Физика твердого тела, 2000, том 42, вып. 6

Влияние взаимного увлечения электронов и фононов на термомагнитные и термоэлектрические явления в проводниках с вырожденной статистикой носителей тока

© И.Г. Кулеев

Институт физики металлов Уральского отделения Российской академии наук,
620219 Екатеринбург, Россия

E-mail: kileev@imp.uran.ru

(Поступила в Редакцию 5 августа 1999 г.)

Вычислены кинетические коэффициенты проводников с вырожденной статистикой носителей тока в магнитном поле с учетом взаимного увлечения электронов и фононов. Расчет проведен в линейном приближении по параметру вырождения. Исследовано влияние взаимного увлечения на термомагнитные и термоэлектрические эффекты в проводниках как в изотермических, так и в адиабатических условиях.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант N 00-02-16 299).

Изучение влияния эффектов электрон-фононного увлечения на термомагнитные явления в проводниках представляет собой не только более интересную, но и более сложную задачу, чем исследование гальваномагнитных явлений [1–14]. Термомагнитные эффекты (ТМЭ), такие как продольный и поперечный эффекты Нернста–Эттингсгаузена, являются гораздо более тонким индикатором механизма рассеяния носителей тока, чем подвижность [2]. При смене доминирующего механизма рассеяния подвижность носителей тока меняется только по величине, тогда как ТМЭ, пропорциональные производной времени релаксации по энергии, могут менять свой знак [2,13]. Поэтому изучение их зависимостей от магнитного поля и температуры дает значительно более полную информацию как о механизмах релаксации носителей тока и фононов, так и об особенностях спектра квазичастиц в изучаемых соединениях.

Цель настоящей работы — исследование влияние эффектов взаимного увлечения электронов и фононов на термомагнитные и термоэлектрические эффекты в металлах и полупроводниках с вырожденной статистикой носителей тока. Теория, развития в [7,8], в нулевом приближении по параметру вырождения $k_\mathrm{B}T/\zeta \ll 1$ (ζ — энергия Ферми) не может быть использована для анализа этих эффектов, поскольку в этом приближении диффузионные потоки, как и эффекты Нернста–Эттингсгаузена, обращаются в нуль. Поэтому для исследования ТМЭ необходимо решить систему кинетических уравнений для неравновесных функций распределения электрон-фононных систем, учитывая последующие члены разложения по параметру $k_\mathrm{B}T/\zeta$. Такое решение с учетом эффектов взаимного увлечения электронов и фононов найдено в нашей работе [15] в линейном приближении по параметру вырождения.

В данной работе мы воспользуемся этим решением, вычислим потоки заряда и тепла и проанализируем роль взаимного увлечения электронов и фононов в термомагнитных и термоэлектрических эффектах в вырожденных проводниках с изотропным спектром носителей тока. В разделе 1 вычислен ток проводимости в неравновесной электрон-фононной системе и рассмотрены поперечный и продольный эффекты Нернста–Эттингсгаузена. В разделе 2 рассчитан поток тепла и проанализирована зависимость теплопроводности и эффекта Маджи–Риги–Ледюка от магнитного поля в линейном приближении по параметру вырождения. В разделе 3 исследованы термомагнитные и термоэлектрические эффекты в вырожденных проводниках в адиабатических условиях с учетом взаимного увлечения электронов и фононов.

1. Поперечный и продольный эффекты Нернста–Эттингсгаузена

Поперечный эффект Нернста–Эттингсгаузена (НЭ) заключается в появлении в образце электрического поля в направлении, перпендикулярном градиенту температуры $\boldsymbol{\nabla}T = (\nabla_x T, 0, 0)$ и магнитному полю $\mathbf{H} = (0, 0, H)$. Величина этого эффекта определяется коэффициентом $Q(H)$ [3]

$$Q(H) = -H\nabla_x T/\mathbf{E}_y. \quad (1)$$

Коэффициент продольного эффекта НЭ $\Delta\alpha(H)$ характеризует изменение электрического поля вдоль градиента температуры благодаря действию магнитного поля; фактически это изменение термоэдс в магнитном поле

$$\mathbf{E}_x(\mathbf{H}) - \mathbf{E}_x(0) = \big(\alpha(H) - \alpha(0)\big)\nabla_x T = \Delta\alpha(H)\nabla_x T. \quad (2)$$

В изотермических условиях $\mathbf{j}_x = 0$, $\mathbf{j}_y = 0$, $\nabla_y T = 0$, и для определения коэффициентов $Q(H)$ и $\Delta\alpha(H)$ достаточно вычислить ток проводимости $\mathbf{j}$.

Выделим в токе проводимости части, пропорциональные неравновесным добавкам к функции распределения электронов $\delta f_\mathbf{k}^{(1)}$ и $\delta f_\mathbf{k}^{(2)}$ [15]. Тогда для проводника с изотропным законом дисперсии носителей тока получим

$$\mathbf{j} = -\frac{en}{m_F}\int_0^\infty d\varepsilon\left(-\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}\right)\frac{\big(\tilde{k}(\varepsilon)\big)}{\tilde{m}(\varepsilon)}\big(\boldsymbol{\chi}_{1H}(\varepsilon)+\boldsymbol{\chi}_{2H}(\varepsilon)\big)$$

$$= \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2,$$

$$\boldsymbol{\chi}_{2H}(\varepsilon) = \frac{\tilde{m}^2(\varepsilon)\psi(\varepsilon)}{\tilde{k}^3}\mathbf{Q}_H(\varepsilon),$$

$$\mathbf{Q}_H(\varepsilon) = \mathbf{Q}(\varepsilon) + \gamma(\varepsilon)\big(\mathbf{h}\times\mathbf{Q}(\varepsilon)\big), \quad \psi(\varepsilon) = \frac{\tau(\varepsilon)}{\big(1+\gamma^2(\varepsilon)\big)},$$

$$\boldsymbol{\chi}_{1H}(\varepsilon) = \big\{\boldsymbol{\chi}_1(\varepsilon) + \gamma(\varepsilon)\big(\mathbf{h}\times\boldsymbol{\chi}_1(\varepsilon)\big)\big\}\big(1+\gamma^2(\varepsilon)\big)^{-1},$$

$$\boldsymbol{\chi}_1(\varepsilon) = -e\tau(\varepsilon)\left(\mathbf{E} + \frac{k_{\mathrm{B}}}{e}\left(\frac{\big(\tilde{m}(\varepsilon)\big)^2}{\tilde{k}^3}A_{\mathrm{ph}}(\varepsilon) + \frac{\varepsilon-\zeta}{k_{\mathrm{B}}T}\right)\boldsymbol{\nabla}T\right),$$

$$A_{\mathrm{ph}}(\varepsilon) = \sum_\lambda \frac{m_F s_\lambda^2}{k_{\mathrm{B}}T}\int_0^{z_{2k}^\lambda} dz_q^\lambda \frac{\nu_{\mathrm{eph}}^\lambda(k_F, q)}{\nu_{\mathrm{ph}}^\lambda(q)}. \tag{3}$$

