_N(x)e^{-i\omega_N t} + b_L(t)\psi_L(x)e^{-i\omega_L t}, \quad (25)$$

где  $\psi_N(x)$ ,  $\psi_L(x)$  — нормированные на единицу собственные функции, соответствующие энергетическим уровням структуры с полностью непрозрачными барьерами  $|T_1| \approx |T_2| \approx 0$ . По аналогии с замкнутой квантовой системой динамику распадающейся двухуровневой системы с накачкой можно описать уравнениями

$$\begin{aligned} \hbar \frac{db_N}{dt} + \Gamma_N(b_N - b_0) &= -ib_L q E \langle N|x|L \rangle e^{-i(\omega_N - \omega_L + \omega)t}, \\ \hbar \frac{db_L}{dt} + \Gamma_L b_L &= -ib_N q E \langle L|x|N \rangle e^{-i(\omega_L - \omega_N - \omega)t}, \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$\langle N|x|L \rangle = \langle L|x|N \rangle = \frac{a}{\pi^2} \frac{NL}{(N^2 - L^2)^2} \quad (27)$$

— матричный элемент  $x$  в квантовой яме,  $b_0$  — параметр, характеризующий накачку.

С другой стороны, если электроны накачки поступают в структуру с энергией  $\omega_0$ , достаточно близкой к  $\omega_N$ , а монохроматическое возмущающее поле имеет частоту  $\omega \approx \omega_N - \omega_L$ , то в установившемся режиме при  $t \rightarrow \infty$  волновая функция должна иметь вид

$$\psi(x, t) = c_N \psi_N(x) e^{-i\omega_0 t} + c_L \psi_L(x) e^{-i(\omega_0 - \omega)t} \quad (28)$$

при

$$\frac{dc_N}{dt} = \frac{dc_L}{dt} = 0.$$

Сравнивая (25) и (28), находим

$$b_N = c_N e^{-i(\omega_0 - \omega_N)t}, \quad b_L = c_L e^{-i(\omega_0 - \omega - \omega_L)t} \quad (29)$$

и представляем параметр накачки в виде

$$b_0 = c_0 e^{-i(\omega_0 - \omega_N)t}, \quad (30)$$

где

$$\frac{dc_0}{dt} = 0.$$

Следует отметить, что при точном резонансе имеем  $b_N = c_N$ ,  $b_L = c_L$ ,  $b_0 = c_0$ . Подставляя выражения для  $b_N$ ,  $b_L$  и  $b_0$  в (26), находим связь между постоянными коэффициентами  $c_N$ ,  $c_L$  и  $c_0$ :

$$\begin{aligned} -i\hbar(\omega_0 - \omega_N)c_N + \Gamma_N(c_N - c_0) &= -ic_L q E a \langle N|x|L \rangle, \\ -i\hbar(\omega_0 - \omega - \omega_L)c_L + \Gamma_L c_L &= -ic_N q E a \langle L|x|N \rangle. \end{aligned} \quad (31)$$

После несложных вычислений получаем искомую связь амплитуд волновой функции (28) с параметром  $c_0$ , характеризующим накачку:

$$c_N = c_0(\Delta\omega)$$

$$\times \left\{ 1 + \frac{(qE \langle N|x|L \rangle)^2}{[\Gamma_N - i\hbar(\omega_0 - \omega_N)][\Gamma_L - i\hbar(\omega_0 - \omega - \omega_L)]} \right\}^{-1},$$

$$c_L = c_N \frac{qE \langle N|x|L \rangle}{[\Gamma_L - i\hbar(\omega_0 - \omega - \omega_L)]},$$

$$c_0(\Delta\omega) = c_0 \frac{\Gamma_N}{[\Gamma_N - i\hbar(\omega_0 - \omega_N)]}. \quad (32)$$

Для строго резонансного случая, при  $\omega_0 = \omega_N$ ,  $\omega = \omega_N - \omega_L$ , можно показать, что волновая функция (28) с коэффициентами (32) совпадает с волновой функцией, полученной ранее методом возмущений (4), в частности,  $c_N/c_0 = 1/(1+z)$ , где  $z = (qE \langle N|x|L \rangle / \Gamma)^2$ ,  $\Gamma = (\Gamma_N \Gamma_L)^{1/2}$ . Следует отметить, что приведенный подход к задаче, как к задаче о резонансном взаимодействии переменного поля с распадающейся квантовой системой с электронной накачкой, справедлив при любой форме барьеров, ограничивающих квантовую яму, и, кроме того, путем замены матричного элемента  $\langle N|x|L \rangle$  на  $\langle N|f(x)|L \rangle$  позволяет рассчитывать структуры с произвольной формой переменного поля  $f(x)$ . Ясно, что такой подход в отличие от рассмотренных ранее методов возмущений не содержит внутренних ограничений на величину амплитуды приложенного поля.

