

Движущиеся околощелевые солитоны в нелинейной оптической среде

© А.С. Ковалев, О.В. Усатенко*, А.В. Горбач*

Физико-технический институт низких температур,
310164 Харьков, Украина

* Харьковский национальный университет,
310077 Харьков, Украина

E-mail: Oleg.V.Usatenko@univer.kharkov.ua

(Поступила в Редакцию 4 ноября 1999 г.)

Найдены новые двухпараметрические солитонные решения уравнений электродинамики, описывающие распространение волн в одномерной нелинейной оптической среде с периодически изменяющимся коэффициентом преломления. Эти решения представляют собой две взаимодействующие волны, распространяющиеся во взаимно противоположных направлениях. Частота нелинейных колебаний каждой из волн может лежать как в запрещенной щели линейного спектра, так и вне ее, а групповая скорость может изменяться от нуля до максимального значения, определяемого характеристиками среды. Найдены также алгебраические солитонные решения как предел нелинейных решений при стремлении частот нелинейных волн к частотам одной из ветвей линейного спектра.

Существование щелевых (брэгговских) солитонов было теоретически предсказано в работах Милса, Тралинджера и Чена [1,2] при изучении решений нелинейных уравнений Максвелла, описывающих распространение нелинейных волн в оптической среде с периодически меняющимся в пространстве показателем преломления. При этом были найдены лишь неподвижные щелевые солитоны с частотами в щели спектра линейных волн. Подобные нелинейные возбуждения могут возникать и в других модулированных системах, в частности в кристаллах со сложной элементарной ячейкой [3–6] и во многоподрешеточных магнетиках [7]. В работах [8–10] было указано на возможность существования неподвижных солитонов с более сложной структурой и с частотами вблизи щели спектра линейных волн ("околощелевых" солитонов). Нахождение явных решений для движущихся солитонов в модулированных средах является более сложной проблемой. Впервые такие решения для щелевых оптических солитонов обсуждались в работах [11,12] и позже для движущихся упругих щелевых солитонов — в работе [13].

В данной работе анализируются движущиеся околощелевые солитонные решения, описывающие распространение волн в нелинейной оптической среде с модулированным показателем преломления. Данные решения относятся к семейству двухпараметрических солитонов и представляют собой локализованные возбуждения на фоне неубывающей на бесконечности нелинейной волны. Солитоны огибающей движутся с групповой скоростью линейных волн. Рассмотрен также предельный переход к неподвижным и так называемым "алгебраическим" солитонам, т.е. солитонам с параметрами, лежащими на одной из ветвей спектра линейных волн, разграничивающей в линейном пределе щелевые и околощелевые решения.

1. Основные уравнения

Рассмотрим одномерную оптическую среду с периодически меняющимся с координатой x коэффициентом преломления $n(x) = n_0 + n_1 \cos(2\beta_0 x)$. Модуляция коэффициента преломления приводит к возникновению в законе дисперсии линейных волн $\omega = ck/n_0$ последовательности щелей с волновыми числами $k_m = m\beta_0$ ($m = 1, 2, \dots$). При этом величина первой щели оказывается пропорциональной амплитуде модуляции n_1 , а в общем случае щель пропорциональна n_1^m . Будем изучать нелинейные волны с волновыми числами и частотами, лежащими в окрестности главной щели, т.е. при $k \sim \beta_0$ и $\omega \sim \beta_0 c/n_0$. Динамическое уравнение для напряженности электрического поля в нелинейной волне, распространяющейся в рассматриваемой среде, можно записать в виде

$$c^2 \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{ n_0^2 E + 2n_0 n_1 \cos(2\beta_0 x) E + \gamma |E|^2 E \}, \quad (1)$$

где γ — нелинейный коэффициент Керра.