Здесь $\tilde{m}(\varepsilon) = m(\varepsilon)/m_F$, m_F — эффективная масса электрона на уровне Ферми, $\tilde{k} = k/k_F$, $\hbar k_F$ — фермиевский импульс, $\gamma(\varepsilon) = \Omega\tau(\varepsilon)$, где Ω — циклотронная частота, $\tau(\varepsilon)$ — полное время релаксации электронов $\tau^{-1}(\varepsilon_k) = \nu_e(k) = \nu_{ei}(k) + \nu_{\mathrm{eph}}(k)$, $\nu_{ei}(k)$ и $\nu_{\mathrm{eph}}(k)$ — частоты релаксации электронов на примесях и на фононах, функция $\mathbf{Q}(\varepsilon)$ определена в [15]. Ток $\mathbf{j}_1$ обусловлен непосредственным действием электрического поля и градиента температуры на электронную подсистему, а также включает эффект увлечения электронов фононами. Выражение для него имеет известный вид [3]

$$\mathbf{j}_1 = \sigma_{xx}^0\{\mathbf{E}_{j11} + \gamma_F(\mathbf{h}\times\mathbf{E}_{j12})\}, \quad \mathbf{E}_{j1N} = \mathbf{E}_A + \frac{k_{\mathrm{B}}}{e}\frac{\pi^2}{3}D_{jN}\boldsymbol{\nabla}T,$$

$$\mathbf{E}_A = \mathbf{E} + \frac{k_{\mathrm{B}}}{e}A_{\mathrm{ph}}(\zeta)\boldsymbol{\nabla}T,$$

$$D_{jN} = k_{\mathrm{B}}T\frac{d}{d\varepsilon}\left[\ln\left(\frac{k^3(\varepsilon)\psi(\varepsilon)\big(\gamma(\varepsilon)\big)^{N-1}}{m(\varepsilon)}\right)\right]_{\varepsilon=\zeta},$$

$$\sigma_{xx}^0 = \frac{e^2 n_e \tau_F}{m_F(1+\gamma_F^2)}. \tag{4}$$

Поток заряда $\mathbf{j}_2$ учитывает влияние неравновесности электронов на электроны через фононную подсистему. В линейном приближении по $k_{\mathrm{B}}T/\zeta$ вклад в него вносит только симметричная часть функции $\mathbf{Q}_s(\varepsilon)$. Подставим решение интегрального уравнения для функции $\mathbf{Q}(\varepsilon)$, найденное в [15], в (3) и, выполнив интегрирование по параметру ε, получим

$$\mathbf{j}_2 = \frac{\sigma_{xx}^0\Gamma}{(1-\Gamma)^2+\gamma_F^2}\{\mathbf{E}_{j22} + \gamma_F(\mathbf{h}\times\mathbf{E}_{j12})\},$$

$$\mathbf{E}_{j2N} = \beta_{j2N}\mathbf{E}_A + \mathbf{E}_{T2N},$$

$$\beta_{j21} = 1 - \Gamma - \gamma_F^2 - \frac{C_1 D_\Phi(1+\gamma_F^2)(1-\tilde{\gamma}_F^2)}{1+\tilde{\gamma}_F^2},$$

$$\beta_{j22} = 2 - \Gamma - \frac{2C_1 D_\Phi(1+\gamma_F^2)}{(1-\Gamma)(1+\tilde{\gamma}_F^2)},$$

$$\mathbf{E}_{T21} = \frac{k_{\mathrm{B}}}{e}\frac{\pi^2}{3}\big[(1-\Gamma)D_{Q1} - \gamma_F^2 D_{Q2}\big]\boldsymbol{\nabla}T,$$

$$\mathbf{E}_{T22} = \frac{k_{\mathrm{B}}}{e}\frac{\pi^2}{3}\big[D_{Q1} - (1-\Gamma)D_{Q2}\big]\boldsymbol{\nabla}T,$$

$$D_{QN} = k_{\mathrm{B}}T\frac{d}{d\varepsilon}\Big[\ln\big[m(\varepsilon)\psi(\varepsilon)\big(\gamma(\varepsilon)\big)^{N-1}\Phi^{1/2}(\varepsilon)\big]\Big]_{\varepsilon-\zeta},$$

$$D_\Phi = k_{\mathrm{B}}T\frac{d}{d\varepsilon}\big[\ln\big(\Phi(\varepsilon)\big)\big]_{\varepsilon=\zeta}, \tag{5}$$

где $\Phi(\varepsilon) = \sum_\lambda \big\langle \nu_{\mathrm{phe}}^\lambda(k_F, q)\nu_{\mathrm{ph}}^\lambda(k_F, q)/\nu_{\mathrm{ph}}^\lambda(q)\big\rangle_{z_{2k}^\lambda}$, $C_1 = \ln(2) + J_1$, согласно [14], $J_1 = 0.31$. Параметр $\Gamma = \tau_F\Phi(\zeta)$ характеризует степень взаимного влияния неравновесности электронов и фононов в отсутствие магнитного поля. Он равен отношению времени свободного пробега электрона ко времени, в течение которого импульс, переданный электронами фононам, возвращается обратно в электронную систему [14]. Как видно из (5), в сильных магнитных полях при $\gamma_F \gg 1$, а также при $\Gamma \ll 1$ ток $\mathbf{j}_2 \ll \mathbf{j}_1$, и эффектами взаимного увлечения можно пренебречь. С увеличением параметра Γ возрастает роль тока $\mathbf{j}_2$, и при $\Gamma > 1/2$ в области слабых магнитных полей пренебрежение эффектами взаимного увлечения приведет к качественно неправильным результатам при интерпретации экспериментальных данных. Следует отметить, что дрейфовый ток (пропорциональный напряженности электрического поля $\mathbf{E}$) и ток увлечения (пропорциональный $A_{\mathrm{ph}}\boldsymbol{\nabla}T$) перенормируются одинаковым образом из-за неравновесности электронов на электроны через фононную систему. Выразим полный ток $\mathbf{j}$ через компоненты тензоров электропроводности $\sigma_{\mu\nu}$ и термоэлектрических коэффициентов $\beta_{\mu\nu}$

