

01;03

Неустойчивость напряженной поверхности сильно вязкой жидкости

© Д.Ф. Белоножко, А.И. Григорьев

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

Поступило в Редакцию 12 июля 1999 г.

Обнаружен новый тип гидродинамической неустойчивости, реализующийся в очень вязкой жидкости, свободная поверхность которой подвержена внешнему силовому воздействию, составляющему некоторый угол с нормалью. Физическая причина появления неустойчивости — перераспределение энергии между касательной и нормальной компонентами напряжений свободной поверхности.

В технике и технологии известно и используется явление формирования волнообразного рельефа на изначально плоской поверхности весьма вязкого материала при силовом воздействии на нее, при котором на поверхности возникают как нормальные, так и касательные напряжения: речь может идти об ударной сварке (сварке взрывом) или об образовании волнового рельефа на твердой поверхности кремния при воздействии на нее высокоэнергетичным пучком атомов [1,2]. Экспериментальные данные, лежащие в основе этих феноменов, не нашли пока адекватного теоретического истолкования, и в этой связи представляет интерес нижерешаемая задача.

1. Примем, что плоская пленка жидкости с плотностью ρ , кинематической вязкостью ν , толщиной d на твердой подложке в поле тяжести \mathbf{g} подвержена непрерывному силовому воздействию в результате падения на ее свободную поверхность косоуго по отношению к нормали потока импульса, передаваемого, например, неким материальным пучком. Требуется определить спектр капиллярных движений в жидком слое.

Пусть $\Pi_{ij}^* = \rho^* U_i^* U_j^*$ — тензор плотности потока импульса внешнего силового воздействия в области над поверхностью жидкости (U_i — компоненты скорости пучка, а ρ^* — его объемная плотность) [2]. Для простоты будем решать двумерную задачу в декартовой системе координат XOZ с осью OZ, направленной вертикально вверх ($\mathbf{n}_z \parallel -\mathbf{g}$), когда уравнение возмущенной свободной границы жидкости имеет вид $z = \xi(x, t)$, а невозмущенной $z = 0$, твердое же дно расположено при $z = -d$. Явлениями, связанными с притоком вещества в жидкость, будем пренебрегать. В приближении волн малой амплитуды полная математическая формулировка задачи имеет вид:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \Delta \mathbf{U} + \mathbf{g}; \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{U} = 0; \quad (2)$$

$$z = \xi; \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = U_z - U_x \frac{\partial \xi}{\partial x}; \quad (3)$$

$$\Pi_{ij}^* n_j^* + \Pi_{ij} n_{ij} = P_\gamma n_i; \quad (4)$$

$$P_\gamma = -\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}; \quad n_i = \begin{bmatrix} -\frac{\partial \xi}{\partial x} \\ 1 \end{bmatrix}; \quad n_i^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} \\ -1 \end{bmatrix};$$

$$\Pi_{ij}^* = \begin{bmatrix} \rho^* (U_x^*)^2 & \rho^* U_x^* U_z^* \\ \rho^* U_x^* U_z^* & \rho^* (U_z^*)^2 \end{bmatrix};$$

$$\Pi_{ij} = \begin{bmatrix} \rho U_x^2 + P - 2\rho\nu \frac{\partial U_x}{\partial x} & \rho U_x U_z - \rho\nu \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x} \right) \\ \rho U_x U_z - \rho\nu \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x} \right) & \rho U_z^2 + P - 2\rho\nu \frac{\partial U_z}{\partial z} \end{bmatrix};$$

$$z = -d; \quad U_x = U_z = 0. \quad (5)$$

Здесь P_γ — лапласовское давление под искривленной поверхностью жидкости [3]; γ — коэффициент поверхностного натяжения; n_i — столбец координат вектора внешней к поверхности жидкости нормали; n_i^* — вектор-столбец внутренней нормали; квадратные матрицы Π_{ij}^* и Π_{ij} составлены из компонент тензоров плотности потока импульса над возмущенной поверхностью и под ней [3].

