Движение в осесимметричной волне, распространяющейся в плазме твердого тела во внешних полях

© Е.Д. Эйдельман

Санкт-Петербургская государственная химико-фармацевтическая академия,
197376 Санкт-Петербург, Россия

(Поступила в Редакцию 28 декабря 1998 г.
В окончательной редакции 20 мая 1999 г.)

Показано, что в металле и полупроводнике возможен аналог волн Томсона, существующих в идеальной жидкости. Обсуждена возможность наблюдения таких волн.

В перпендикулярных друг другу электрическом **E** и магнитном **B** полях носители заряда, имеющие подвижность μ, приходят в круговое движение вокруг оси, совпадающей с направлением поля **B**. В самом грубом приближении можно считать, что скорость направлена перпендикулярно **E** и имеет величину порядка $a\mu^2 EB$, где a — числовой множитель порядка единицы. Очевидно, такое движение можно рассматривать как вращение.

Тогда можно провести аналогию между движением в осесимметричной волне, распространяющейся доль оси, вращающейся как целое идеальной жидкости (волны Томсона) [1], и движением в осесимметричной волне, распространяющейся вдоль направления магнитного поля в плазме твердого тела. Аналогия состоит не только в симметрии рассматриваемых движений, но также и в том, что в плазме твердого тела [2], как и в идеальной жидкости, можно пренебрегать вязкими свойствами. Насколько известно автору, аналогов волны Томсона в металлах и полупроводниках никто прежде не рассматривал.

1. Постановка задачи. Решение задачи без учета сжимаемости

Рассмотрим длинный тонкий полый цилиндр из проводящего материала. Это означает, что длина цилиндра L гораздо больше радиусов как внутренней R_i, так и внешней R_e поверхностей. Толщина цилиндра $\Delta R = R_e - R_i$ в свою очередь гораздо меньше как R_i, так и R_e. Таким образом,

$$\Delta R \ll \{R_i; R_e\} \ll L. \tag{1}$$

Введем цилиндрические координаты r, φ, z с осью z вдоль оси цилиндра и пусть внешнее магнитное поле **B** направлено параллельно оси z, а в реальном направлении между осью цилиндра и его внешней поверхностью приложена разность потенциалов U. Тогда можно считать, что носители в цилиндрическом слое вращаются как целое с угловой скоростью

$$\Omega = a\mu^2 B\frac{U}{R^2}, \tag{2}$$

где R обозначает любую из величин R_i или R_e.

Для выявления качественных эффектов достаточно считать величину Ω постоянной. Численные расчеты, в которых было учтено, что угловая скорость зависит от радиальной переменной r, подтверждают это предположение.

Пусть вдоль цилиндра распространяется волна малой амплитуды, в которой зависимость от времени и координат дается множителем вида

$$\exp\{i(k_\varphi \varphi + k_z z - \omega t)\}. \tag{3}$$

В осесимметричной волне $k_\varphi = 0$. В цилиндре бесконечной длины в силу трансляционой симметрии было бы $k_z = \pi q/\lambda$, где λ — длина волны, а $q = 1, 2, 3 \ldots$ Очевидно, всегда можно найти такое целое число q_0, при котором $k_z = \pi q_0/L$. Найдем зависимость скорости $\mathbf{v}(v_r; v_\varphi; v_z)$ в волне от радиальной переменной. Для этого уравнение Эйлера, записанное с учетом кулоновской силы,

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} = \frac{e}{m}\nabla\varphi \tag{4}$$

($E_1 = -\nabla\varphi$ — переменная часть электрического поля в плазме, в которую включено и давление, а e и m соответственно заряд и масса носителя) необходимо раскрыть в компонентах и решать вместе с уравнением неразрывности. В несжимаемой жидкости, подставляя радиальную зависимость скорости v_r в осесимметричной волне в виде

$$v_r = v_r(r)\exp\{i(\omega t - k_z z)\}, \tag{5}$$

найдем, что, как и для волны Томсона [1], $v_r(r)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 v_r(r)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dv_r(r)}{dr} + \left[\left(\frac{4\Omega^2}{\omega^2} - 1\right)k_z^2 - \frac{1}{r_2}\right]v_r(r) = 0, \tag{6}$$

которое в условиях, удовлетворяющих неравенству (1), превращается в гармоническое уравнение. Решение этого уравнения, обращающееся в нуль на внутренней поверхности цилиндра (при $r = R_i$), есть

$$v_r(r) = \mathrm{const}\cdot\sin\left[k_z(r - R_i)\left(\frac{4\Omega^2}{\omega^2} - 1\right)^{1/2}\right]. \tag{7}$$

Вся картина движения в волне распадается на области, ограниченные коаксиальными цилиндрическими поверхностями с радиусами r_p, определяемыми равенствами

$$k_z(r_p - R_i)\left(\frac{4\Omega^2}{\omega^2} - 1\right)^{1/2} = p\pi, \quad p = 0, 1, 2, \ldots \quad (8)$$

На этих поверхностях $v_r = 0$, другими словами, плазма никогда не пересекает их.