$$j_\mu = \sum_\nu(\sigma_{\mu\nu}E_\nu - \beta_{\mu\nu}\nabla_\nu T), \tag{6}$$

тогда для компонент $\sigma_{\mu\nu}$ и $\beta_{\mu\nu}$ получим

$$\sigma_{xx} = \tilde{\sigma}_{xx}^0\left\{1 - \frac{C_1\Gamma D_\Phi(1-\tilde{\gamma}_F^2)}{(1-\Gamma)(1+\tilde{\gamma}_F^2)}\right\},$$

$$\sigma_{yx} = -\sigma_{xy} = \tilde{\sigma}_{xx}^0\tilde{\gamma}_F\left\{1 - \frac{2C_1\Gamma D_\Phi}{(1-\Gamma)(1+\tilde{\gamma}_F^2)}\right\},$$

$$\beta_{xx} = \beta_{yy} = -\frac{k_{\mathrm{B}}}{e}\left\{\sigma_{xx}A_{\mathrm{ph}}(\zeta) + \frac{\pi^2}{3}\sigma_{xx}^0[D_{j1} + D_\Gamma^{(1)}]\right\},$$

$$D_\Gamma^{(1)} = \frac{\Gamma\big[(1-\Gamma)D_{Q1} - \gamma_F^2 D_{Q2}\big]}{(1-\Gamma)^2+\gamma_F^2},$$

$$\beta_{yx} = -\beta_{xy} = -\frac{k_{\mathrm{B}}}{e}\left\{\sigma_{yx}A_{\mathrm{ph}}(\zeta) + \frac{\pi^2}{3}\sigma_{yx}^0[D_{j2} + D_\Gamma^{(2)}]\right\},$$

$$D_\Gamma^{(2)} = \frac{\Gamma\big[D_{Q1} + (1-\Gamma)D_{Q2}\big]}{(1-\Gamma)^2+\gamma_F^2}, \tag{7}$$

где $\tilde{\sigma}_{xx}^0 = e^2 n_e\tilde{\tau}_F/m_F(1+\tilde{\gamma}_F^2)$, $\tilde{\sigma}_{yx}^0 = \tilde{\gamma}_F\tilde{\sigma}_{xx}^0$. При $H \to 0$ выражение для σ_{xx} совпадает с результатом, полученным в [14]. В нулевом приближении по вырождению учет взаимного увлечения в компонентах тензора проводимости сводится к замене τ_F на $\tilde{\tau}_F = \tau_F/(1-\Gamma)$. В этом приближении диффузионные слагаемые в компонентах тензоров термоэлектрических коэффициентов $\beta_{\mu\nu}$ обрщаются в нуль и формулы (7) переходят в результаты, полученные в работах [7,8]. Добавка, линейная по параметру $k_\mathrm{B}T/\zeta$, в компонентах тензора $\sigma_{\mu\nu}$ может быть существенна в случае сильного увлечения, когда $1 - \Gamma \ll 1$.

В изотермических условиях коэффициент поперечного эффекта НЭ $Q(H)$ и термоэдс $\alpha(H)$ могут быть представлены через компоненты тензоров $\sigma_{\mu\nu}$ и $\beta_{\mu\nu}$ следующим образом [3]:

$$Q(H) = \frac{\sigma_{yx}\beta_{xx} - \sigma_{xx}\beta_{yx}}{H(\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yx}^2)}, \quad \alpha(H) = \frac{\sigma_{xx}\beta_{xx} + \sigma_{yx}\beta_{yx}}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yx}^2}. \quad (8)$$

Подставив (7) в (8), получим

$$Q(H) = -\frac{\pi^2 k_\mathrm{B}\gamma_F}{3eH(1+\gamma_F^2)}\left[D_{j1} - D_{j2} - \Gamma(D_{Q2} - D_{j2})\right], \quad (9)$$

$$\alpha(H) = -\frac{k_\mathrm{B}}{e}\left\{A_\mathrm{ph}(\zeta) + \frac{\pi^2}{3(1+\gamma_F^2)}\left[D_{j1} + \gamma_F^2 D_{j2} + \Gamma(D_{Q1} - D_{j1})\right]\right\} = \alpha_\mathrm{ph} + \alpha_\mathrm{dif}. \quad (10)$$

Прежде всего, следует отметить, что вклад фононного увлечения в термоэдс не перенормируется за счет взаимного влияния неравновесности электронов и фононов, так как дрейфовый ток и ток увлечения перенормируются одинаковым образом (см. формулу (5)). Возникновение добавки в диффузионную компоненту термоэдс также физически понятно. Поскольку средняя скорость упорядоченного движения электронов равна нулю, то передача импульса от электронов в фононную подсистему происходит за счет зависимости эффективной массы, квазиимпульса электронов и параметров рассеяния от энергии электронов в окрестности уровня Ферми, т. е. этот вклад должен быть пропорциональным производной перечисленных параметров по энергии электрона. Это и следует из формулы (5). Заметим, что при расчете термоэдс авторы [7,8] ограничились нулевым приближением по вырождению электронного газа, поэтому и диффузионный вклад, и вклад взаимного увлечения в термоэдс полностью выпали из рассмотрения. В нулевом магнитном поле вырожение для термоэдс $\alpha(0)$ совпадает с полученным в [14]. Учитывая, что

$$D_{j2} - D_{j1} = D_0 = k_\mathrm{B}T\frac{d}{d\varepsilon}\left[\ln\left(\frac{\tau(\varepsilon)}{m(\varepsilon)}\right)\right]_{\varepsilon=\zeta},$$

$$D_{QN} - D_{jN} = D_{Qj} = k_\mathrm{B}T\frac{d}{d\varepsilon}\left[\ln\left(\frac{\left(m(\varepsilon)\right)^2\Phi^{1/2}(\varepsilon)}{k^3(\varepsilon)}\right)\right]_{\varepsilon=\zeta},$$

окончательно получим

$$Q(H) = \frac{\pi^2 k_\mathrm{B}\gamma_F}{3eH(1+\gamma_F^2)}[D_0 + \Gamma D_{Qj}],$$

$$\Delta\alpha(H) = \frac{\pi^2 k_\mathrm{B}\gamma_F^2}{3eH(1+\gamma_F^2)}[D_0 + \Gamma D_{Qj}]. \quad (11)$$

При $\Gamma = 0$ выражения коэффициентов $Q(H)$ и $\Delta\alpha(H)$ совпадают с полученными в работах [16,17]. Из (11) следует, что учет взаимного увлечения электронов и фононов не приводит к изменению зависимости коэффициентов поперечного и продольного эффектов НЭ от магнитного поля, а сказывается лишь на величинах эффектов за счет слагаемых, пропорциональных параметру взаимного увлечения Γ. Абсолютная величина $\Delta\alpha(H)$ растет квадратично с магнитным полем в области слабых магнитных полей $\gamma_F \ll 1$ и стремится к насыщению при $\gamma_F \gg 1$, как и в отсутствии взаимного увлечения [17]. Абсолютная величина коэффициента $Q(H)$ слабо убывает при $\gamma_F \ll 1$ и стремится к нулю при $\gamma_F \gg 1$. Таким образом, учет взаимного увлечения в рамках общепринятых приближений [7–15] не может объяснить наблюдаемую на эксперименте смену знака коэффициента $Q(H)$ и отсутствие насыщения у величины $\Delta\alpha(H)$ [18].