Корректное решение поставленной задачи методами теории возмущений затруднено присутствием в (1) слагаемого $(\mathbf{U} \cdot \nabla)\mathbf{U}$, которое в общем случае имеет составляющие всех порядков малости. Однако близость дна и высокая вязкость жидкости могут обеспечить условия, когда этим слагаемым можно пренебречь по крайней мере в первом приближении. Анализ задачи (1)–(5) в нулевом приближении показал, что если выполняется условие

$$U_0^* \ll \frac{\omega_0}{k}; \quad U_0^* \equiv |U_x^* U_z^*| \frac{\rho^* d}{\rho \nu}; \quad \omega_0^2 \equiv \frac{k}{\rho} (\gamma k^2 + \rho g),$$

то слагаемое $(\mathbf{U} \cdot \nabla)\mathbf{U}$ имеет не более чем первый по амплитуде возмущения ξ порядок малости (U_0^* — скорость стационарного поверхностного потока жидкости, вызванного тангенциальным натяжением, ω_0 — частота колебаний соответствующая волновому числу k в случае невязкой бесконечно глубокой жидкости). В компактной форме условие пренебрежения нелинейным слагаемым в уравнении (1) имеет вид:

$$\frac{|U_x^* U_z^*| d}{\nu \sqrt{\gamma k / \rho + g/k}} \frac{\rho^*}{\rho} \ll 1. \quad (6)$$

2. Примем, что условие (6) выполнено, линеаризуем задачу (1)–(5) и исследуем ее классическим методом [3,4] на устойчивость по отношению к возмущениям вида $\xi = \xi_0 \exp(st - ikx)$, где s — комплексная частота, а k — волновое число. В безразмерных переменных, в которых $\rho = \gamma = g = 1$, дисперсионное уравнение линеаризованной задачи имеет вид:

$$\begin{aligned} & k^2 q \left[4s(k^2 + q^2) - (3k^2 + q^2) \frac{W}{\nu} \right] \\ & + \frac{s\omega_0^2}{\nu^2} [k \cosh(kd) \sinh(qd) - q \sinh(kd) \cosh(qd)] \\ & - 2k^3 q \left[2s - \frac{W}{\nu} \right] [k \cosh(kd) \cosh(qd) - q \sinh(kd) \sinh(qd)] \\ & + (k^2 + q^2) \left[s(k^2 + q^2) - k^2 \frac{W}{\nu} \right] \\ & \times [k \cosh(kd) \cosh(qd) - q \sinh(kd) \sinh(qd)] = 0; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\omega_0^2 \equiv k(k+1); \quad q^2 \equiv k^2 + s/\nu; \quad W \equiv \frac{\rho^*}{\rho} \left[\frac{\rho}{g\gamma} \right]^{\frac{1}{2}} \left[(U_x^*)^2 - (U_z^*)^2 \right].$$

В соотношении (7) величины kd , qd и W безразмерны по определению, а переменные k , s и ν безразмерны на свои характерные масштабы:

$$k' = \sqrt{\frac{\rho g}{\gamma}}; \quad s' = \left[\frac{g^3 \rho}{\gamma} \right]^{\frac{1}{4}}; \quad \nu' = \left[\frac{\gamma^3}{g \rho^3} \right]^{\frac{1}{4}}.$$

3. Численный анализ дисперсионного уравнения (7) показал, что в описанных условиях поверхность жидкости может претерпевать не-

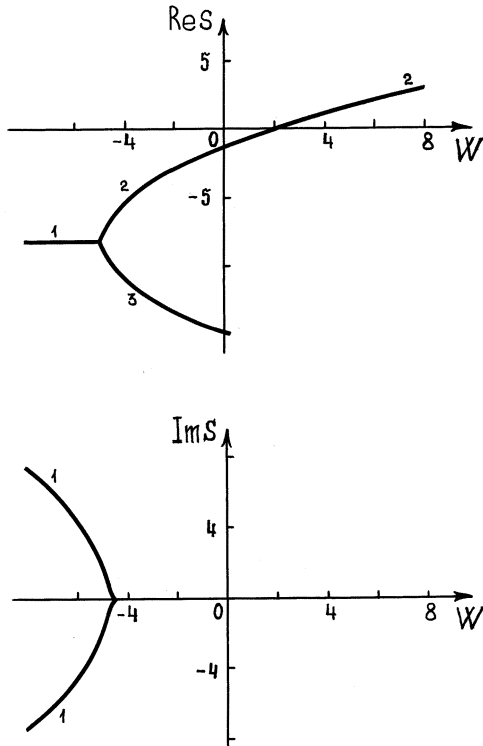


Рис. 1. Зависимости действительной $\text{Re } s = \text{Re } s(W)$ и мнимой $\text{Im } s = \text{Im } s(W)$ частей комплексной частоты от величины параметра W , построенные при $k = 5$; $\nu = 0.5$; $kd = 1$.