Ищем решение уравнения (1) в виде суперпозиции двух волн E_F и E_B , распространяющихся в противоположных направлениях, что соответствует так называемому двухволновому приближению [12,13],

$$E = [E_F(x, t) \exp(i\beta x) + E_B(x, t) \exp(-i\beta x)] \exp(-i\omega t) + \text{с.с.} \quad (2)$$

Из предположений о малости амплитуды модуляции коэффициента преломления n_1 и амплитуды поля E

$$n_1 \ll n_0, \quad \gamma E^2 / n_0^2 \ll 1 \quad (3)$$

следует, что амплитуды E_F и E_B являются плавными функциями координаты x и времени t , т.е. $\partial E / \partial x \ll \beta E$

и $\partial E/\partial t \ll \omega E$. Поэтому при подстановке решения (2) в уравнение (1) можно ограничиться лишь первыми производными от амплитуд по координате и времени. В результате для величин E_F и E_B получается система дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_F}{\partial x} + \frac{\omega n_0^2}{c^2 \beta} \frac{\partial E_F}{\partial t} = & -\frac{i}{2c^2 \beta} E_F (c^2 \beta^2 - \omega^2 n_0^2) \\ & + i \frac{n_0 n_1 \omega^2}{2c^2 \beta} E_B \exp(-2i(\beta - \beta_0)x) \\ & + i \frac{\gamma \omega^2}{2c^2 \beta} (|E_F|^2 + 2|E_B|^2) E_F, \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial E_B}{\partial x} + \frac{\omega n_0^2}{c^2 \beta} \frac{\partial E_B}{\partial t} = & -\frac{i}{2c^2 \beta} E_B (c^2 \beta^2 - \omega^2 n_0^2) \\ & + i \frac{n_0 n_1 \omega^2}{2c^2 \beta} E_F \exp(2i(\beta - \beta_0)x) \\ & + i \frac{\gamma \omega^2}{2c^2 \beta} (|E_B|^2 + 2|E_F|^2) E_B. \quad (5) \end{aligned}$$

В нулевом приближении по малым параметрам (3) система уравнений (4), (5) определяет спектр линеаризованной системы в отсутствие модуляции $\omega_0 = c\beta/n_0$. Из (4) и (5) следует также, что решение (2) справедливо при выполнении неравенства $|\beta - \beta_0| \ll 1/a$, где a — характерный размер области локализации солитонного решения. Вводя обозначения $\kappa = \beta_0 n_1 / 2n_0$, $\alpha = \beta_0 \gamma / 2n_0^2$, $v = c/n_0$ и полагая $\beta = \beta_0$, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_F}{\partial x} + \frac{1}{v} \frac{\partial E_F}{\partial t} = i\kappa E_B - i\alpha \{|E_F|^2 + 2|E_B|^2\} E_F, \\ -\frac{\partial E_B}{\partial x} + \frac{1}{v} \frac{\partial E_B}{\partial t} = i\kappa E_F - i\alpha \{|E_B|^2 + 2|E_F|^2\} E_B. \quad (6) \end{aligned}$$

В линейном приближении спектр этой системы есть

$$\omega = \omega_0 \pm v\sqrt{\kappa^2 + k^2}, \quad (7)$$

где $k = \beta - \beta_0$.

Производя перенормировку амплитуд, координат и времени $e_1 = \sqrt{2\alpha/\kappa} E_F$, $e_2 = \sqrt{2\alpha/\kappa} E_B$, $\kappa x \rightarrow x$, $v\kappa t \rightarrow t$, приходим к системе уравнений в безразмерных переменных

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_1}{\partial t} + \frac{\partial e_1}{\partial x} = i e_2 - \frac{i}{2} \{|e_1|^2 + 2|e_2|^2\} e_1, \\ \frac{\partial e_2}{\partial t} - \frac{\partial e_2}{\partial x} = i e_1 - \frac{i}{2} \{|e_2|^2 + 2|e_1|^2\} e_2. \quad (8) \end{aligned}$$

Ищем решение этой системы уравнений в виде

$$e_i = F_i \exp(i\Omega t), \quad (9)$$

где отклонение частоты от середины щели Ω является одним из параметров двухпараметрического семейства решений. Кроме того, полагаем зависимость амплитуд F_i от координаты и времени в виде $F_i = F_i(x - Vt)$, т. е. ищем

оггибающие солитонов в виде бегущих волн с групповой скоростью V . Тогда система уравнений (8) переписывается следующим образом:

$$\begin{aligned} (1 - V) \frac{\partial F_1}{\partial x} = i F_2 - i\Omega F_1 - \frac{i}{2} \{|F_1|^2 + 2|F_2|^2\} F_1, \\ -(1 + V) \frac{\partial F_2}{\partial x} = i F_1 - i\Omega F_2 - \frac{i}{2} \{|F_2|^2 + 2|F_1|^2\} F_2. \quad (10) \end{aligned}$$

Для этой системы спектр линейных волн $F \sim \exp(i\Omega t - ik(x - Vt))$ представляется в виде

$$\Omega = -kV \pm \sqrt{1 + k^2} = \pm \sqrt{1 - V^2},$$

где групповая скорость $V = \partial\omega/\partial k$.