2. Теплопроводность и эффект Маджи–Риги–Ледюка

Вычислим электронный $\mathbf{W}_\mathrm{e}$ и фононный $\mathbf{W}_\mathrm{ph}$ потоки тепла, разделив их на части, пропорциональные неравновесным добавкам к функциям распределения электронов $\delta f_\mathrm{k}^{(1)}$ и $\delta f_\mathbf{k}^{(2)}$ и фононов $g_\lambda^{(1)}(\mathbf{q})$ и $g_\lambda^{(2)}(\mathbf{q})$. Тогда получим

$$\mathbf{W}_\mathrm{e} = \frac{n_e}{m_F}\int_0^\infty d\varepsilon\left(-\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}\right)(\varepsilon-\zeta)\frac{\tilde{k}^3}{\tilde{m}(\varepsilon)} \times \left(\boldsymbol{\chi}_{1H}(\varepsilon) + \boldsymbol{\chi}_{2H}(\varepsilon)\right) = \mathbf{W}_\mathrm{e}^{(1)} + \mathbf{W}_\mathrm{e}^{(2)}, \quad (12)$$

$$\mathbf{W}_\mathrm{ph} = \frac{1}{V}\sum_{q,\lambda}\hbar\omega_{q\lambda}\vartheta_q^\lambda\left(g_\lambda^{(1)}(\mathbf{q}) + g_\lambda^{(2)}(\mathbf{q})\right) = \mathbf{W}_\mathrm{ph}^0 + \mathrm{W}_\mathrm{phe}. \quad (13)$$

Вклад $\mathbf{W}_\mathrm{ph}^0$ обусловлен непосредственным действием градиента температуры на фононную подсистему

$$\mathbf{W}_\mathrm{ph}^0 = -\kappa_\mathrm{ph}^0\nabla T,$$

$$\kappa_\mathrm{ph}^0 = \sum_\lambda\frac{k_\mathrm{B}s_\lambda^2 q_T^3}{6\pi^2}\int_0^{z_d^\lambda} dx_q^\lambda\frac{(z_q^\lambda)^4}{v_\mathrm{ph}^\lambda(q)}N_{q\lambda}^0(N_{q\lambda}^0 + 1), \quad (14)$$

где $z_d^\lambda = \hbar\omega_{d\lambda}/k_\mathrm{B}T$, а $\omega_{d\lambda}$ — дебаевская частота для фононов поляризации λ. Вторая часть — $\mathbf{W}_\mathrm{phe}$ — является результатом влияния неравновесности электронов на фононы. Она приводит к перенормировке как электронного, так и фононного потоков тепла и может быть также разделена на две части, пропорциональные неравновесным добавкам к функциям распределения электронов $\delta f_{\mathbf{k}}^{(1)}$, $\delta f_{\mathbf{k}}^{(2)}$,

$$\mathbf{W}_{\mathrm{phe}} = \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{q},\lambda} s_{\lambda}^{2}\hbar\mathbf{q}g_{\lambda}^{(2)}(\mathbf{q})$$

$$= \frac{k_{\mathrm{B}}T}{m_F}\frac{2}{V}\sum_{\mathbf{k}}\frac{\tilde{m}(\varepsilon_k)}{\tilde{k}^3}A_{\mathrm{ph}}(\varepsilon_k)\hbar\mathbf{k}(\delta_{\mathbf{k}}^{(1)} + \delta_{\mathbf{k}}^{(2)})$$

$$= \mathbf{W}_{\mathrm{phe}}^{(1)} + \mathrm{W}_{\mathrm{phe}}^{(2)}. \tag{15}$$

Поток $\mathbf{W}_{\mathrm{e}}^{(1)}$ обусловлен непосредственным действием электрического поля и градиента температуры на электронную подсистему, а также включает эффект увлечения электронов фононами. Выражение для него имеет вид [3]

$$\mathbf{W}_{\mathrm{e}}^{(1)} = -\frac{e}{k_{\mathrm{B}}}L_0\sigma_{xx}^{0}T\big\{\mathbf{E}_{W11} + \gamma_F(\mathbf{h}\times\mathbf{E}_{W12})\big\},$$

$$\mathbf{E}_{W1N} = \left\{D_{jN}\mathbf{E} + \frac{k_{\mathrm{B}}}{e}(A_{\mathrm{ph}}D_{AN} + 1)\boldsymbol{\nabla}T\right\},$$

$$D_{AN} = k_{\mathrm{B}}T\frac{d}{d\varepsilon}\left(\ln\big[\psi(\varepsilon)m(\varepsilon)A_{\mathrm{ph}}(\varepsilon)\big(\gamma(\varepsilon)\big)^{N-1}\big]\right)_{\varepsilon=\zeta}, \tag{16}$$

где $L_0 = (\pi^2/3)(k_{\mathrm{B}}/e)^2$. Нетрудно убедиться в том, что соотношения Онзагера для термоэлектрических коэффициентов в потоках тепла (16) и заряда (4) не выполняются. Как показано в [14], необходимо учесть поток тепла $\mathbf{W}_{\mathrm{phe}}$, переносимый фононами, но обусловленный неравновесностью электронов. Вычисление потока $\mathbf{W}_{\mathrm{phe}}^{(1)}$, обусловленного неравновесной добавкой $\delta f_{\mathbf{k}}^{(1)}$, дает

$$\mathbf{W}_{\mathrm{phe}}^{(1)} = -\frac{k_{\mathrm{B}}T}{e}\sigma_{xx}^{0}A_{\mathrm{ph}}(\zeta)\big\{\mathbf{E}_{\mathrm{phe1}} + \gamma_F(\mathbf{h}\times\mathbf{E}_{\mathrm{phe2}})\big\},$$

$$\mathbf{E}_{\mathrm{phe}\,N} = \mathbf{E}_A + \frac{\pi^2}{3}\frac{k_{\mathrm{B}}}{e}D_{AN}\boldsymbol{\nabla}T. \tag{17}$$