Решение (7) должно обращаться в нуль еще и на внешней поверхности цилиндра при $r = R_e$. Отсюда возникает соотношение

$$k_z\Delta r\left(\frac{4\Omega^2}{\omega^2} - 1\right)^{1/2} = p\pi, \quad (9)$$

которое устанавливает связь между ω и k_z для волн с заданным значением p (т.е. числом коаксиальных областей в ней).

Из рассмотрения этой простейшей модельной задачи для несжимаемой плазмы можно сделать следующие выводы.

Во-первых, из (9) видно, что волна распространяется без затухания с частотой

$$\omega = \omega_0 = b\mu^2 B\frac{U}{R^2}k_z\Delta r/[(k_z\Delta r)^2 + \pi^2 p^2]^{1/2}, \quad (10)$$

где b — некоторое число порядка единицы.

Во-вторых, из формул (3)–(7) видно, что в тонком полом цилиндре можно считать, что волна малой амплитуды имеет зависимость от времени и координат в виде множителя

$$\exp\{i[k_r(r - R_i) + k_\varphi\varphi + k_z z - \omega t]\}, \quad (11)$$

где $k_r = p\pi/\Delta r$.

Аргумент функции, записанной так, сохраняется и при решении задачи без использования неравенства (1), если гармонические функции заменить функциями Бесселя. Корни функции Бесселя при этом заменяют числа $p\pi$.

В заключение этого раздела отметим, что малое возмущение электрического поля E_1, вносимое волной в плазму, можно найти точно так же, как давление, вносимое волной Томсона [1] в несжимаемую жидкость. Зная возмущение электрического поля, из уравнения Пуассона (ε — диэлектрическая проницаемость)

$$\nabla^2\varphi = -en_1\varepsilon \quad (12)$$

легко найти и возмущение, вносимое волной в концентрацию носителей n.

2. Однокомпонентная плазма твердого тела (металл)

Волна, проходящая в газ электронов проводимости в металле, приводит к появлению возмущений тока, которые можно записать в виде

$$\mathbf{j}_1/e = n_1\mathbf{V} + n\mathbf{v} - \mu n\nabla\varphi + \mu n_1\mathbf{E} - D\nabla n_1. \quad (13)$$

В этой формуле учтены ток проводимости (σ — коэффициент проводимости, $\sigma = \mu ne$), ток диффузии (D — коэффициент диффузии) и перенос носителей течением ($\mathbf{V}$ — скорость течения).

Газ электронов нельзя считать несжимаемым. Сжимаемость электронного газа при распространении волны вносит вклад в кинетическое уравнение. Достаточно это уравнение записать в приближении времени релаксации τ [3]. Тогда имеем

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + \frac{n_1}{\tau} - D\nabla^2 n_1 - \mu n\nabla^2\varphi + \mu(\mathbf{E}\nabla)n_1 + (\mathbf{V}\nabla)n_1 + n\,\mathrm{div}\mathbf{v} = 0. \quad (14)$$

Используя решение (11), из уравнений Эйлера (4), Пуассона (12) и Больцмана (14) найдем, что дисперсионное соотношение для осесимметичных волн при отсутствии течения примет вид

$$(\omega^2 - 4\Omega^2)\left[1 - \left(1 + \frac{k_r^2}{k_z^2}\right)\frac{\omega(\omega + i\Gamma)}{\omega_p^2}\right] + \frac{k_r^2}{k_z^2}\omega^2 = 0. \quad (15)$$

Здесь обозначено $\omega_p^2 = ne^2/(m\varepsilon)$ — квадрат плазменной частоты, $\Gamma = a_1/\tau + a_2 D/(\Delta r)^2 + a_3\sigma/\varepsilon$ — декремент, a_1, a_2, a_3 — числа порядка единицы, показывающие относительные вклады различных процессов релаксации в поглощение волны.

Плазменная частота ω_p всегда гораздо больше частоты вращения Ω, поэтому дисперсионное соотношение (15) можно переписать как

$$\omega^4 + i\Gamma\omega^3 + \omega_p^2(\omega^2 - \omega_0^2) = 0. \quad (16)$$

Очевидно, что при малых частотах $\omega \ll \omega_p$ из (16) следует соотношение (10). Как обычно [3], в пределе низких частот электронный газ можно считать несжимаемым. При высоких частотах $\omega \gg \omega_p$ из уравнения (16) следует, что $\omega = -i\Gamma$, т.е. происходит поглощение волн высокой частоты [3]. В общем случае можно положить $\omega = \omega_0 - i\Gamma$. Условие слабого затухания $\Gamma \ll \omega_0$ приводится к виду

$$\frac{\mu^2 UB}{R}/v_T \gg \frac{LRl}{(\Delta r)^3}. \quad (17)$$

При выводе последней оценки учтено, что в декремент Γ главный вклад вносит деффузионное слагаемое $D/(\Delta r)^2$, а коэффициент диффузии по порядку есть произведение скорости хаотического (теплового) движения носителей v_T на длину свободного пробега l, т.е. $D \simeq v_T l$. В слабом магнитном поле $\mu B \simeq 1$ неравенство (17) хорошо выполняется из-за малости длины свободного пробега электронов в типичных металлах.