Далее будут приведены солитонные решения данной системы с $V = 0$ (неподвижные солитоны) и $V \neq 0$ (движущиеся солитоны).

2. неподвижные решения

Неподвижные солитоны в модулированных средах неоднократно анализировались [1-10]. Поэтому не будем подробно останавливаться на данном вопросе и приведем лишь частный случай для околощелевых солитонов [8-10], которым и посвящена данная работа.

Полагая в (10) $V = 0$, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial x} = i F_2 - i\Omega F_1 - \frac{i}{2} \{|F_1|^2 + 2|F_2|^2\} F_1, \\ -\frac{\partial F_2}{\partial x} = i F_1 - i\Omega F_2 - \frac{i}{2} \{|F_2|^2 + 2|F_1|^2\} F_2. \quad (11) \end{aligned}$$

Удобно проводить анализ, используя вещественные переменные

$$g = F_1 + F_2, \quad f = i(F_1 - F_2). \quad (12)$$

Для них имеем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} = -f(1 + \Omega) - \frac{3}{8}f(g^2 + f^2), \\ -\frac{\partial f}{\partial x} = g(1 - \Omega) - \frac{3}{8}g(g^2 + f^2). \quad (13) \end{aligned}$$

Анализ этой системы подробно проводился в работах [3,7]. Она обладает следующим "интегралом движения":

$$E = -(1 + \Omega)f^2 + (1 - \Omega)g^2 - \frac{3}{16}(g^2 + f^2)^2. \quad (14)$$

Нас будут интересовать околощелевые солитоны с $\Omega < -1$. Солитонные решения в данном случае

выглядят следующим образом:

$$g = \sqrt{\frac{8}{3}}(1 + \Omega) \frac{1 \pm \sqrt{-\Omega} \cosh(2\sqrt{-1 - \Omega}x)}{\Omega \cosh^2(2\sqrt{-1 - \Omega}x) + 1},$$

$$f = \sqrt{\frac{8}{3}} \sqrt{\Omega(1 + \Omega)} \sinh(2\sqrt{-1 - \Omega}x) \times \frac{1 \pm \sqrt{-\Omega} \cosh(2\sqrt{-1 - \Omega}x)}{\Omega \cosh^2(2\sqrt{-1 - \Omega}x) + 1}. \quad (15)$$

При $\Omega \rightarrow -1$ решения переходят в так называемый "алгебраический" солитон со степенным убыванием амплитуд на бесконечности

$$g_* = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \frac{1}{1 + 4x^2}, \quad f_* = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \frac{2x}{1 + 4x^2}. \quad (16)$$

Данное решение разграничивает щелевые и околощелевые солитоны.

В исходных переменных F_1, F_2 околощелевой солитон имеет вид

$$F_1 = F_2^* = -\sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{-1 - \Omega} \sqrt{\frac{\sqrt{-\Omega} \cosh(2\sqrt{-1 - \Omega}x) - 1}{\sqrt{-\Omega} \cosh(2\sqrt{-1 - \Omega}x) + 1}} \times \exp\left[-i \arctan\left(\sqrt{\frac{\Omega}{1 + \Omega}} \sinh(2\sqrt{-1 - \Omega}x)\right)\right]. \quad (17)$$

3. Движущиеся околощелевые солитоны

Для анализа движущихся околощелевых солитонов вернемся к системе (10). Сделаем замену переменных

$$F_1 = u_1 \exp(iq + is), \quad F_2 = u_2 \exp(iq - is) \quad (18)$$

и получим следующую эффективную "динамическую систему" в терминах u_1, u_2, s, q :

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{u_2 \sin(2s)}{(1 - V)},$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} = \frac{u_1 \sin(2s)}{(1 + V)},$$