Как и в работе [14], дрейфовую и диффузионную компоненты потока тепла $\mathbf{W}_{\mathrm{phe}}^{(1)}$, которые связаны с влиянием неравновесности электронов, включим в электронный поток тепла. Слагаемое

$$\Delta\mathbf{W}_{\mathrm{phe}}^{(1)} = -\left(\frac{k_{\mathrm{B}}}{e}\right)^2 T\sigma_{xx}^{0}\big(A_{\mathrm{ph}}(\zeta)\big)^2\big\{\boldsymbol{\nabla}T + \gamma_F(\mathbf{h}\times\boldsymbol{\nabla}T)\big\} \tag{18}$$

в (17) является результатом влияния неравновесности фононов на фононы через подсистему электронов проводимости. Оно должно быть включено в фононный поток тепла [14]. В результате для компонент тензора теплопроводности $\kappa_{\mathrm{ph}\mu\nu}^{(1)}$ получим

$$\mathbf{W}_{\mathrm{ph}\mu} = -\sum_{\nu}\kappa_{\mathrm{ph}\mu\nu}^{(1)}\nabla_{\nu}T,$$

$$\kappa_{\mathrm{ph}yx}^{(1)} = \left(\frac{k_{\mathrm{B}}}{e}\right)^2 T\sigma_{yx}^{0}\big(A_{\mathrm{ph}}(\zeta)\big)^2, \quad \sigma_{yx}^{0} = \gamma_F\sigma_{xx}^{0},$$

$$\kappa_{\mathrm{ph}\mu\mu}^{(1)} = \kappa_{\mathrm{ph}}^{0} + \left(\frac{k_{\mathrm{B}}}{e}\right)^2 T\sigma_{\mu\mu}^{0}\big(A_{\mathrm{ph}}(\zeta)\big)^2. \tag{19}$$

Таким образом, учет влияния неравновесности фононов на фононы через электроны проводимости приводит к появлению недиагональных компонент в тензоре фононной теплопроводности. Отметим, что формулы (36) для $\kappa_{\mathrm{ph}\mu\nu}^{(1)}$ применимы в случае, когда частота релаксации фононов в нормальных процессах рассеяния $\nu_{\mathrm{ph}N}^{\lambda}(q)$ гораздо меньше частоты релаксации фононов с потерей импульса $\nu_{\mathrm{ph}R}^{\lambda}(q)$ [19]. Здесь и далее в электронный поток тепла $\mathbf{W}_{\mathrm{et}}$

$$W_{\mathrm{et}\mu} = \sum_{\nu}(\gamma_{\mu\nu}E_{\nu} - \kappa_{\mu\nu}^{e}\nabla_{\nu}T) \tag{20}$$

мы, кроме потока тепла $\mathbf{W}_{\mathrm{e}}$, включаем дрейфовую и диффузионную компоненты потока $\mathbf{W}_{\mathrm{phe}}$. В этом случае соотношения Онзагера для компонент тензоров термоэлектрических коэффициентов $\gamma_{\mu\nu}^{(1)}$ и $\beta_{\mu\nu}^{(1)}$ выполняются

$$\gamma_{xx}^{(1)} = T\beta_{xx}^{(1)} = -\sigma_{xx}^{0}T\frac{k_{\mathrm{B}}}{e}\left\{A_{\mathrm{ph}}(\zeta) + \frac{\pi^2}{3}D_{j1}\right\},$$

$$\gamma_{xy}^{(1)} = T\beta_{xy}^{(1)} = -\sigma_{xy}^{0}T\frac{k_{\mathrm{B}}}{e}\left\{A_{\mathrm{ph}}(\zeta) + \frac{\pi^2}{3}D_{j2}\right\}, \tag{21}$$

а выражение для компонент тензора электронной теплопроводности $\kappa_{\mu\nu}^{(1)}$ имеет вид

$$\kappa_{xx}^{e(1)} = L_0\sigma_{xx}^{0}T\big\{1 + A_{\mathrm{ph}}(\zeta)(D_{j1} + D_{A1})\big\},$$

$$\kappa_{xy}^{e(1)} = L_0\sigma_{xy}^{0}T\big\{1 + A_{\mathrm{ph}}(\zeta)(D_{j2} + D_{A2})\big\}. \tag{22}$$

Таким образом, необходимым условием выполнения соотношений микроскопической обратимости является учет тепла, переносимого фононами и обусловленного неравновесностью электронов при вычислении полного электронного потока тепла, причем все три потока $\mathbf{j}$, $\mathbf{W}_{\mathrm{e}}$ и $\mathbf{W}_{\mathrm{phe}}$ должны вычисляться с одной и той же неравновесной функцией распределения электронов. В данном случае они вычислены с функцией $\delta f_{\mathbf{k}}^{(1)}$, учитывающей эффект увлечения электронов фононами. Как мы увидим далее, этот вывод справедлив и при учете взаимного увлечения. Отметим, что соотношения Онзагера для кинетических коэффициентов, вычисленных с учетом электрон-фононного увлечения [3], не выполняются, так как поток $\mathbf{W}_{\mathrm{phe}}^{(1)}$ не принят во внимание.

Расчет потока тепла $\mathbf{W}_{\mathrm{e}}^{(2)}$ производится аналогично вычислению тока $\mathbf{j}^{(2)}$. В формулу (12) подставим выражение для $\mathbf{Q}(\varepsilon)$, выполним интегрирование по ε, ограничиваясь линейным приближением по параметру вырождения,

$$\mathbf{W}_{\mathrm{e}}^{(2)} = -\frac{e}{k_{\mathrm{B}}}\Gamma L_0 \sigma_{xx}^0 T\{\mathbf{E}_{W21} + \gamma_F(\mathbf{h}\times\mathbf{E}_{W22})\},$$

$$\mathbf{E}_{W1N} = \frac{\mathbf{E}_A[(1-\Gamma)D_{Q1} - \gamma_F^2 D_{Q2}]}{(1-\Gamma)^2+\gamma_F^2} + \frac{k_{\mathrm{B}}}{e}\frac{1-\gamma_F^2}{1+\gamma_F^2}C_2 D_\Phi \boldsymbol{\nabla} T,$$

$$C_2 = \ln 2 - \frac{3}{\pi^2}J_3 \cong 0.577,$$

$$\mathbf{E}_{W2N} = \frac{\mathbf{E}_A[D_{Q1} + (1-\Gamma)D_{Q2}]}{(1-\Gamma)^2+\gamma_F^2} + \frac{k_{\mathrm{B}}}{e}\frac{C_2 D_\Phi}{1+\gamma_F^2}\boldsymbol{\nabla} T,$$

$$J_3 = \int_0^\infty d\eta\left(-\frac{\partial f_0}{\partial\eta}\right)\eta f_2(\eta) \cong 0.381. \tag{23}$$