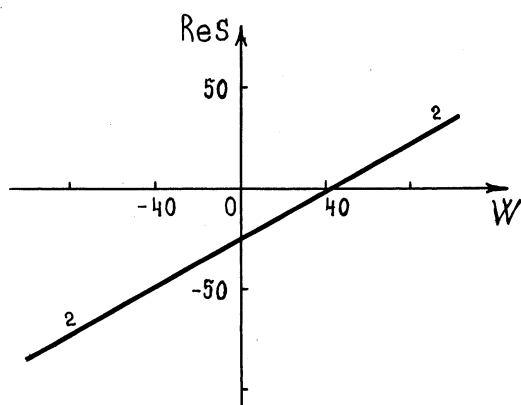


Рис. 2. Часть ветви 2, выходящая в область $\text{Re } s > 0$, зависимости действительной части комплексной частоты $\text{Re } s = \text{Re } s(W)$ от величины параметра W , построенной при $k = 100$; $\nu = 0.5$; $kd = 1$. Ветви 1 и 3 находятся вне приведенной области значений W и $\text{Re } s$.

устойчивость (см. рис. 1, 2). Из рис. 1 видно, что увеличивая значение горизонтальной составляющей скорости падающего на свободную поверхность жидкости пучка (увеличивая параметр W), можно спровоцировать развитие аperiodической неустойчивости, реализующейся в данном случае при $W \geq 2$ (положительная часть ветви 2). В проведенных расчетах глубина жидкости конечна ($kd = 1$), а сама жидкость сильно вязкая ($|s/\nu k^2| \ll 1$). Это объясняет наличие лишь аperiodических движений при $W = 0$ и в окрестности этого значения. Из рис. 1 видно, что при $W < 0$ реализуются и колебательные движения. Уравнение (7) имеет бесконечное число решений [5], но на рисунках представлены лишь корни, связанные с неустойчивой ветвью.

Возбуждение неустойчивости мелкомасштабных движений возможно лишь при существенном увеличении энергии внешнего воздействия, что видно из рис. 2, полученного при $k = 100$ и прежних значениях остальных параметров. Неустойчивость наблюдается лишь при $W > 40$, а колебательные ветви лежат вне области расчетов.

Несложно подсчитать, что если $|U_x/U_z| = 10$, то при тех значениях переменных, для которых построен рис. 1, выполняется неравенство

$$\frac{|U_x^* U_z^*| d}{\nu \sqrt{\gamma k / \rho + g/k}} \frac{\rho^*}{\rho} < 0.2 \frac{\rho^*}{\rho}.$$

Поэтому согласно (6) проведенные расчеты достоверны, когда массовая плотность пучка меньше плотности жидкости.

4. Заключение. Слой сильно вязкой жидкости конечной глубины неустойчив по отношению к касательным натяжениям, порождаемым непрерывным потоком "втекающего в жидкость" импульса. Неустойчивость обнаруживается в линеаризованной гидродинамической модели явления и носит аperiodический характер. Физическая природа неустойчивости, по-видимому, связана с "перекачкой" энергии касательных напряжений на свободной поверхности в энергию нормальных напряжений.

Список литературы

- [1] *Дермин А.Н., Михайлов А.Н.* // Материалы IV Международного симпозиума по обработке металлов взрывом. Готвальдов, ЧССР. 1979. С. 29–39.
- [2] *Асланов С.К.* // Тез. докл. XVIII конференции стран СНГ "Дисперсные системы", Одесса, 1998. С. 16–17.
- [3] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 733 с.
- [4] *Левич В.Г.* Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 699 с.
- [5] *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Коромыслов В.А., Белоножко Д.Ф.* // ЖТФ. 1997. Т. 67. В. 8. С. 27–33.