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\cos(2s)}{1 - V^2} \frac{(1 + V)u_2^2 + (1 - V)u_1^2}{2u_1u_2} - \frac{\Omega}{1 - V^2} + \frac{3(u_1^2 + u_2^2) - V(u_2^2 - u_1^2)}{4(1 - V^2)} = 0,$$

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\cos(2s)}{1 - V^2} \frac{(1 + V)u_2^2 - (1 - V)u_1^2}{2u_1u_2} - \frac{V\Omega}{1 - V^2} + \frac{(u_1^2 - u_2^2) - 3V(u_1^2 + u_2^2)}{4(1 - V^2)} = 0. \quad (19)$$

Из первых двух уравнений получаем интеграл движения

$$(1 - V)u_1^2 - (1 + V)u_2^2 = C, \quad (20)$$

где константа C определяется соотношением амплитуд u_1 и u_2 на бесконечности ($x \rightarrow \pm\infty$). Для щелевых солитонов эта константа равна нулю, поскольку в таких солитонах оба поля убывают до нуля на бесконечности. В околощелевых солитонах одно или оба поля могут иметь отличную от нуля асимптотику на бесконечности, что соответствует так называемым "солитонам на пьедестале". Таким образом, для этих солитонов константа C , вообще говоря, может быть и не равной нулю. В этом случае она является третьим независимым параметром солитона (первые два параметра — частота Ω и скорость V). Мы ограничимся в этой работе обсуждением свойств двухпараметрических солитонов. Трехпараметрические солитоны будут исследованы в дальнейшем.

Для изучения свойств двухпараметрических солитонов полагаем константу C в соотношении (20) равной нулю и получаем связь между амплитудами u_1 и u_2 :

$$u_2 = \sqrt{\frac{1 - V}{1 + V}} u_1. \quad (21)$$

Вводя перенормированную координату $z = (x - Vt)/\sqrt{1 - V^2}$ и исключая переменную u_2 , получим следующую систему уравнений для u_1, s и q :

$$\frac{du_1}{dz} = u_1 \sin(2s),$$

$$\frac{ds}{dz} = \cos(2s) - \nu - \alpha(V)u_1^2,$$

$$\frac{dq}{dz} = -\nu V - \delta(V)u_1^2, \quad (22)$$

где

$$\nu = \Omega/\sqrt{1 - V^2}, \quad \alpha(V) = (3 - V^2)/2(1 + V)\sqrt{1 - V^2}$$

и

$$\delta(V) = V/(1 + V)\sqrt{1 - V^2}.$$

Первые два уравнения отделяются и представляют собой эффективную гамильтонову систему с гамильтонианом

$$H = [\cos(2s) - \nu]u_1^2 - \frac{\alpha}{2}u_1^4 \quad (23)$$

для канонически сопряженных обобщенных координаты $2s$ и импульса u_1^2 . Наличие интеграла движения H позволяет проинтегрировать систему уравнений (22).

Фазовые портреты рассматриваемой системы для различных значений частоты Ω приведены на рис.1, *a* и *b*. При $\Omega > \sqrt{1 - V^2}$ (что соответствует значению $\nu > 1$) особые точки для фазовой плоскости u_1, s отсутствуют и солитонных решений в этой области нет. При $\Omega = \sqrt{1 - V^2}$, т.е. $\nu = 1$ (что отвечает верхней ветви спектра линейных волн), единственной особой точкой является точка $s = u_1 = 0$, которая расщепляется на