Из формул (15) и (23) найдем поток тепла $\mathbf{W}_{\mathrm{e}}$ и, сравнив кинетические коэффициенты в потоках $\mathbf{j}$ и $\mathbf{W}_{\mathrm{e}}$, убедимся, что соотношения Онзагера для них не выполняются. Очевидно, что следует учесть поток тепла $\mathbf{W}_{\mathrm{phe}}^{(2)}$, переносимый фононами, но обусловленный неравновесной добавкой к функции распределения электронов $\delta f_{\mathrm{k}}^{(2)}$. В линейном приближении по параметру вырождения для этого потока получим

$$\mathbf{W}_{\mathrm{phe}}^{(2)} = -\frac{k_{\mathrm{B}}}{e}TA_{\mathrm{ph}}(\zeta)\mathbf{j}_2. \tag{24}$$

В результате для полного потока $\mathbf{W}_{\mathrm{phe}}$ найдем

$$\mathbf{W}_{\mathrm{phe}} = -\frac{k_{\mathrm{B}}}{e}TA_{\mathrm{ph}}(\zeta)\Big\{\sigma_{xx}\mathbf{E}_A + \sigma_{yx}(h\times\mathbf{E}_A)$$
$$+\frac{\pi^2}{3}\frac{k_{\mathrm{B}}}{e}\sigma_{xx}^0\{D_{\mathrm{phe}1}\boldsymbol{\nabla} T + \gamma_F D_{\mathrm{phe}2}(\mathbf{h}\times\boldsymbol{\nabla} T)\}\Big\},$$

$$D_{\mathrm{phe}1} = D_{A1} + D_\Gamma^{(1)}, \quad D_{\mathrm{phe}2} = D_{A2} + D_\Gamma^{(2)}. \tag{25}$$

Дрейфовую и диффузионную компоненты потока тепла $\mathbf{W}_{\mathrm{phe}}$ включим в электронный поток тепла, а слагаемое, учитывающее влияние неравновесности фононов на фононы через электроны проводимости, — в фононный поток тепла. В результате такого разделения выражения для кинетических коэффициентов принимают вид

$$\gamma_{\mu\nu} = T\beta_{\mu\nu}, \quad \gamma_{\mu\nu}(H) = \gamma_{\nu\mu}(-H), \quad \mu\neq\nu,$$

$$\kappa_{xx}^e = \kappa_{yy}^e = L_0\sigma_{xx}^0 T\Big\{1+2A_{\mathrm{ph}}(\zeta)[D_{A1}+D_\Gamma^{(1)}] + \Gamma C_2 D_\Phi\frac{1-\gamma_F^2}{1+\gamma_F^2}\Big\},$$

$$\kappa_{yx}^e = -\kappa_{xy}^e = L_0\sigma_{yx}^0 T\Big\{1+2A_{\mathrm{ph}}(\zeta)[D_{A2}+D_\Gamma^{(2)}] + \frac{2C_2\Gamma D_\Phi}{1+\gamma_F^2}\Big\},$$

$$\kappa_{\mathrm{ph}xx} = \kappa_{\mathrm{ph}yy} = \kappa_{\mathrm{ph}}^{(0)} + \frac{3}{\pi^2}L_0 T\sigma_{xx}\big(A_{\mathrm{ph}}(\zeta)\big)^2,$$

$$\kappa_{\mathrm{ph}yx} = -\kappa_{\mathrm{ph}xy} = \frac{3}{\pi^2}L_0 T\sigma_{yx}\big(A_{\mathrm{ph}}(\zeta)\big)^2, \tag{26}$$

где компоненты термоэлектрического тензора $\beta_{\mu\nu}$ определяются выражениями (7). Итак, из непосредственного расчета мы убедились, что соотношения Онзагера для кинетических коэффициентов $\sigma_{\mu\nu}$, $\beta_{\mu\nu}$ и $\gamma_{\mu\nu}$, вычисленных в линейном приближении по параметру вырождения с учетом взаимного увлечения электронов и фононов, выполняются. Это дает основание полагать, что мы корректно учли как эффекты взаимного влияния неравновесности электронов на электроны через подсистему фононов, так и взаимное влияние неравновесности фононов на фононы через электроны проводимости.

Вычислим теперь изотермическую теплопроводность $\kappa(H)$. Для ее расчета в выражение

$$\kappa(H) = \kappa_{xx}^{\mathrm{e}} + \kappa_{xx}^{\mathrm{ph}} - T\beta_{xx}\alpha(H) - TH\beta_{yx}Q(H) \tag{27}$$

подставим результаты, полученные выше для кинетических коэффициентов, и найдем

$$\kappa(H) = \kappa_{\mathrm{ph}}^0 + L_0\sigma_{xx}^{(0)}T\Big\{1+2A_{\mathrm{ph}}(\zeta)$$
$$\times[D_{A1} - D_{j1}] + \Gamma C_2 D_\Phi\frac{1-\gamma_F^2}{1+\gamma_F^2}\Big\}. \tag{28}$$

Из (28) следует выражение для эффекта Маджи–Риги–Ледюка

$$\Delta\kappa(H) = \kappa(H) - \kappa(0) = -\frac{L_0\sigma_0 T\gamma_F^2}{1+\gamma_F^2}\Big\{1+2A_{\mathrm{ph}}(\zeta)$$
$$\times[D_{A1} - D_{j1}] + \Gamma C_2 D_\Phi\frac{3+\gamma_F^2}{1+\gamma_F^2}\Big\},$$

$$\kappa(0) = \kappa_{\mathrm{ph}}^0 + L_0\sigma_0 T\Big\{1+2A_{\mathrm{ph}}(\zeta)$$
$$\times[D_{A1} - D_{j1}] + \Gamma C_2 D_\Phi\Big\} = \kappa_{\mathrm{ph}}^0 + \kappa_{\mathrm{e}}(0). \tag{29}$$

В изотермических условиях взаимное увлечение вносит вклад только в диффузионную компоненту электронной теплопроводности, малость которой в вырожденных проводниках при низких температурах обеспечивает параметр $k_{\mathrm{B}}T/\zeta \ll 1$. Если функция $\Phi(\varepsilon)$ не обладает аномальной зависимостью от энергии электрона в окрестности уровня Ферми с масштабом $k_{\mathrm{B}}T$, то взаимное увлечение не приведет к изменению зависимости эффекта Маджи–Риги–Ледюка от магнитного поля.