Для неосесимметричных волн имеем $k_\varphi = 1, 2, 3, \ldots$ Это, как можно легко показать, приводит к замене величины ω_0, вычисляемой по формуле (10), на кратную ей величину $(1 + k_\varphi)\omega_0$.

Учет течений в плазме привел бы к замене в формулах (15) и (16) величины $i\Gamma$ на $i\Gamma - \mathbf{kV}$, где вектор $\mathbf{k}$, очевидно, имеет компоненты $(k_r; k_\varphi; k_z)$. Если нет других течений, то течения, порождаемые полями с величинами скоростей порядка ΩR, приводят к тому, что результат $\omega \simeq \omega_0 - i\Gamma$ верен и в высокочастотной области.

Оба этих усложнения не приводят к качественному изменению результата.

Таким образом, волны в металле (заряженные волны) отличаются от волн Томсона в несжимаемой идеальной жидкости лишь наличием слабого затухания у заряженных волн. В то же время заряженные волны в электронном газе в металле похожи на волны Томсона в идеальной жидкости тем, что это в основном именно волны скорости. Как легко показать, отношение амплитуд v к скорости $\omega_0 R$, характерной для стационарного состояния плазмы в металле, гораздо (в $(L/\Delta r)^2$ раз) больше, чем отношения φ/U и n_1/n.

3. Двухкомпонентная плазма твердого тела (полупроводник)

Волна, проходящая в газе электронов и дырок в полупроводнике, приводит к появлению возмущений тока $\mathbf{j}^{\pm}$ каждого вида носителей. Эти возмущения можно записать в форме (13), но для электронов и дырок отдельно.

В систему уравнений задачи войдут уравнения Эйлера (4), но записаные для скорости каждого типа носителей отдельно. Угловая скорость движения плазмы как целого (2) для электронной и дырочной компонент также различна, что связано с различием в величине подвижностей $\mu^{\pm}$. В уравнении Пуассона (12) для полупроводниковой плазмы отклонение от нейтральности определяется разностью концентрации носителей $n_1^+ - n_1^-$. Наконец, в кинетических уравнениях, сохраняющих форму уравнений (14), но записанных для каждого типа носителей, должна быть учтена сжимаемость как электронов, так и дырок.

В полупроводниковой плазме возможны как заряженные, так и квазинейтральные волны. Анализ громоздких уравнений, описывающих движение в волне, распространяющейся в двухкомпонентной полупроводниковой плазме, показал, что результаты, полученные выше для электронного газа, в металле полностью сохраняются. Нужно только в соответствующих формулах учесть различия в характеристиках компонент, составляющих плазму, т. е., например, вместо D необходимо учитывать существование двух коэффициентов диффузии: для экситонов D^- и для дырок D^+.

Все выводы, сделанные в разделе 2 для волны в плазме в металле, могут быть перенесены и на плазму в полупроводнике.

Суммируя полученные результаты, для осесимметричной волны можно в первом приближении считать, что частота вне зависимости от количества типов носителей тока и от того, заряжена волна или квазинейтральна, может определяться по формуле (10). Для неосесимметичной волны кроме волны типа (10) возникает еще дрейфовая волна с частотой, кратной Ω, и затуханием, обусловленным конечным временем жизни свободных носителей тока, либо проводимостью (для заряженной волны, плазма металла), либо диффузией (для квазинейтральной волны, плазма полупроводника). В дрейфовых волнах знак неравенства в (17) обратный. При отсутствии приложенного напряжения, но наличии разности температур в радиальном направлении $T_e - T_i$ также возможен аналог волны Томсона, порождаемый термоэлектрическим эффектом.

Поскольку $\Delta r \ll L$, то разложением частоты в ряд получим из (10), что $\omega = d_1 k + d_2 k^3$ (d_1 и d_2 — постоянные). Это показывает возможность образования солитона рассматриваемых волн типа солитона Кортевега–де Вриза [2].

Возбуждение и наблюдение волны типа волны Томсона в твердом теле возможно, если у одного из торцов цилиндра создать дополнительное ("пробное") поле $B' \ll B$, что вызовет изменение частоты $\Omega' \sim B'$. Возбуждение, имеющее такую частоту, будет распространяться вдоль оси осицилиндра со скоростью $\Omega' \Delta r/(p\pi)$ и у другого торца цилиндра через время $(L/\Delta r)(p\pi/\Omega')$ можно будет зарегистрировать дополнительное магнитное поле. Такая задержка имеет место, если выпоняется условие (17). Для наблюдения солитона нужно создавать П-образный импульс магнитного поля. В слабом магнитном поле $B \simeq 1/\mu$ и при электрическом поле, меньшем греющего, частота волн — аналога волн Томсона — будет порядка $10^6 - 10^7$ Hz.

Список литературы

[1] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Гидродинамика. Наука, М. (1988). 736 с.

[2] Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский. Физическая кинетика. Наука, М. (1979). 528 с.

[3] М. Стил, Б. Вюраль. Взаимодействие волн в плазме твердого тела. Атомиздат, М. (1973). 277 с.