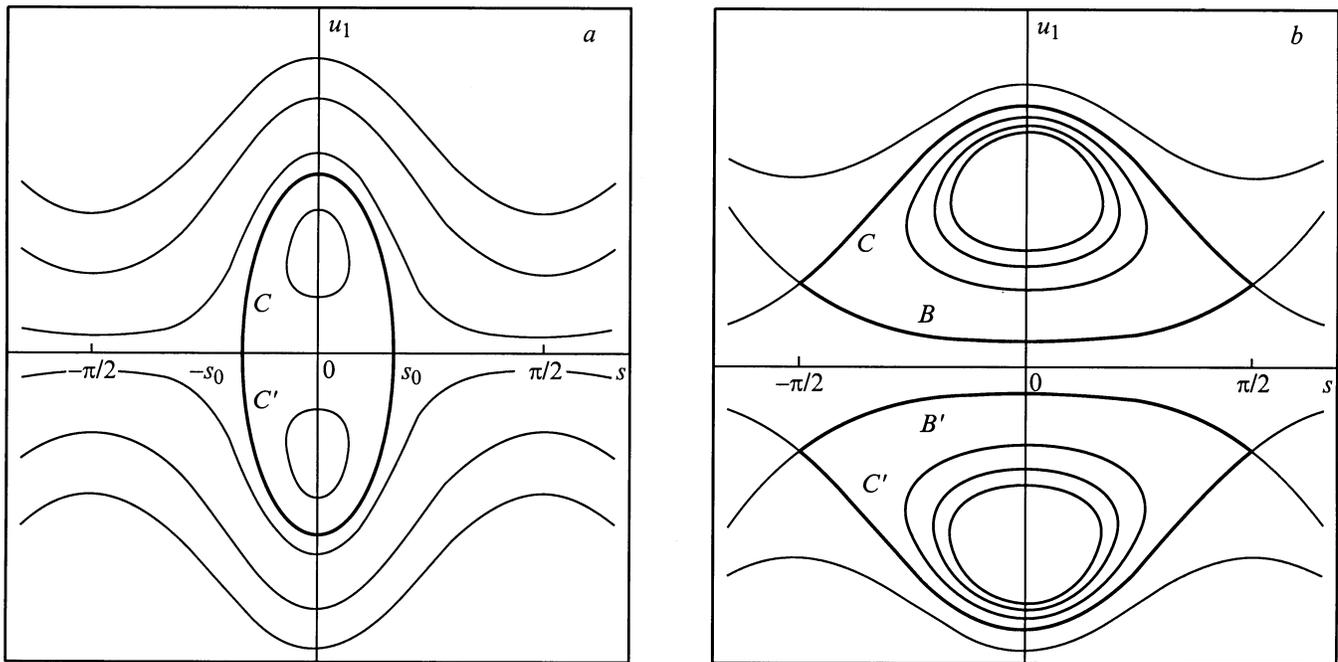


Рис. 1. Фазовый портрет системы уравнений (22). *a* — при $-\sqrt{1-V^2} < \Omega < \sqrt{1-V^2}$ (частота и волновой вектор лежат внутри области, ограниченной двумя ветвями спектра линейных волн). Координаты седловых точек: $u_1 = 0, \cos(2s_0) = \nu$. *b* — при $\Omega < -\sqrt{1-V^2}$ (частота и волновой вектор лежат под нижней ветвью спектра линейных волн). Координаты седловых точек: $u_1 = \pm\sqrt{(-1-\nu)/\alpha}, s = \pm\pi/2$.

четыре особые точки в области $-1 < \nu < 1$ (центры $s = 0, u_1 = \pm\sqrt{(1-\nu)/\alpha}$ и седла $s = \pm 0.5 \arccos \nu, u_1 = 0$). В этой области (область *A* на рис. 2) существуют щелевые движущиеся солитоны, соответствующие сепаратрисам *C* и *C'* на рис. 1, *a*. В случае $\Omega < -\sqrt{1-V^2}$, т.е. $\nu < -1$ (область *B* на рис. 2), каждая из седловых точек расщепляется на две с координатами $s = \pm\pi/2, u_1 = \pm\sqrt{(-1-\nu)/\alpha}$, отвечающими ненулевому состоянию системы на бесконечности. Сепаратрисы *C, C', B, B'*, соединяющие эти точки, описывают два типа движущихся околощелевых солитонов с частотами, лежащими под нижней ветвью спектра линейных волн. Решения для этих околощелевых солитонов имеют вид

$$s = \arctan \left(\sqrt{\frac{\nu}{1+\nu}} \sinh(2\sqrt{-1-\nu}z) \right),$$

$$u_1 \left\{ \frac{1}{\alpha}(-1-\nu) \left[1 - \frac{2}{\sqrt{-\nu} \cosh(2\sqrt{-1-\nu}z) \pm 1} \right] \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (24)$$