3. Термомагнитные и термоэлектрические эффекты в вырожденных проводниках в адиабатических условиях

В предыдущих разделах мы рассмотрели ТМЭ в изотермических условиях. Однако практически ТМЭ измеряются в условиях, близких к адиабатическим [2], поскольку оказывается проще изолировать боковые грани образца, поместив его в вакуум и обеспечив равенство нулю поперечного потока тепла, чем экспериментально осуществить условие $\nabla_y T = 0$. Поэтому далее рассмотрим ТМЭ в адиабатических условиях: $j_x = 0$,

$j_y = 0$, $\nabla_y \mathbf{W} = 0$. Для этого необходимо прежде всего проанализировать эффект Риги–Ледюка, поскольку адиабатические поправки к ТМЭ непосредственно выражаются через коэффициент $S(H)$, характеризующий этот эффект [3]. Эффект Риги–Ледюка заключается в возникновении поперечного градиента температуры $\nabla_y T$ при наличии в образце $\nabla_x T$ и перпендикулярного ему магнитному полю

$$S(H) = \frac{\nabla_y T}{H\nabla_x T} = \frac{1}{H\kappa(H)}\left\{\kappa_{yx} - T\beta_{yx}\alpha(H) + TH\beta_{yy}Q(H)\right\}. \quad (30)$$

Воспользуемся выражениями (7), (8), (10), (26) и (28), тогда получим

$$S(H) = \frac{L_0\sigma_{yx}^0 T\left\{1 + 2A_{\mathrm{ph}}(\zeta)[D_{A2} + D_{j2}] + (2C_2\Gamma D_\Phi)/(1+\gamma_F^2)\right\}}{H\left\{\kappa_{\mathrm{ph}}^{(0)} + L_0\sigma_{xx}^{(0)}T\left[1 + 2A_{\mathrm{ph}}(D_{A1} - D_{j1}) + 2C_2\Gamma D_\Phi(1-\gamma_F^2)/(1+\gamma_F^2)\right]\right\}}. \quad (31)$$

Из (31) видно, что в адиабатических, как и в изотермических условиях, взаимное увлечение вносит вклад только в диффузионные компоненты эффектов. Малость этих вкладов в коэффициент $S(H)$ обеспечивает параметр вырождения $k_\mathrm{B}T/\zeta \ll 1$. Поэтому далее при анализе адиабатических поправок в ТМЭ ограничимся приближением

$$S(H) = \frac{\gamma_F \xi}{H(1+\xi+\gamma_F^2)}, \quad \xi = \frac{\kappa_\mathrm{e}(0)}{\kappa_{\mathrm{ph}}^0}. \quad (32)$$

Для поперечного или продольного эффектов НЭ в адиабатических условиях, воспользовавшись выражениями [3]

$$Q_{\mathrm{ad}}(H) = Q(H) + S(H)\alpha(H),$$
$$\alpha_{\mathrm{ad}}(H) = \alpha(H) - H^2 SQ(H), \quad (33)$$

получим

$$Q_{\mathrm{ad}}(H) = \frac{\pi^2 k_\mathrm{B}\gamma_F}{3eH(1+\xi+\gamma_F^2)}\left\{D_0 + \Gamma D_{Qj} + \xi\left[\frac{3}{\pi^2}A_{\mathrm{ph}} + 3k_\mathrm{B}T\left[\frac{k'(\varepsilon)}{k(\varepsilon)}\right]_{\varepsilon=\zeta}\right]\right\},$$

$$\Delta\alpha_{\mathrm{ad}}(H) = -\frac{\pi^2 k_\mathrm{B}\gamma_F}{3eH(1+\xi+\gamma_F^2)}[D_0 + \Gamma D_{Qj}]. \quad (34)$$

Величина адиабатической поправки в продольный эффект НЭ определяется параметром ξ. Если электронная теплопроводность не будет слишком мала по сравнению с фононной, то она скажется и на величине, и на зависимости продольного эффекта НЭ от магнитного поля. Более существенно неизотермичность влияет на поперечный эффект НЭ. Адиабатическая поправка к этому эффекту не содержит параметра вырождения в отличие от изотермического вклада. При $3\xi A_{\mathrm{ph}}/\pi^2 > |D_0|$ она будет определять и величину, и знак эффекта причем коэффициент $Q_{\mathrm{ad}}(H)$ будет положителен во всей области магнитных полей независимо от доминирующего механизма рассеяния носителей тока. Учтем, что для параболического закона дисперсии $D_0 \approx ak_\mathrm{B}T/\xi$, где $a \sim -3/2$ при рассеянии электронов на хаотической системе заряженных центров и $a \sim 1/2$ при рассеянии на акустических фононах [16]. В случае, когда доминирующим механизмом является рассеяние электронов на акустических фононах, коэффициент $Q_{\mathrm{ad}}(H) > 0$ во всей области магнитных полей. Если доминирует рассеяние электронов на заряженных примесях, то в зависимости от соотношения величин диффузионного вклада и вклада увлечения электронов фононами возможны два варианта зависимости коэффициента $Q_{\mathrm{ad}}(H)$ от магнитного поля. В случае $3\xi A_{\mathrm{ph}}/\pi^2 < 3k_\mathrm{B}T/2\zeta$ знак коэффициента $Q_{\mathrm{ad}}(H)$ будет отрицателен, а при выполнении противоположного неравенства коэффициент $Q_{\mathrm{ad}}(H) > 0$ во всей области магнитных полей. Таким образом, в вырожденных проводниках при низких температурах неизотермичность поперечного эффекта НЭ существенным образом сказывается и на величине, и знаке эффекта и приводит к изменению его зависимости от магнитного поля.

Из формул (28) и (32) определим теплопроводность в адиабатических условиях

$$\kappa_{\mathrm{ad}}(H) = \kappa(H)(1 + H^2S^2) = \left(\kappa(0) - \frac{\gamma_F^2\kappa_\mathrm{e}(0)}{1+\gamma_F^2}\right)\left(1 + \frac{\gamma_F^2\xi^2}{(1+\xi+\gamma_F^2)^2}\right). \quad (35)$$

Из (35) следует выражение для адиабатического эффекта Маджи–Риги–Ледюка

$$\Delta\kappa_{\mathrm{ad}}(H) = -\xi\left\{\left(\frac{\gamma_F^2}{(1+\gamma_F^2)(1+\xi)}\right) \times \left(1 + \frac{\xi^2\gamma_F^2}{1+\xi+\gamma_F^2}\right) - \frac{\xi\gamma_F^2}{1+\xi+\gamma_F^2}\right\}. \quad (36)$$

Численный анализ выражения (36) показал, что зависимость $\Delta\kappa_{\mathrm{ad}}(H)$ от магнитного поля, как и $\Delta\kappa(H)$, имеет характерную зависимость с насыщением в области сильных магнитных полей $\gamma_F \gg 1$. Величина адиабатической поправки в слабых полях определяется параметром ξ, а в сильных полях ее роль уменьшается обратно пропорционально квадрату напряженности магнитного поля.