## 5. Применимость двухуровневого приближения

При этом, однако, возникает вопрос — при каких амплитудах высокочастотного поля вообще справедливо приближение двухуровневой системы. Чтобы ответить на этот вопрос, оценим амплитуду поля, при которой станут существенными переходы в область нерезонансных энергий. Для этого предположим, что одним из рассмотренных выше методов получена волновая функция  $\psi$  резонансной двухуровневой системы, и оценим поправку второго порядка  $\psi_2$ , возникающую при учете квазиэнергетического состояния, отстоящего на  $\hbar\omega$  от резонансного уровня. Предварительно необходимо отметить, что возможность учета лишь близлежащих нерезонансных квазиэнергетических уровней обусловлена применением только двух первых порядков теории возмущений по параметру (11). Используя результаты работы [5], легко показать, что максимальная степень большого параметра  $y/k$  в поправке к волновой функции, оставаясь неизменной при переходах на нерезонансный квазиэнергетический уровень, увеличивается в 2 раза при переходах на резонансный уровень. Таким образом, поправка второго порядка к волновой функции двухуровневой системы, возникающая вследствие переходов электронов в нерезонансную область и обратно, пропорциональна  $(y/k)^2$ :

$$\psi_2 \propto \psi \left( \frac{qE}{m^* \omega^2} \right)^2 y^2. \quad (34)$$

Отметим, что для переходов между резонансными уровнями  $\psi_2 \propto (y/k)^4 \psi$ . Таким образом, влияние нерезонансных переходов на волновую функцию основного состояния незначительно при выполнении условий

$$\left( \frac{qE}{m^* \omega^2} \right)^2 y^2 \ll 1 \quad \text{или} \quad z \ll y^2 / k k_- \approx |T|^{-2}, \quad (35)$$

что и может служить критерием применимости двухуровневого приближения в рассматриваемой задаче. За-

метим, что полученный критерий, совпадающий с условием применимости описанного выше метода разложения в ряд (22), с одной стороны, существенно более мягкий (в  $|T|^{-2}$  раз) по сравнению с условием сходимости ряда теории возмущений  $|z| < 1$ , а с другой стороны, приблизительно в  $|T|^{-1}$  раз более жесткий по сравнению с критерием (11), используемым на основе иных соображений в работе [4].

Другими словами, амплитуда энергии переменного электрического поля  $2qEa$ , допускающая сходимость итерационного метода, ограничивается неравенством  $2qEa \leq \Gamma a / \langle N|x|L \rangle$ , в то время как применимость двухуровневого приближения  $2qEa \ll |T| |T_-|^{-1/2} \Gamma a / \langle N|x|L \rangle$ , где  $\langle N|x|L \rangle$  определяется (27). Легко видеть, что при  $|T| \rightarrow 0$ ,  $\Gamma \rightarrow 0$  и максимально допустимая энергия поля в обоих случаях стремится к нулю, так что чем меньше ширина уровня, тем при меньших энергиях поля работает двухуровневое приближение. Однако, как было показано в [2,5,6], как раз при амплитудах порядка  $\Gamma a / \langle N|x|L \rangle$  происходит наиболее существенное перераспределение электронов между уровнями под действием переменного поля, поэтому весьма важно было показать, что двухуровневое приближение в этих условиях хорошо работает.

## 6. Заключение

Проведен анализ применимости различных вариантов двухуровневого приближения к расчету электронных переходов в двухбарьерной структуре с токовой накачкой в резонансном электрическом поле конечной амплитуды. Показано, что решение, получающееся на основе простой итерации метода возмущений первого порядка по амплитуде поля типа  $1/(1+z)$ , может быть существенно продлено за границу области сходимости метода итераций  $|z| = 1$ . С другой стороны, показано, что само двухуровневое приближение становится неприменимым при значительно меньших амплитудах поля, чем обычно предполагается, причем это ограничение обусловлено влиянием нерезонансных компонент волновой функции. При этом решение на основе ряда теории возмущений оказывается справедливым при всех амплитудах поля, когда вообще справедливо двухуровневое приближение. Предложена модель двухбарьерных структур с электронной накачкой, справедливая во всей области двухуровневого приближения и позволяющая учитывать произвольные формы барьеров и возмущения.

Данная работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 97-02-16652) и Научного совета по программе "Физика твердотельных наноструктур" (проект № 97-1094).

## Список литературы

- [1] Е.И. Голант, А.Б. Пашковский, А.С. Тагер. Письма в ЖТФ, **20**(21), 74 (1994).
- [2] Е.И. Голант, А.Б. Пашковский. ЖЭТФ, **112** (7), 237 (1997).
- [3] M. Kira. Phys. Rev. B, **53** (15), 789 (1996).
- [4] В.Ф. Елесин. ЖЭТФ, **112** (8), 483 (1997).
- [5] Е.И. Голант, А.Б. Пашковский. ФТП, **31** (8), 950 (1997).
- [6] Е.И. Голант, А.Б. Пашковский. Письма ЖЭТФ, **63** (7), 559 (1996).
- [7] И.В. Беляева, Е.И. Голант, А.Б. Пашковский. ФТП, **31** (2), 137 (1997).
- [8] В.М. Галицкий, Б.М. Карнаков, В.И. Коган. *Задачи по квантовой механике* (М., Наука, 1981).
- [9] Н.Н. Калиткин. *Численные методы* (М., Наука, 1978).
- [10] А.Б. Пашковский. ЖЭТФ, **109** (5), 1779 (1996).
- [11] В.В. Вьюрков, В.И. Рьжгий. ЖЭТФ, **78** (3), 1159 (1980).
- [12] В.Б. Берестецкий, Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский. *Квантовая электродинамика* (М., Наука, 1980) с. 175.
- [13] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Квантовая механика* (М., Наука, 1989).

Редактор Т.А. Полянская

## Two level electron wave functions in the double-barrier quantum-size structures in a finite amplitude electric field

E.I. Golant, A.B. Pashkovskii

State scientific and production enterprise "Istok",  
141120 Fryazino, Russia

**Abstract** An analysis of the applicability of a variety two-level approximations to electronic transitions in a double-barrier structure at resonance in the electric field of a finite amplitude is presented. It is shown that the solution obtained by a simple iteration method based on the first-order perturbation theory, can be essentially extended far beyond the field amplitude domain. On the other hand, the two-level approximation is shown to be invalid by itself at the field amplitudes far less than those assumed.