После подстановки найденного выражения для u_1 в уравнение для переменной q получаем явный вид этой функции

$$q = Vz \left(-\nu + 2 \frac{1+\nu}{3-V^2} \right) + \frac{4V}{3-V^2} \arctan \left(\frac{\sqrt{-\nu} \exp(2\sqrt{-1-\nu}z) \pm 1}{\sqrt{-1-\nu}} \right). \quad (25)$$

Используя соотношения (9), (18), (24) и возвращаясь к исходным переменным, получим

$$e_1 = \sqrt{\frac{2(1+V)}{3-V^2}} \sqrt{-\sqrt{1-V^2}-\Omega} \sqrt{1-\frac{2}{\sqrt{-\nu} \cosh \zeta \pm 1}}$$

$$\times \exp \left[i \arctan \left(\sqrt{\frac{\nu}{1+\nu}} \sinh \zeta \right) \right]$$

$$\times \exp \left[i\Omega t + i \frac{V(x-Vt)}{\sqrt{1-V^2}} \left(-\nu + 2 \frac{1+\nu}{3-V^2} \right) + i \frac{4V}{3-V^2} \arctan \left(\frac{\sqrt{-\nu} \exp \zeta \pm 1}{\sqrt{-1-\nu}} \right) \right],$$

$$e_2 = \sqrt{\frac{2(1-V)}{3-V^2}} \sqrt{-\sqrt{1-V^2}-\Omega} \sqrt{1-\frac{2}{\sqrt{-\nu} \cosh \zeta \pm 1}}$$

$$\times \exp \left[-i \arctan \left(\sqrt{\frac{\nu}{1+\nu}} \sinh \zeta \right) \right]$$

$$\times \exp \left[i\Omega t + i \frac{V(x-Vt)}{\sqrt{1-V^2}} \left(-\nu + 2 \frac{1+\nu}{3-V^2} \right) + i \frac{4V}{3-V^2} \arctan \left(\frac{\sqrt{-\nu} \exp \zeta \pm 1}{\sqrt{-1-\nu}} \right) \right], \quad (26)$$

где $\zeta = 2\sqrt{-1-\nu}(x-Vt)/\sqrt{1-V^2}$.

Найденные околощелевые солитоны представляют собой так называемые солитоны "на пьедестале", движущиеся с той же скоростью, что и нелинейные волны с

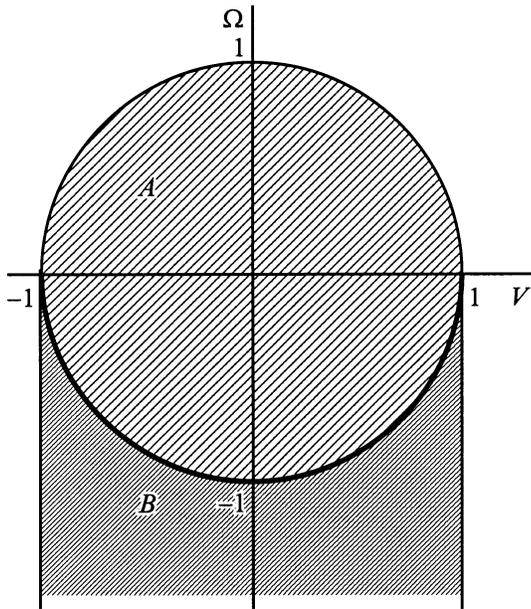


Рис. 2. Область существования солитонных решений на плоскости параметров Ω , V . Окружность соответствует закону дисперсии линейных волн $\Omega = \pm\sqrt{1-V^2}$. Заштрихованная область A внутри окружности отвечает щелевым солитонам, нижняя дуга окружности — ”алгебраическим” солитонам, полоса ниже окружности (область B) — околощелевым солитонам.

постоянной амплитудой. В этом легко убедиться, рассмотрим асимптотики решения на бесконечности

$$e_{1,2}^{\infty} = \pm i \sqrt{\frac{2(1 \pm V)}{3 - V^2}} \sqrt{-\sqrt{1 - V^2} - \Omega} \times \exp\left(i\Omega t + i \frac{V(x - Vt)}{\sqrt{1 - V^2}} + i \frac{2V\pi}{3 - V^2}\right), \quad (27)$$

совпадающие с решением системы (8) для пространственно однородных, нелинейных волн.