В заключение приведем выражение для эффекта Эттингсгаузена, который связан с возникновением поперечного градиента температуры $\nabla_y T$ в проводнике с током j_x, помещенном в магнитном поле $\mathbf{H} = (0, 0, H)$ при отсутствии поперечных потоков $j_y = 0$, $\nabla_y \mathbf{W} = 0$, а также равенстве нулю продольного градиента температуры $\nabla_x T = 0$,

$$P = \frac{TQ(H)}{\kappa(H)} \approx \frac{\pi^2 k_\mathrm{B}T\gamma_F(D_0 + \Gamma D_{Qj})}{eH\kappa_{\mathrm{ph}}^0(1+\xi+\gamma_F^2)}. \quad (37)$$

Взаимное увлечение не приводит к изменению зависимости эффекта Эттингсгаузена, как и изотермических эффектов Нернста–Эттингсгаузена и Маджи–Риги–Ледюка от магнитного поля, а сказывается на величине эффекта за счет слагаемого, пропорционального параметру взаимного увлечения.

Итак, рассмотрены термомагнитные и термоэлектрические эффекты в проводниках с вырожденной статистикой носителей тока как в изотермических, так и в адиабатических условиях. Вычислены кинетические коэффициенты неравновесных электрон-фононных систем с учетом взаимного увлечения электронов и фононов в линейном приближении по параметру вырождения. Показано, что в изотермических условиях взаимное увлечение оказывает существенное влияние на величины эффектов НЭ, не приводя к изменению их зависимостей от магнитного поля. Вклад взаимного увлечения в изотермический эффект Маджи–Риги–Ледюка оказывается пропорциональным параметру вырождения.

Рассчитан эффект Риги–Ледюка и рассмотрены адиабатические поправки к ТМЭ. Показано, что вклад взаимного увлечения в эффект Риги–Ледюка пропорционален параметру вырождения и будет мал в условиях сильного вырождения. Величина адиабатической поправки в продольный эффект НЭ определяется отношением электронной теплопроводности к фононной и уменьшается обратно пропорционально квадрату магнитного поля в области сильных магнитных полей. Наиболее существенно неизотермичность сказывается на поперечном эффекте НЭ. Адиабатическая поправка к этому эффекту не содержит параметра вырождения в отличие от изотермического вклада. В вырожденных проводниках при низких температурах она существенным образом влияет и на величину, и на знак эффекта и может приводить к изменению зависимости поперечного эффекта НЭ от магнитного поля.

Заметим, что результаты данной работы получены в рамках общепринятого подхода [7–15] к рассмотрению эффектов, связанных с взаимным увлечением электронов и фононов. В этом подходе предполагается, что частота релаксации фононов в нормальных процессах рассеяния $\nu_{\mathrm{ph}N}^{\lambda}(q)$ гораздо меньше частоты релаксации фононов с потерей импульса $\nu_{\mathrm{ph}R}^{\lambda}(q)$ [19], и релаксацию импульса неравновесной фононной системы можно описать с помощью единственного параметра — полной частоты релаксации импульса фононов ν_{ph}. В условиях, когда $\nu_{\mathrm{ph}N}^{\lambda}(q) \geq \nu_{\mathrm{ph}R}^{\lambda}(q)$, необходимо учесть особую роль нормальных процессов рассеяния фононов, приводящих к релаксации фононной системы к локально равновесному распределению со средней скоростью дрейфа. В этом случае релаксация импульса в неравновесной фононной системе должна описываться тремя параметрами: двумя частотами релаксации и скоростью дрейфа. Причем скорость дрейфа фононов должна находиться из решения системы кинетических уравнений для неравновесной электронной и фононной функций распределения. Такой подход позволит более адекватно описать релаксацию импульса в неравновесной электрон-фононной системе и соответственно явления переноса в вырожденных проводниках.

Авторы выражает благодарность А.П. Танкееву и В.И. Окулову за обсуждение результатов работы.

Список литературы

[1] Л.Э. Гуревич. ЖЭТФ **16**, *3*, 193 (1946); **16**, *5*, 416 (1946).
[2] И.М. Цидильковский. Термомагнитные явления в полупроводниках. Наука, М. (1960). 296 с.
[3] В.М. Аскеров. Электронные явления переноса в полупроводниках. Наука, М. (1985). 318 с.
[4] Ф.Дж. Блат, П.А. Шредер, К.Ф. Фоилс, Д. Грейг. Термоэлектродвижущая сила металлов. Металлургия, М. (1980). 248 с.
[5] Р.Н. Гуржи. УФН **94**, *4*, 689 (1968); Р.Н. Гуржи, А.И. Копелиович. УФН **133**, *1*, 33 (1981).
[6] П.С. Зырянов, М.И. Клингер. Квантовая теория явлений электронного переноса в кристаллических полупроводниках. Наука, М. (1976). 480 с.
[7] Л.Э. Гуревич, И.Я. Коренблит. ФТТ **6**, *3*, 856 (1964).
[8] И.Г. Ланг, С.Т. Павлов. ЖЭТФ **63**, *4(10)*, 1495 (1972).
[9] I.I. Hanna, E.H. Sondheimer. Proc. Roy. Soc. **A239**, *1217*, 247 (1957).
[10] E.H. Sondheimer. Proc. Roy. Soc. **A234**, *1198*, 391 (1956).
[11] J.E. Parrott. Proc. Phys. Soc. **B70**, *6*, 590 (1957).
[12] J. Appel. Zs. Naturforcen. **12a**, *5*, 410 (1957); **13a**, *5*, 386 (1958).
[13] I.M. Tsidilkovskii, I.G. Kuleyev. Sevicond. Sci. Technol. **11**, *5*, 625 (1996).
[14] И.Г. Кулеев. ФММ **87**, *6*, 5 (1999); И.Г. Кулеев. ФТТ **41**, *10*, 1753 (1999).
[15] И.Г. Кулеев. ФТТ **42**, *3*, 415 (2000).
[16] И.Г. Кулеев, И.И. Ляпилин, А.Т. Лончаков, И.М. Цидильковский. ЖЭТФ **103**, *4*, 1447 (1993).
[17] И.Г. Кулеев, И.И. Ляпилин, А.Т. Лончаков, И.М. Цидильковский. ФТП **28**, *6*, 937 (1994).
[18] И.Г. Кулеев, И.И. Ляпилин, А.Т. Лончаков, И.М. Цидильковский. ЖЭТФ **106**, *4*, 1205 (1994).
[19] J. Callaway. Phys. Rev. **113**, *4*, 1046 (1959).