При изменении координаты ζ от $-\infty$ до $+\infty$ фаза высокочастотного ”заполнения” солитона приобретает сдвиг $\Delta = \pi(3 + 2V - V^2)/(3 - V^2)$.

Представляет интерес предельный переход от движущихся околощелевых солитонов к движущимся щелевым. В пределе $\nu \rightarrow -1$, т.е. $\Omega \rightarrow -\sqrt{1 - V^2}$, выражение (26) переходит в решение для движущегося ”алгебраического” солитона

$$e_{1,2}^* = \sqrt{\frac{2(1 \pm V)(1 - V^2)}{3 - V^2}} \frac{2}{\sqrt{1 - V^2 + 4(x - Vt)^2}} \times \exp\left[\pm i \arctan\left(2 \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2}}\right)\right] \times \exp\left[i\Omega t + i \frac{V(x - Vt)}{\sqrt{1 - V^2}} + i \frac{4V}{3 - V^2} \arctan\left(2 \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2}}\right)\right]. \quad (28)$$

Естественно, это решение получается и в пределе $\nu \rightarrow -1$ из выражения для щелевых солитонов.

Полагая в формулах (26) $V = 0$ и переходя к переменным f , g (см. (12)), мы получим уже ранее приводившееся выражение для неподвижного ”алгебраического” солитона (16).

В настоящей работе получены и проанализированы солитонные решения в нелинейной оптической среде с модулированным коэффициентом преломления. Параметры солитонов лежат внутри щели спектра линейных волн (так называемые щелевые солитоны) и вблизи нее (околощелевые солитоны). Основным результатом является впервые полученное аналитическое выражение для движущихся околощелевых солитонов, которые представляют собой локализованные возбуждения на фоне нелинейных волн с неубывающей на бесконечности амплитудой (так называемые солитоны на пьедестале). Скорость околощелевого солитона равна групповой скорости фоновой нелинейной волны.

Мы рассматривали случай так называемой фокусирующей нелинейной оптической среды с положительным коэффициентом γ в уравнении (1). При этом околощелевые солитонные решения существуют в области под нижней ветвью спектра линейных волн. В случае отрицательных значений коэффициента γ (дефокусирующая среда) характер солитонных решений в щели и около щели качественно не изменится, однако околощелевые солитоны будут существовать в области над верхней ветвью спектра линейных волн.

Список литературы

- [1] W. Chen, D.L. Mills. Phys. Rev. Lett. **58**, 160 (1987).
- [2] D. Mills, J. Trullinger. Phys. Rev. **B36**, 947 (1987).
- [3] O. Chubykalo, A. Kovalev, O. Usatenko. Phys. Rev. **B47**, 3153 (1993).
- [4] A.S. Kovalev, K.V. Kladko, O.V. Usatenko. J. Phys. Soc. Jpn. **64**, 2464 (1995).
- [5] O.V. Usatenko, A.S. Kovalev, A.A. Vialov. Fluctuation Phenomena: Disorder and Nonlinearity / Ed. by A.R. Bishop, S. Jimenez, L. Vazquez. World Scientific (1994). P. 286; O.V. Усатенко, А.С. Ковалев, А.А. Вялов. ФТТ **37**, 2487 (1995).
- [6] O. Chubykalo, Yu. Kivshar. Phys. Rev. **E48**, 4128 (1993).
- [7] A.S. Kovalev, O.V. Usatenko, A.V. Gorbach. Phys. Rev. **E60**, 2309 (1999).
- [8] J. Coste, J. Peyraud. Phys. Rev. **B39**, 13 086 (1989).
- [9] J. Coste, J. Peyraud. Phys. Rev. **B39**, 13 096 (1989).
- [10] J. Peyraud, J. Coste. Phys. Rev. **B40**, 12 201 (1989).
- [11] S. Wabnitz. Optics Letters **14**, 1071 (1989).
- [12] A.B. Aceves, S. Wabnitz. Phys. Lett. **A141**, 37 (1989).
- [13] A.S. Gorshkov, O.N. Ermakova, V.F. Marchenko. Nonlinearity **10**, 1007 (1997).